Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Cornelius Plch
Společný spůsob dokazování různých pouček a vzorců. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 10 (1881), No. 5, 252--260

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109387`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1881

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Společný spůsob dokazování různých pouček a vzorců.

na základě

skracování stálých poměrů proměnnými veličinami.

Podává žákům středních škol

P. Cornelius Pich, S. J. v Bohusudově.

(Pokračování.)

Nechceme-li při dokazování té které poučky odvoditi buď srovnalost $\frac{Ax_1}{ay_1} = \frac{B}{b}$ (I) bud rovnici $\frac{Ax_1}{ay_1} = 1$ (II) §. 1., poukážeme na poučku následující, čímž se stane důkaz i kratším i jasnějším.

§. 5. *Důležitá poučka. Stálý poměr dvou proměnných rovná se poměru jejich mezních hodnot.*

Podmínky.

1. Buďtež A, a *mezní hodnoty dvou proměnných* veličin V, v, na čísle $n = 1, 2, 3, 4 \ldots.$ tak závislých, že hodnot jejich při rostoucím n ustavičně přibývá neb ubývá.

2. Budiž C *stálá hodnota poměru* $\frac{V}{v}$ pro každou hodnotu n.

Výrok:

$$C = \frac{V}{v} = \frac{A}{a}.$$

Přímý důkaz. Značí-li x, y proměnné (kladné neb záporné) rozdíly, jimiž se proměnné veličiny V, v od svých mezních hodnot A, a liší, bude

$$V = A + x = A\left(1 + \frac{x}{A}\right) = Ax_1,$$

$$v = a + y = a\left(1 + \frac{y}{a}\right) = ay_1.$$

Dělením těchto dvou rovnic obdržíme, hledíce k 2. podmínce,

$$C = \frac{V}{v} = \frac{Ax_1}{ay_1},$$

z čehož za příčinou v §. 1. uvedenou plyne $x_1 = y_1$; pročež skrácením stálého poměru $\frac{Ax_1}{ay_1}$ nabudeme

$$C = \frac{V}{v} = \frac{A}{a}.$$

Dodatek. Jsou-li A, a, b *mezní hodnoty proměnných* veličin V, v, w, je-li pak C *stálá hodnota poměru* $\frac{V}{vw}$, obdržíme podobným způsobem

$$C = \frac{V}{vw} = \frac{A}{ab}, \text{ t. j.}$$

Stálý poměr jedné proměnné k součinu dvou jiných proměnných rovná se obdobnému poměru jejich mezních hodnot.

§. 6. *Poučka. Obvody (P, p) dvou kružnic jsou s příslušnými poloměry (R, r) srovnalostné.*

Důkaz. Buďtež U, u obvody dvou pravidelných o kružnice P, p opsaných (aneb do nich vepsaných) mnohoúhelníkův o témž počtu ($n = 3, 4, 5, 6 \ldots$) stran.

Poněvadž poměr $\frac{U}{u} = \frac{R}{r}$ je stálý, a poněvadž kružnice P, p jsou mezní hodnoty proměnných obvodů U, u, bude tedy dle poučky §. 5.

$$\frac{R}{r} = \frac{U}{u} = \frac{P}{p},$$

z čehož plyne

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{r}.$$

§. 7. *Poučka. Ploský obsah kruhu (K) rovná se obvodu kružnice (P), znásobenému polovicí poloměru (R).*

I. Důkaz. Budiž F ploský obsah, U obvod pravidelného o kruh K *opsaného mnohoúhelníku* o $n = 3, 4, 5, 6 \ldots$ stranách.

Protože poměr $\frac{F}{U} = \frac{R}{2}$ je stálý, a protože kruh K a kružnice P jsou mezní hodnoty proměnných F, U, bude tedy dle poučky §. 5.

$$\frac{R}{2} = \frac{F}{U} = \frac{K}{P}$$

z čehož plyne

$$\frac{K}{P} = \frac{R}{2} \text{ aneb } K = P \, . \, \frac{R}{2}.$$

II. Důkaz. Budiž f ploský obsah, u obvod pravidelného do kruhu K *vepsaného mnohoúhelníku* o $n = 3, 4, 5, 6 \ldots .$ stranách, r pak vzdálenost jeho středu od některé strany.

Protože poměr $\frac{f}{ur} = \frac{1}{2}$ je stálý, a protože kruh K, kružnice P, pak poloměr R jsou mezní hodnoty proměnných f, u, r, bude tedy dle dodatku k §. 5.

$$\frac{1}{2} = \frac{f}{ur} = \frac{K}{PR},$$

z čehož plyne

$$\frac{K}{PR} = \frac{1}{2} \text{ aneb } K = P \, . \, \frac{R}{2}.$$

§. 8. *Poučka. Dva jehlance* (J, j) *o rovných základnách a výškách jsou sobě rovny.*

Důkaz. Buďtež S, s součty $n = 1, 2, 3, 4 \ldots .$ zevnějších (aneb vnitřních) o jehlance J, j opsaných (aneb do nich vepsaných) hranolů, jež známým spůsobem sestrojíme, rozdělivše rovné výšky jehlanců $n = 1, 2, 3, 4 \ldots .$ sobě rovných (aneb nerovných, avšak souhlasných) částí.

