Vlastnosti trojin oskulačních na strophoidě.

Podává

Dr. K. Zahradník.

Bodem A na ose (X) vedená přímka nechť protíná osu (Y) v bodě B. Přímku tuto $\overline{AB}$ seče kružnice opsaná ze středu B poloměrem $\overline{BO}$ v bodech M, M' a místo takových bodů M je křivka racionální stupně třetího a jmenuje se *strophoida*. *)

Rovnice strophoidy je, píšeme-li $\overline{OA} = a$

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0.$$

Otočíme-li osy souřadnic o -45^0, berouce tečny bodu dvojnásobného za nové osy souřadnicové, nabude rovnice křivky tvaru:

$$(x + y)(x^2 + y^2) - 2\sqrt{2}\, a \,.\, x \,.\, y = 0, \tag{1}$$

již můžeme i nahraditi rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cu}{(1+u)(1+u^2)} \\ y &= \frac{cu^2}{(1+u)(1+u^2)}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

kdež je $c = 2\sqrt{2}\,.\,a$, u parametrem bodu u, totiž trigonometrická tangenta úhlu, jejž radius vector bodu u s positivnou osou X uzavírá t. j.

$$u = tg\,(UX).$$

2. Libovolný kruh protíná strophoidu mimo v imaginarných bodech kružných, jež oběma připadají, v dalších čtyřech bodech; parametry jejich obdržíme, stavíme-li souřadnice bodu strophoidy do rovnice kruhu jakožto kořeny bikvadratické rovnice vzhledem k u. Neb tři body určují již z úplna kruh, z té příčiny musí parametry bodů průsečných jisté relaci vyhověti, nezávislé na poloze a velikosti kruhu, podávající nám tím podmínku, kdy čtyři body strophoidy na jednom a témž kruhu

*) *Theorii strophoidy* podal jsem ve „*Zprávách o zasedáních král. spol. nauk*" 7—11, 1873, rozličné konstrukce strophoidy viz Grunert-Hoppe-ův Archiv f. Math. und Physik v pojednání mém: *Rationale Ebene der Curven dritter Ordnung*, Theil 56, 58, 59. Hlavně v dílu 59 pg. 18 Greifswald.

leží. Porovnáme-li koefficienty spomenuté výsledné bikvadratické rovnice, obdržíme ihned onu podmínečnou rovnici, totiž

$$u_1 u_2 u_3 u_4 = 1. \qquad (3)$$

Že z této relace celá řada vlastností strophoidy odvoditi se dá jakož i z podobné relace $u_1 u_2 u_3 = -1$, jež nám udává, kdy tři body strophoidy leží na přímce, na jiném místě *) jsme podali.

V případě, že je

$$u_2 = u_3 = u_4 = u,$$

obdržíme kruh oskulační v bodě u, jenž strophoidu ještě v jediném dalším bodě u_1 protíná. Bod u_1 jmenujeme sdruženým bodem bodu u.

Rovnice (3) v případě tomto přejde ve

$$u^3 u_1 = 1. \qquad (4)$$

Na základě této rovnice snadně můžeme sestrojiti bod sdružený u_1 dán-li je bod oskulační u. Souřadnice bodu u jsou $\overline{OA_0}$, $\overline{A_0 u}$, tudíž je:

$$u = \frac{\overline{A_0 u}}{\overline{OA_0}} = tg\,(UX).$$

Kolmice v bodě O na $\overline{Ou} = U$ protíná prodlouženo $\overline{uA_0}$ v bodě A_1.

Patrno je

$$\overline{A_0 A_1} = \frac{\overline{OA_0^2}}{\overline{uA_0}}.$$

Sestrojíme-li dále $\overline{A_1 A_2} \perp \overline{OA_1}$, $\overline{A_2 A_3} \perp \overline{A_1 A_2}$, obdržíme

$$\overline{A_0 A_2} = \frac{\overline{A_0 A_1}^2}{\overline{OA_0}} = \frac{\overline{OA_0}^3}{\overline{A_0 u^2}}$$

$$\overline{A_0 A_3} = \frac{\overline{A_0 A_2}^2}{\overline{A_1 A_0}} = \frac{\overline{OA_0}^4}{\overline{A_0 u^3}}.$$

Jest tudíž

$$\frac{\overline{A_0 A_3}}{\overline{OA_0}} = \frac{\overline{OA_0}^3}{\overline{A_0 u^3}} = \frac{1}{\left(\frac{\overline{A_0 u}}{\overline{OA_0}}\right)^3},$$

t. j.

