J. S. Vaněček

Organické vytvořování čar a ploch 2. stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 10 (1881), No. 5, 275--278

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109386`

J. W. Z. Glaisher. London und Cambridge". Zde se však pan referent mýlí, připisuje-li *Buffon-ovu* úlohu slavnému *Laplace-ovi*, který ji arciť jinak řešenou podává ve svém epochalním díle „Théorie analytique des probabilités, 1812 aneb 1847, 5. kapitola".

Organické vytvořování čar a ploch 2. stupně.

Podává

J. S. Vaněček.

Staudt praví v předmluvě ku své geometrii polohy takto:

„Každé vyučování geometrii má vycházeti ze všeobecných úvah, které žáka s rozličnými druhy geometrických útvarů seznamují a jeho obrazotvornost cvičí. Učebné knihy přecházejí však namnoze příliš brzy ku zvláštnostem, totiž ku shodnosti a podobnosti trojúhelníků, a proto nepodávají mnohé pojmy v patřičné všeobecnosti . . . .

„Jak pro cvičeného geometra není již vyslovení reciproké věty dané větě žádným cvičením, tak jest to pro začátečníka velmi důležitou úlohou. Že však zákon duálný každého vnímavého žáka více ku přemýšlení povzbuzuje, než kterákoliv o sobě podaná věta, sezná každý učitel, který své žáky na něj upozorní".

Na doklad takového užitečného cvičení v převádění jedné věty na jinou, jí duálnou, či duálně odpovídající, podány zde některé souvislé příklady.

Jest známo, že v rovině odpovídá

bodu přímá čára a *přímé čáře bod;*

v prostoru pak zaměňuje se

bod rovinou a *rovina bodem.*

Přímá čára, jakožto uprostřed nich ležící útvar odpovídá *sama sobě.*

Newton podává ve svých „Základech" organické vytvořování kuželoseček, kterýžto způsob podáváme na levé a jemu odpovídající — dualný — na pravé straně:

Jest dána *přímá čára* a dva libovolně s ní v jedné rovině ležící pevné *body*. Každý z nich jest vrcholem úhlu, jehož velikosť jest stálá.

Přivedou-li se dvě *ramena* úhlů těchto k tomu, aby se protínala na dané přímé čáře, pak se druhá ramena protínají *v bodu*, všeobecně mimo tuto přímou ležícího. Točí-li se dané úhly kolem svých vrcholů za dané podmínky, tedy popisuje tento bod *kuželosečku*, jež prochází oběma pevnými body.

(*Newton.*)

Jest dán *bod* a dvě s ním v jedné rovině ležící přímé čáry. Na každé z nich je vytknuta úsečka, jež se nemění.

Spojí-li se *konec* jedné s některým *koncem* druhé úsečky tak, aby spojovací přímá procházela daným bodem, pak *přímá*, která spojuje druhé dva konce úseček, všeobecně tímto bodem neprochází. Posunují-li se úsečky na pevných přímých dle dané podmínky, pak obaluje tato přímá *kuželosečku*, jež se dotýká obou pevných přímých.

(*Chasles*).

Důkaz jedné i druhé poučky zakládá se na promětnosti svazků, paprsků a přímých řad, jak v počátcích novější geometrie shledáváme. Mimo to uvádí se tam též, kdy takto vytvořená kuželosečka jest ellipsou, hyperbolou neb parabolou.

Rozumí se, že v našich konstrukcích rozhoduje vzájemná poloha pevné přímé a pevných bodů, aneb pevného bodu a pevných přímých, jakož i smysl otáčení úhlů a posouvání úseček.

Pravá strana učí nás, jak se mohou snadno sestrojiti tečny ke kuželosečkám.

Chasles podal levou stranu všeobecněji; právě tak můžeme dle zákona duálného učiniti i s levou:

Jestliže místo pevné *přímé* užijeme *kuželosečky,* která prochází oběma pevnými *body,* a vše ostatní ponecháme v platnosti, i tu pak onen bod probíhá kuželosečku, procházející pevnými body. (*Chasles*).

Jestliže místo pevného *bodu* položíme *kuželosečku,* jež se obou pevných přímých dotýká, a vše ostatní ponecháme v platnosti, tedy obaluje ona přímá zase kuželosečku, jež se daných přímých dotýká. (*Nové*).

Pravosť obou vět leží na bíledni.

Podobné poučky můžeme podati pro kuželosečky sferické, kdež místo roviny máme kulovou plochu a místo přímých velké kruhové čáry. Tedy:

Dva sférické *úhly*, libovolné avšak stálé velikosti, otáčí se kolem dvou pevných *bodů*, jakožto vrcholů tak, že jejich dvě *ramena* se protínají na dané velké kruhové čáře, průsečný *bod* druhých dvou *ramen* vytvořuje *sférickou kuželosečku*, jež prochází pevnými vrcholy hybných úhlů. (*Chasles*).