Jelikož poměr $\frac{S}{s} = 1$ je stálý a jelikož jehlance J, j jsou mezní hodnoty proměnných součtů S, s, bude tedy dle poučky §. 5.

$$1 = \frac{S}{s} = \frac{J}{j},$$

z čehož plyne

$$\frac{J}{j} = 1 \text{ aneb } J = j.$$

§. 9. *Poučka. Plášť* (m) *přímého kužele jest roven součinu z obvodu* (p) *základny a z polovice strany* (s).

I. Důkaz. Budiž F plášť *jehlance* kolem kužele *opsaného*, U obvod jeho pravidelné základny o $n = 3, 4, 5, 6 \ldots .$ stranách.

Poněvadž poměr $\frac{F}{U} = \frac{s}{2}$ je stálý, a poněvadž plášť m a obvod p jsou mezní hodnoty proměnných F, U, bude tedy dle poučky §. 5.

$$\frac{s}{2} = \frac{F}{U} = \frac{m}{p},$$

z čehož plyne

$$\frac{m}{p} = \frac{s}{2} \text{ aneb } m = p \cdot \frac{s}{2}.$$

II. Důkaz. Budiž f plášť *jehlance* do kužele *vepsaného*, u obvod jeho pravidelné základny o $n = 3, 4, 5, 6 \ldots$ stranách, h pak výška pobočné stěny.

Poněvadž poměr $\frac{f}{uh} = \frac{1}{2}$ je stálý, a poněvadž plášť m, obvod p, pak strana s jsou mezní hodnoty proměnných f, u, h, bude tedy dle dodatku k §. 5.

$$\frac{1}{2} = \frac{f}{uh} = \frac{m}{ps},$$

z čehož plyne

$$\frac{m}{ps} = \frac{1}{2} \text{ aneb } m = p \cdot \frac{s}{2}.$$

§. 10. *Poučka. Krychlový obsah (k) kužele jest roven součinu ze základny (f) a z třetiny výšky (h).*

Důkaz. Budiž K krychlový obsah jehlance kolem kužele opsaného (aneb do něho vepsaného), F ploský obsah jeho pravidelné základny o $n = 3, 4, 5, 6 \ldots$ stranách.

Protože poměr $\frac{K}{F} = \frac{h}{3}$ je stálý, a protože kužel k a základna f jsou mezní hodnoty proměnných K, F, bude tedy dle poučky §. 5.

$$\frac{h}{3} = \frac{K}{F} = \frac{k}{f},$$

z čehož plyne

$$\frac{k}{f} = \frac{h}{3} \text{ aneb } k = f \cdot \frac{h}{3}.$$

§. 11. *Poučka. Plášť (m) kolmého válce rovná se součinu z obvodu (p) základny a z výšky (h).*

Důkaz. Budiž M plášť hranolu kolem válce opsaného (aneb do něho vepsaného), U obvod jeho pravidelné základny o $n = 3, 4, 5, 6 \ldots$ stranách.

Jelikož poměr $\frac{M}{U} = h$ je stálý, a jelikož plášť m a obvod p jsou mezní hodnoty proměnných M, U, bude tedy dle poučky §. 5.

$$h = \frac{M}{U} = \frac{m}{p},$$

z čehož plyne

$$\frac{m}{p} = h \text{ aneb } m = ph.$$

§. 12. *Poučka. Krychlový obsah (k) válce jest roven součinu ze základny (f) a z výšky (h).*

Důkaz. Budiž K krychlový obsah hranolu kolem válce opsaného (aneb do něho vepsaného), F ploský obsah jeho pravidelné základny o $n = 3, 4, 5, 6 \ldots$ stranách.

Poněvadž poměr $\frac{K}{F} = h$ je stálý, a poněvadž válec k a základna f jsou mezní hodnoty proměnných K, F, bude tedy dle poučky §. 5.

$$h = \frac{K}{F} = \frac{k}{f},$$

z čehož plyne

$$\frac{k}{f} = h \text{ aneb } k = fh.$$

§. 13. *Poučka. Ploský obsah (v) vrchlíku (kulového pásu) jest roven součinu z obvodu (p) největší kružnice a z výšky (h) vrchlíku (pásu).*

I. Důkaz. Budiž Φ *otočná plocha* o vrchlík (pás) *opsaná*, jež se vytvořila otočením proměnné základny výkrojku pravidelného $2n$ stranného *mnohoúhelníku* (o kružnici p *opsaného*) kolem osy procházející středem a rohem jeho, H pak budiž pravoúhelný průmět proměnné základny na osu.