*) l. c. pg. 13.

$$tg(U_1 X) = \frac{1}{tg^3(UX)},$$

aneb

$$u_1 = \frac{1}{u^3}.$$

Průsek přímky $U_1 = \overline{OA_3}$ se strophoidou je tudíž hledaný bod u_1, sdružený to bodu oskulačnímu u.

Při tom máme i konstrukci tangenty; jest totiž

$$\frac{\overline{A_0A_2}}{\overline{OA_0}} = \frac{1}{\left(\frac{\overline{A_0u}}{\overline{OA_0}}\right)^2} = \frac{1}{u^2}.$$

Naneseme-li nyní délku $\overline{A_0A_2}$ na prodloužené $\overline{A_0u}$ od bodu A_0 ve smyslu negativném, jest, uvážíme-li i směr:

$$-\frac{\overline{A_0A'_2}}{\overline{OA_0}} = \frac{1}{u^2}.$$

Spojnice $U' = \overline{A'_2O}$ určuje na strophoidě bod u', jemuž přísluší parametr u', i jest

$$u' = tg\,(U'X) = \frac{\overline{A_0A'_2}}{\overline{OA_0}} = -\frac{1}{u^2}.$$

V obrazci 1. vytknutá je obyčejná konstrukce tangenty, jež má platnost pro křivky třetího stupně vůbec.*)

Z rovnice (4) plynou pro u tři hodnoty, je-li u_1 dáno t. j. každým bodem strophoidy proložiti můžeme tři kruhy oskulační; *body oskulační těchto kruhů leží opět s bodem* u_1, *k němuž jsou přidruženy opět na jednom a témž kruhu.*

Každý bod strophoidy určuje tudíž trojinu bodů oskulačních na strophoidě; naopak každý bod trojiny určuje již oba

*) Konstrukce normály tím i tangenty bodu u strophoidy plyne nejjednodušeji z následující geometrické definice strophoidy: Probíhá-li jedno rameno Au_1 pravého úhlu Au_1B (obr. 2) vždy bodem pevným A (pol strophoidy), i opisuje-li bod B druhého ramene přímku (Y) předpokládaje, že je stále $\overline{u_1B} = \overline{AO}$, tož opisuje vrchol u_1 tohoto pravého úhlu strophoidu (neb je stále $CO = Cu_1$). Sestrojíme-li nyní v bodech A_1B na ramena pravého úhlu kolmice, jíž průsek je J, je $\overline{Ju_1}$ normala bodu u_1.

ostatní t. j. trojiny oskulační určují na strophoidě *kubickou involucí.*

Trojúhelník, jejž tvoří trojina oskulační, pojmenujeme trojúhelníkem oskulačním a týž určen je buď jedným vrcholem aneb bodem, k němuž je přidružen. Dva vrchole trojúhelníku tohoto jsou imaginárné, jeden je pouze realný t. j. libovolným bodem u_1 strophoidy můžeme pouze jediný reálný kruh oskulační proložiti, což ostatně ze tvaru rovnice (4) již plyne.

3. Na základě souvislosti kořenů rovnice s jejími koefficienty plyne z (4):

$$\Sigma u = 0, \; \Sigma u u = 0, \; u_1 u_2 u_3 = \frac{1}{u_1}. \tag{5}$$

Jest tudíž *)

$$\begin{aligned} \Sigma u^{3\lambda} &= \frac{3}{u^{\lambda}} \\ \Sigma (uu)^{3\lambda} &= \frac{3}{u^{2\lambda}} \\ \Sigma u^{k} = \Sigma (uu)^{k} &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

je-li $k \gtrless 3\lambda$, předpokládaje, že i k i λ jsou čísla celistvá. Místo u_1 u (6) stojí jednoduše u a i nadále tak učiníme, poněvadž pochybnost tím nevzniká.

Bude tudíž trojina oskulační $u_1 u_2 u_3$ sdružena k bodu u.