Na dvou pevných daných *obloucích* posunují se dva libovolné, avšak velikostí svou stálé *oblouky* tak, že *oblouk*, který spojuje kterékoliv dva jejich konce, se točí kolem pevného *bodu*, *oblouk* pak, který spojuje druhé dva *konce*, obaluje *sférickou kuželosečku*, která se dotýká obou pevných oblouků, na nichž se úseky posunují. (*Chasles*).

Pomocí návodu Newtonova můžeme vytvořiti též plochy druhého stupně. Totiž:

Jest dána pevná *rovina* a dva pevné *body*, které leží mimo ni. Kolem každého z nich jakožto vrcholu točí se *úhel* libovolné avšak stálé velikosti. Oba se nalézají v *rovině* hybné, která protíná pevnou *rovinu* v *přímé čáře*. Probíhá-li *průsek* dvou ramen daných úhlů tuto *průsečnici*, popisuje *průsek* druhých dvou ramen kuželosečku. Točíme-li *rovinu* obou *úhlů* kolem *přímé*, jež spojuje jejich *vrcholy*, obdržíme pokaždé jinou kuželosečku. Geometrickým místem těchto kuželoseček jest *plocha druhého stupně*, která prochází oběma pevnými body. (*Nové*).

Jest dán pevný *bod* a dvě pevné *roviny*, které jím neprocházejí. V každé z nich pohybuje se *úhel* libovolné, však stálé velikosti. Oba mají společný *vrchol* na *průsečnici* obou pevných *rovin*. Prochází-li *rovina*, která je proložena dvěma jejich rameny, zároveň *přímou*, jež spojuje pevný bod s vrcholem, obaluje *rovina* druhých dvou ramen plochu kuželovou. Necháme-li probíhati *vrchol* (bod) obou úhlů (či kužele) *průsečnici* pevných *rovin*, obdržíme pokaždé jinou kuželovou plochu. Všecky tyto kuželové plochy obalují *plochu druhého stupně*, která se dotýká obou pevných rovin. (*Nové*).

Poučky tyto můžeme zevšeobecniti následovně:

Jest dána plocha 2. stupně a na ní dva pevné *body*; kolem každého z nich jakožto vrcholu točí se úhel libovolné avšak stálé velikosti. Oba se nalézají v *rovině* hybné, jež protíná pevnou plochu 2. stupně v kuželosečce, procházející oběma pevnými *body*. Probíhá-li *průsek* dvou ramen jinou kuželosečku, popisuje *průsek* druhých dvou ramen jinou kuželosečku, procházející taktéž oběma *vrcholy*. Točíme-li *rovinu* obou úhlů kolem přímé, jež spojuje tyto dva *vrcholy* (pevné body), obdržíme pokaždé jinou kuželosečku. Geometrickým místem těchto kuželoseček jest *plocha druhého stupně*, jež prochází oběma pevnými body. (*Nové*).

Jest dána plocha 2. stupně a dvě pevné *roviny*, které se jí dotýkají; v každé z nich pohybuje se úhel libovolné avšak stálé velikosti. Oba mají společný *vrchol* na průsečnici pevných *rovin*. Dotýká-li se *rovina*, která je proložena dvěma rameny těchto úhlů, zároveň dané pevné plochy 2. stupně, obaluje *rovina* druhých dvou ramen plochu kuželovou. Necháme-li probíhati *vrchol* obou úhlů průsečnici pevných *rovin*, obdržíme pokaždé jinou kuželovou plochu. Všecky tyto kuželové plochy obalují *plochu druhého stupně*, která se dotýká obou pevných rovin. (*Nové*).

Důkazy všech těchto pouček jsou velmi snadné.

Co jest geometrické místo pat kolmic, vedených z ohniska ellipsy, hyperboly a paraboly na tečny.

Napsal

V. Hübner v Rakovníce.

Rovnice tečné T, jejíž bod dotýčný $m = (x_1\, y_1)$ jest bodem ellipsy a souřadnice měnlivé $\xi\,\eta$, zní, jak známo,

$$a^2 y_1\, \eta + b^2 x_1\, \xi = a^2 b^2.$$

Z ohniska f_2, veďme $f_2\, n \perp T$ a pojmenujme souřadnice průsečíku n, $\xi\,\eta$ a úhel přímky $f_2\, n$ s osou x, α; pak jest (obr. 7.):