Protože poměr $\frac{\Phi}{H} = p$ je stálý, a protože vrchlík (pás) v a výška h jsou mezní hodnoty proměnných Φ, H, bude tedy dle poučky §. 5.

$$p = \frac{\Phi}{H} = \frac{v}{h},$$

z čehož plyne

$$\frac{v}{h} = p \text{ aneb } v = ph.$$

II. Důkaz. Budiž φ *otočná plocha* do vrchlíku (pásu) *vepsaná*, jež vznikla otočením proměnné základny výkrojku pravidelného $2n$ stranného *mnohoúhelníku* (do kružnice p *vepsaného*) kolem osy, procházející středem a rohem tohoto mnohoúhelníku, do něhož proměnná *kružnice* u budiž *vepsaná*; pak jest stálá výška h pravoúhelný průmět proměnné základny na osu.

Protože poměr $\frac{\varphi}{u} = h$ je stálý, a protože vrchlík (pás) v a kružnice p jsou mezní hodnoty proměnných φ, u, bude tedy dle poučky §. 5.

$$h = \frac{\varphi}{u} = \frac{v}{p},$$

z čehož plyne

$$\frac{v}{p} = h \text{ aneb } v = ph.$$

Výsledek. Je-li tvořící kruhový oblouk roven celé polovici kružnice, rovná se i vytvořený vrchlík (pás) celému povrchu kulovému, a výška vrchlíku (pásu) je rovna celému průměru koule. Pročež plyne z hořejší poučky *věta: Ploský obsah povrchu kulového jest roven součinu z obvodu největší kružnice a z průměru koule.*

§. 14. *Poučka. Krychlový obsah* (k) *kulového výkrojku výseče) jest roven součinu z ploského obsahu* (v) *vrchlíku (pásu) a z třetiny poloměru* (r) *koule.*

I. Důkaz. Budiž W krychlový obsah *otočného tělesa* o výkrojek (výseč) *opsaného*, Φ *otočná plocha* o vrchlík (pás) *opsaná.*

Jelikož poměr $\frac{W}{\Phi} = \frac{r}{3}$ je stálý, a jelikož výkrojek (výseč) k a vrchlík (pás) v jsou mezní hodnoty proměnných W, Φ, bude tedy dle poučky §. 5.

$$\frac{r}{3} = \frac{W}{\Phi} = \frac{k}{v},$$

z čehož plyne

$$\frac{k}{v} = \frac{r}{3} \text{ aneb } k = v . \frac{r}{3} .$$

II. Důkaz. Budiž w krychlový obsah *otočného tělesa* do výkrojku (výseče) *vepsaného*, φ *otočná plocha* do vrchlíku (pásu) *vepsaná*, ϱ poloměr *kružnice* do tvořícího mnohoúhelníku *vepsané.*

Jelikož poměr $\frac{w}{\varphi\varrho} = \frac{1}{3}$ je stálý, a jelikož výkrojek (výseč) k, vrchlík (pás) v, poloměr r jsou mezní hodnoty proměnných w, φ, ϱ, bude tedy dle dodatku k §. 5.

$$\frac{1}{3} = \frac{w}{\varphi\varrho} = \frac{k}{vr},$$

z čehož plyne

$$\frac{k}{vr} = \frac{1}{3} \text{ aneb } k = v . \frac{r}{3} .$$

Výsledek. Je-li tvořící kruhový výkrojek roven celému polokruhu, rovná se i vytvořený kulový výkrojek (výseč) celé kouli, a příslušný vrchlík (pás) celému povrchu kulovému. Pročež plyne z hořejší poučky *věta: Krychlový obsah koule jest roven součinu z povrchu a z třetiny poloměru.*

§. 15. *Poučka. Ploský obsah* (E) *ellipsy rovná se součinu z obou poloos* (a, b) *znásobenému číslem* π.

Důkaz. Budiž střed ellipsy počátkem pravoúhelných souřadnic, velká osa ($2a$) osou úseček, menší osa ($2b$) osou pořadnic, $K = a^2\pi$ ploský obsah kruhu ze středu ellipsy velkou poloosou jakožto poloměrem opsaného, znamenejtež pak s, S součty všech obdélníkův o ellipsu i o kruh opsaných (aneb do ellipsy a do kruhu vepsaných).

Chtějíce tyto obdélníky sestrojiti rozdělme každou polovici velké osy na $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ sobě rovných aneb nerovných částí, vztyčme v dělících bodech pořadnice ellipsy i kruhu, a považujme každou část velké osy jakožto společnou základnu dvou stejnolehlých obdélníkův, z nichžto každý ze dvou sousedných pořadnic větší (aneb menší) pořadnici má za výšku.