---

*) Je-li $f(u) = 0$, daná rovnice, u_r kořeny její, $f'(u)$ derivace od $f(u)$ je:

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{u - u_r}.$$

Jest však

$$\frac{1}{u - u_r} = \sum_{s=0} \frac{u_r^s}{u^{s+1}}$$

tudíž je:

$$\frac{u f'(u)}{f(u)} = n + \frac{\Sigma u_r}{u} + \frac{\Sigma u_r^2}{u^2} + \frac{\Sigma u_r^3}{u^3} + \dots \text{ in inf.} \tag{α}$$

Dále platí

$$\Sigma u_1^s u_2^s = \tfrac{1}{2} \left\{ [\Sigma u_r^s]^2 - \Sigma u_r^{2s} \right\} \dots \tag{β}$$

Relace (α) i (β) podávají nám pro případ $u^3 = \frac{1}{u_1}$ navedené rovnice (6).

Místo těžišť trojin oskulačních.

4. Označíme-li písmenem S těžiště trojiny oskulační $u_1 u_2 u_3$ sdružené k bodu u, souřadnice těžiště u α, β, je

$$
\begin{aligned}
3\alpha &= \sum_1^3 x_n = c \sum_1^3 \frac{u_n}{(1+u_n)(1+u_n^2)} \\
3\beta &= \sum_1^3 y_n = c \sum_1^3 \frac{u_n^2}{(1+u_n)(1+u_n^2)}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Vzhledem k rovnicím (5) i (6) jest:

$$
\begin{aligned}
&\prod_{n=1}^{3}(1+u_n)(1+u_n^2) = [1+u_1u_2u_3]\,.\,[1+u_1^2u_2^2u_3^2] = \frac{(1+u)(1+u^2)}{u^3} \\
&\Sigma u_1(1+u_2)(1+u_2^2)(1+u_3)(1+u_3^2) = \\
&\qquad = \Sigma u_1 [1-u_1+u_1u_2][1-u_1^2+u_2^2u_3^2] \\
&\Sigma u_1^2(1+u_2)(1+u_2^2)(1+u_3)(1+u_3^2) = \\
&\qquad = \Sigma u_1^2 [1-u_1+u_1u_2][1-u_1^2+u_2^2u_3^2]
\end{aligned} \tag{8}
$$

kdež jsme, upotřebivše relace (5), stavili

$$
\begin{aligned}
u_2 + u_3 &= -u_1 \\
u_2^2 + u_3^2 &= -u_1^2.
\end{aligned}
$$

Provedeme-li naznačené násobení a pak sčítání, obdržíme vzhledem k rovnicím (5) i (6)

$$
\begin{aligned}
\Sigma u_1 (1-u_1+u_2u_3)(1-u_1^2+u_2^2u_3^2) &= -\frac{3}{u^2} \\
\Sigma u_1^2 (1-u_1+u_2u_3)(1-u_1^2+u_2^2u_3^2) &= -\frac{3}{u}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Uvedeme-li nyní tyto hodnoty z rovnic (8) i (9) do rovnice (7), obdržíme, pokrativše na obou stranách společným činitelem 3:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{cu}{(1+u)(1+u^2)} \\
\beta &= -\frac{cu^2}{(1+u)(1+u^2)}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Těžiště trojiny oskulační, sdružené bodu u je tudíž bod symmetrický. S ohledem k dvojnému bodu t. j. spojnice $\overline{Su}$ půlí se v počátku souřadnic. Z té příčiny je patrno, že místo těžišť všech trojin oskulačních jest opět strophoida i to *kongruentní* s danou (obr. 3) pouze otočená okolo počátku souřadnic (totiž okolo dvojného bodu) o 180 stupňů.

Kruh opsaný trojúhelníku oskulačnímu.

5. Rovnice kruhu jdoucího třemi body (x_h, y_h) $h = 1, 2, 3$ zní:

$$(x^2+y^2)\,|x, y, 1| - x\,|x^2+y^2, y, 1| + y\,|x^2+y^2, x, 1| -$$
$$- |x^2+y^2, x, y| = 0.\text{*)} \qquad (11)$$

Jest však

$$|x, y, 1| = \left| \frac{cu}{(1+u)(1+u^2)}, \frac{cu^2}{(1+u)(1+u^2)}, 1 \right| =$$
$$= \frac{c^2}{\prod\limits_{h=1}^{3}(1+u_h)(1+u_h^2)} \,.\, |u, u^2, (1+u)(1+u^2)|.$$

Píšeme-li krátce, upotřebivše při tom rovnic (5)

$$\prod_{h=1}^{3}(1+u_h) = 1 + u_1 u_2 u_3 = A$$
$$\prod_{h=1}^{3}(1+u_h^2) = 1 + [u_1 u_2 u_3]^2 = B$$
$$|1, u, u^2| = \Delta$$

jest:

$$|x, y, 1| = \frac{c^2}{AB}\,|u, u^2, 1+u^3| = \frac{c^2\Delta}{B}.$$

Podobně obdržíme:

$$|x^2+y^2, y, 1| = \frac{c^3}{A^2B}\,|u^2, u^2(1+u), (1+u)^2(1+u^2)| =$$
$$= \frac{c^3}{A^2B}\,[\,|1, u^2, u^3| + 2\,.\,u_1u_2u_3\,|1, u, u^2| + u_1^2u_2^2u_3^2\,|1, u, u^2|\,] =$$
$$= \frac{c^3\Delta\,.\,u_1u_2u_3\,[2 + u_1u_2u_3]}{A^2\,.\,B},$$

jelikož je vzhledem k rovnicím (5)

$$|1, u^2, u^3| = \Sigma u_1 u_2\,.\,\Delta = 0.$$

Podobně je dále

---

*) K vůli krátkosti píšeme, jak nyní jest obyčejem,

$$|x, y, 1| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{podobně} \quad |u^p, u^q, u^r| = \begin{vmatrix} u_1^p, & u_1^q, & u_1^r \\ u_2^p, & u_2^q, & u_2^r \\ u_3^p, & u_3^q, & u_3^r \end{vmatrix};$$

$$|x^2+y^2, x, 1| = -\frac{c^3\Delta[1+2u_1u_2u_3]}{A^2 . B},$$

$$|x^2+y^2, x, y| = -\frac{c^4 u_1 u_2 u_3 . \Delta}{A^2 . B}.$$

Vsadíme-li hodnoty tyto do rovnice kruhu (11), obdržíme rovnici kruhu opsaného trojině oskulační, zkrátivše společným činitelem $\frac{c^2\Delta}{B}$, totiž:

$$x^2+y^2-\frac{c\,u_1u_2u_3\,[2+u_1u_2u_3]}{[1+u_1u_2u_3]^2}x-\frac{c\,(1+2\,u_1u_2u_3]}{[1+u_1u_2u_3]^2}y$$
$$+\frac{c^2u_1u_2u_3}{[1+u_1u_2u_3]^2}=0.$$

Do této rovnice máme ještě $u_1u_2u_3=\frac{1}{u}$ vsaditi, čímž obdržíme

$$x^2+y^2-c\frac{1+2u}{(1+u)^2}x-c\frac{(2+u)u}{(1+u)^2}y+\frac{c^2u}{(1+u)^2}=0 \qquad (12)$$

co hledanou rovnici kruhu opsaného trojině oskulační sdružené bodu u.

Místo středů kruhů opsaných trojinám oskulačním.

6. Souřadnice středu kruhu opsaného trojině oskulační plynou z rovnice (12), jsou̇t

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{c}{2}\cdot\frac{1+2u}{(1+u)^2}\\ \eta&=\frac{c}{2}\cdot\frac{(2+u)u}{(1+u)^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Ze tvaru rovnic (13) ihned shledáváme, že jest řečené místo kuželosečka i to parabola, poněvadž parametry úběžných bodů v jednu hodnotu splývají t. j. přímka úběžná jest tečnou kuželosečky.

Rovnici této paraboly obdržíme ve tvaru $f(\xi, \eta)=0$, vyloučíme-li z rovnic (13) proměnlivý parametr u. Jest totiž

$$\xi=\frac{c}{2}\left\{\frac{u}{(1+u)^2}+\frac{1}{1+u}\right\}$$

$$\eta=\frac{c}{2}\left\{\quad 1 \quad -\frac{1}{(1+u)^2}\right\}$$

Odečtením obou rovnic obdržíme:

$$\xi - \eta + \frac{c}{2} = \frac{c}{1+u}, \tag{14}$$

druhou však z předcházejících rovnic psáti můžeme též:

$$\xi - \frac{c}{2} = -\frac{1}{2}\frac{c}{(1+u)^2}. \tag{15}$$

Vyloučivše nyní z rovnic (14) i (15) $(1+u)$ jakožto neznámou, obdržíme:

$$\left(\xi - \eta + \frac{c}{2}\right)^2 + 2c\left(\eta - \frac{c}{2}\right) = 0,$$

kteroužto rovnici též psáti můžeme:

$$(\xi - \eta)^2 + c(\xi + \eta) - \frac{3c^2}{4} = 0. \tag{16}$$

Vezmeme-li nyní za osu X přímku

$$\xi - \eta = 0,$$

za osu Y přímku

$$\xi + \eta = 0,$$

přejde rovnice (16) v této nové soustavě souřadnicové ve

$$y^2 - \frac{c}{\sqrt{2}}x - \frac{3c^2}{8} = 0.$$

Pošineme-li rovnoběžně osu pořadnic o

$$x_1 = \frac{2c}{4\sqrt{2}}$$

ve směru positivném, obdržíme

$$y^2 = -\frac{c}{\sqrt{2}}x = -2ax$$

co rovnici paraboly (obr. 4.) místa to středů kruhů opsaných trojinám oskulačním, vztažené na osy $X'Y'$. Pol A dané strophoidy jest ohnisko paraboly. Nyní můžeme i sestrojiti kruh opsaný trojině oskulační sdružené k danému bodu u. Sestrojme nejdříve bod oskulační u_1 realného kruhu oskulačního, jdoucího bodem u. Body oskulační u_2, u_3 obou ostatních kruhů oskulačních jdoucích bodem u jsou imaginárné. Jelikož kruh jdoucí trojinou oskulační u_1, u_2, u_3 též bodem sdruženým u probíhá, je $\overline{uu_1}$ tětiva kruhu opsaného trojině oskulační. Kolmice ve středu tětivy $\overline{uu_1}$ vztýčená jde středem C kruhu opsaného, jenž leží na parabole. Jest tudíž C průsek kolmice sestrojené ve středu tětivy $\overline{uu_1}$ s parabolou (16).

Kolmice zmíněná protíná sice parabolu ve dvou bodech, a který z průseků je příslušný střed C, patrno ihned z rovnic (13); dokud je u positivno t. j. bodům kličky [ξ, η je positivno] přísluší tudíž onen díl paraboly, jenž současně s kličkou v témž úhlu tangent dvojného bodu leží, tedy mezi $+X$ i $+Y$, atd.

Obálka kruhů opsaných trojinám oskulačním.

7. Našli jsme co rovnici kruhu opsaného trojině oskulační (12):

$$k \equiv (x^2+y^2)(1+u)^2 - c(1+2u)x - cu(2+u)y + c^2u = 0. \quad (18)$$

V rovnici této vyskytuje se proměnlivý parametr u, se kterým se kruh mění i vzhledem na polohu i vzhledem na rozměr. Pobybuje-li se bod u po strophoidě, zahaluje kruh k určitou křivku, jížto rovnici obdržíme jakožto diskriminant rovnice (18) vzhledem k parametru u. Srovnáme-li rovnici (18) podle u, obdržíme

$$u^2(x^2+y^2-cy) - 2u\left(x^2+y^2-cx-cy+\frac{c^2}{2}\right) + \\ + (x^2+y^2-cx) = 0,$$

tudíž je hledaný diskriminant:

$$(x^2+y^2-cy)(x^2+y^2-cx) - \left(x^2+y^2-cx-cy+\frac{c^2}{2}\right)^2 = 0$$

aneb

$$(x^2+y^2-cy)(x^2+y^2-cx) - \left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{c}{2}\right)^2\right]^2 = 0 \ (19).$$

Pošineme-li rovnoběžné osy souřadnic, berouce bod $\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$ za nový počátek souřadnic, obdržíme po krátké redukci

$$(x+y)(x^2+y^2) - cxy = 0. \quad (20)$$

Z rovnice této shledáváme, že jest *obálka kruhů opsaných trojinám oskulačním opět strophoida* i to kongruentná s danou, pouze pošinutá ve směru osy souměrnosti o $2a$ ve směru positivném (obr. 4).

Euler-ova přímka trojin oskulačních.

8. Jelikož již známe těžiště $S(\alpha, \beta)$ trojiny oskulační, jakož i střed $C(\xi, \eta)$ kruhu trojině této opsaného, můžeme ihned napsati souřadnice průseku výšek $H(\alpha', \beta')$ trojúhelníku oskulačního, jakož středu $C'(\xi' \eta')$ kruhu, jdoucího středy stran tohoto trojúhelníku, totiž kruhu *Feuerbacha.**)