Poněvadž poměr $\frac{s}{S} = \frac{b}{a}$ je stálý a poněvadž ellipsa E

i kruh $K = a^2\pi$ jsou mezní hodnoty proměnných součtů s, S, bude tedy dle poučky §. 5.

$$\frac{b}{a} = \frac{s}{S} = \frac{E}{a^2\pi},$$

z čehož plyne

$$\frac{E}{a^2\pi} = \frac{b}{a} \text{ aneb } E = ab\pi.$$

§. 16. *Poučka. Vnitřní plocha (P), omezená pravoúhelnými souřadnicemi (ξ, η) a příslušným obloukem paraboly, rovná se dvojnásobné zevnější ploše (p), omezené obloukem paraboly, osou pořadnic a kolmicí s krajného bodu pořadnice η na osu pořadnic spuštěnou.*

Budiž vrchol paraboly počátkem pravoúhelných souřadnic a osa paraboly osou úseček. Chtějíce dokázati pravdivost rovnice $P = 2p$ veďme *v libovolné vzdálenosti* od stálé (poněvadž dané) pořadnice η pořadnici $\eta_1 < \eta$, a sestrojme pořadnice η_2, η_3 .... tak, aby každá z nich byla *třetí spojitě srovnalostnou* ku dvěma předcházejícím. Bude tedy

$$\frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\eta_2}{\eta_3} = \ldots.; \text{ tudíž také } \frac{\eta_1}{\eta} = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{\eta_3}{\eta_2} = \ldots.$$

Přičteme-li ke každému poměru 1, obdržíme *proměnné* ale *rovné poměry*

$$\frac{\eta + \eta_1}{\eta_1} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_2} = \frac{\eta_2 + \eta_3}{\eta_3} = \ldots.;$$

taktéž
$$\frac{\eta + \eta_1}{\eta} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1} = \frac{\eta_2 + \eta_3}{\eta_2} = \ldots.$$

dvou a dvou obdélníků, jež sestrojíme spustíce s krajného bodu každé pořadnice na osu pořadnic kolmici a prodloužíce náležitě pořadnice i kolmice.

I. Důkaz. Buďtež S, s součty všech $n = 1, 2, 3, 4 \ldots.$ *obdélníků* do ploch P, p *vepsaných*, z nichžto dva a dva k sobě se mají jako se má součet dvou sousedných pořadnic *k pořadnici menší.* Pročež také bude

$$\frac{S}{s} = \frac{\eta + \eta_1}{\eta_1} = 2 + z = 2\left(1 + \frac{z}{2}\right) = 2z_1,$$

kdežto z značí proměnný rozdíl, jímž se proměnný poměr $\frac{\eta + \eta_1}{\eta_1}$ od stálého čísla 2 liší.

Protože poměr $\frac{S}{sz_1} = 2$ je stálý, a protože plochy P, p jsou mezní hodnoty proměnných součtů S, s, a číslo 1 je mezní hodnota proměnného čísla $z_1 = 1 + \frac{z}{2}$, bude tedy dle dodatku k §. 5.

$$2 = \frac{S}{s z_1} = \frac{P}{p \, . \, 1},$$

z čehož plyne

$$\frac{P}{p} = 2 \text{ aneb } P = 2p.$$

II. Důkaz. Buďtež Σ, σ součty všech $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ *obdélníkův* o části ploch P, p *opsaných*, z nichžto dva a dva k sobě se mají jako se má součet dvou sousedných pořadnic k *pořadnici větší.* Pročež také bude

$$\frac{\Sigma}{\sigma} = \frac{\eta + \eta_1}{\eta} = 2 - \varphi = 2\left(1 - \frac{\varphi}{2}\right) = 2\varphi_1 .$$

Jelikož poměr $\frac{\Sigma}{\sigma \varphi_1} = 2$ je stálý, a jelikož plochy P, p jsou mezní hodnoty proměnných součtů Σ, σ, a číslo 1 je mezní hodnota proměnného čísla $\varphi_1 = 1 - \frac{\varphi}{2}$, bude tedy dle dodatku k §. 5.

$$2 = \frac{\Sigma}{\sigma \varphi_1} = \frac{P}{p \, . \, 1},$$

z čehož plyne

$$\frac{P}{p} = 2 \text{ aneb } P = 2p.$$

Výsledek. Poněvadž jest $\xi \eta = P + p = \frac{3}{2} P$, bude tedy

$$P = \frac{2}{3} \xi \eta \text{ t. j.}$$

Plocha omezená pravoúhlými souřadnicemi a příslušným obloukem paraboly rovná se $\frac{2}{3}$ součinu z těchto souřadnic.