Jest totiž:

$$(CC'SH) = -1,$$

i snadně se dokáže, že je: **)

$$\frac{CC'}{SC'} = 3, \quad \frac{CH}{SH} = \frac{3}{2}.$$

Označíme-li α', β' souřadnice průseku výšek H, i ξ' η' souřadnice středu kruhu Feuerbachova je:

$$H \begin{cases} \alpha' = 3\alpha - 2\xi \\ \beta' = 3\beta - 2\eta \end{cases} \tag{22}$$

$$C' \begin{cases} \xi' = \dfrac{3\alpha - \xi}{2} \\ \eta' = \dfrac{3\beta - \eta}{2}. \end{cases} \tag{23}$$

Do těchto rovnic třeba jen uvésti hodnoty za α, β, ξ, η z rovnic (10) i (13), čímž bychom bezprostředně obdrželi rovnice místa bodů H i místa bodů C'. Nu můžeme věc tuto obecněji pojmouti i položiti si otázku, jakou křivku opisuje bod M, jenž dělí vzdálenost těžiště od středu kruhu opsaného trojině oskulační v daném pevném poměru, to jest, by stále bylo

---

*) *Feuerbach*: Das geradlinige Dreieck 1822 pg. 55.

**) Body H, S, C leží na téže přímce, i to tak, že platí $\frac{HS}{CS} = -2 \ldots (\alpha)$. Přímka tato žove se *Euler*-ovou přímkou, jenž tuto vlastnost bodů H, S, C trojúhelníku prvý dokázal 1765 ve Nov. Comm. Petrop. XI. pg. 14., jak Dr. R. Baltzer ve: „Elemente der Mathematik 2. Bd. 4. Aufl. Leipzig 1874 pg. 91, současně s více poznámkami historickými podotýká. Na přímce Eulerově leží střed C' Feuerbachova kruhu, jenž s bodem C délku HS harmonicky dělí. Jest tudíž

$$(CC'SH) = -1 \ldots (\beta).$$

Z relac (α) i (β) plyne:

$$\frac{SC'}{CC'} = \frac{1}{3}, \quad \frac{SH}{CH} = \frac{2}{3}, \quad \frac{CS}{C'S} = -2.$$

$$\frac{CM}{SM} = \lambda.$$

Souřadnice bodu M jsou v tomto případě

$$x = \frac{\xi - \lambda \alpha}{1 - \lambda}$$

$$y = \frac{\eta - \lambda \beta}{1 - \lambda},$$

aneb dosadíme-li hodnoty za ξ, η, α, β:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{c}{2(1-\lambda)} \cdot \frac{(1+2u)(1+u^2)+2\lambda u(1+u)}{(1+u)^2(1+u^2)} \\ y &= \frac{cu}{2(1-\lambda)} \cdot \frac{(2+u)(1+u^2)+2\lambda u(1+u)}{(1+u)^2(1+u^2)}. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Z rovnic těchto vysvítá, že každý bod M, jenž dělí vzdálenost $\overline{CS}$ v daném pevném poměru λ, křivku racionální čtvrtého stupně opisuje, jdoucí imaginarnými body kružnými i dotýkající se přímky úběžné.

Ješto však ani čitatel ani jmenovatel není s $(1+u)$ neb $(1+u^2)$ děliv za nižádnou hodnotu pro λ vyjma $\lambda = 0$ i $\lambda = \infty$, což nám body C a S dává, tož patrno, že body H i C' křivky racionálné stupně čtvrtého opisují, jejichž rovnice ze (24) obdržíme, píšíce $\lambda = \frac{3}{2}$ pro bod H, a $\lambda = 3$ pro bod C'.

Spojnice $\overline{CS}$, již body H, C' harmonicky dělí, jmenuje se přímkou *Euler*-ovou trojúhelníka; rovnice jeho je:

$$E \equiv \begin{vmatrix} x & y & c \\ 1+2u, & u(2+u) & 2(1+u)^2 \\ u & u^2 & -(1+u)(1+u^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

Každému bodu u strophoidy, přísluší určitá přímka E_u jakožto Eulerova přímka trojúhelníku oskulačního. Jelikož se parametr u v rovnici přímky v pátém stupni vyskytuje, plyne, že každým bodem roviny strophoidy pět takových přímek E probíhá, t. j. obálka Eulerových přímek trojin oskulačních na strophoidě jest racionalna křivka páté třídy i stupně osmého. Rovnici obálky v souřadnicích rovnoběžných podává nám diskriminant rovnice (25) vzhledem ku parametru u, položíme-li jej roveň nulle. *)

---

*) Pojednání toto vyšlo ve „Radu jugosl. akademije" kniha 53.