Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Hübner

Co jest geometrické místo pat kolmic, vedených z ohniska ellipsy, hyperboly a paraboly na tečny

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 10 (1881), No. 5, 278--280

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109378

Poučky tyto můžeme zevšeobecniti následovně:

Jest dána plocha 2. stupně a na ní dva pevné *body*; kolem každého z nich jakožto vrcholu točí se úhel libovolné avšak stálé velikosti. Oba se nalézají v *rovině* hybné, jež protíná pevnou plochu 2. stupně v kuželosečce, procházející oběma pevnými *body*. Probíhá-li *průsek* dvou ramen jinou kuželosečku, popisuje *průsek* druhých dvou ramen jinou kuželosečku, procházející taktéž oběma *vrcholy*. Točíme-li *rovinu* obou úhlů kolem přímé, jež spojuje tyto dva *vrcholy* (pevné body), obdržíme pokaždé jinou kuželosečku. Geometrickým místem těchto kuželoseček jest *plocha druhého stupně*, jež prochází oběma pevnými body. (Nové).

Jest dána plocha 2. stupně a dvě pevné *roviny*, které se jí dotýkají; v každé z nich pohybuje se úhel libovolné avšak stálé velikosti. Oba mají společný *vrchol* na průsečnici pevných *rovin*. Dotýká-li se *rovina*, která je proložena dvěma rameny těchto úhlů, zároveň dané pevné plochy 2. stupně, obaluje *rovina* druhých dvou ramen plochu kuželovou. Necháme-li probíhati *vrchol* obou úhlů průsečnici pevných *rovin*, obdržíme pokaždé jinou kuželovou plochu. Všecky tyto kuželové plochy obalují *plochu druhého stupně*, která se dotýká obou pevných rovin. (Nové).

Důkazy všech těchto pouček jsou velmi snadné.

Co jest geometrické místo pat kolmic, vedených z ohniska ellipsy, hyperboly a paraboly na tečny.

Napsal

V. Hübner v Rakovníce.

Rovnice tečné T, jejíž bod dotýčný $m = (x_1\, y_1)$ jest bodem ellipsy a souřadnice měnlivé $\xi\, \eta$, zní, jak známo,

$$a^2 y_1\, \eta + b^2 x_1\, \xi = a^2 b^2.$$

Z ohniska f_2, veďme $f_2\, n \perp T$ a pojmenujme souřadnice průsečíku n, $\xi\, \eta$ a úhel přímky $f_2\, n$ s osou x, α; pak jest (obr. 7.):

$$\xi = k \cos \alpha + e \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$\eta = k \sin \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

a $f_2 n = k$ (vzdálenost bodu $f_2 = (e\,0)$ od přímky T)

$$= \pm \frac{b^2 x_1 e - a^2 b^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} \quad \ldots \ldots (3)$$

Zdvojmocníme-li rovnice (1) — (2) a sečteme-li je pak, dostaneme:

$$\xi^2 + \eta^2 = k^2 \cos^2 \alpha + 2ek \cos \alpha + k^2 \sin^2 \alpha = k^2 + 2\,ek \cos \alpha + e^2 \ldots (4)$$

Do této rovnice dosaďme za k hodnotu z rovnice (3) se znamením dolním, a za $\cos \alpha$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} = \frac{b^2 x_1}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} \text{ *)}$$

i obdržíme:

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{b^4 (x_1 e - a^2)^2}{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2} - 2\,eb^2 \frac{x_1 e - a^2}{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2} b^2 x_1 + e^2.$$

Položíme-li

$$a - \frac{e x_1}{a} = r_2 \text{ a } a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2 = a^2 b^2 r_1 r_2 \text{ **)},$$

vyjde:

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{a^2 b^4 r_2^2 + 2ab^4 e r_2 x_1}{a^2 b^2 r_1 r_2} + e^2 = \frac{ab^2 r_2 + 2b^2 e x_1 + ae^2 r_1}{a r_1};$$

a dosadíme-li ještě $r_2 = 2a - r_1$ a $a + \frac{e x_1}{a} = r_1$ do této rovnice, vyvodíme:

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{ab^2 r_1 + ae^2 r_1}{a r_1} = b^2 + e^2 = a^2 \quad . \; . \; (5)$$

Z rovnice (5) je vidno, že geometrické místo pat kolmic, vedených z ohniska ellipsy na tečny, kružnice soustředná, jejíž průměr rovná se velké ose.

Podobně najdeme, vyměníme-li $+b^2$ za $-b^2$, že i při hyperbole jest hledané místo kružnice soustředná, jejíž průměr rovná se ose realní. *)

---

*) $tg\,\alpha$ (směrnice normály) $= \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$.

**) r_1, r_2 délky obou průvodičů.

***) Vedeme-li z ohniska hyperboly tečné k této kružnici, poznáme, že tyto tečny stojí kolmo na asymptotách; neboť směrnice asymptot

Při parabole, jejíž parametr znamenáme p, bude, ponecháme-li jinak totéž poznamenání:

rovnice tečné $\eta y_1 - p\xi - p x_1 = 0$,

$$\xi = K \cos\alpha + \frac{p}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

$$\eta = k \sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

a

$$k = \pm \frac{-\frac{p^2}{2} - p x_1}{\sqrt{p^2 + y_1^2}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

Dosadíme-li do rovnice (I) za k hodnotu z rovnice (III) (positivní) a $\cos\alpha = \frac{p}{p^2 + y_1}$, dostaneme:

$$\xi = \frac{-\frac{p^2}{2} - p x_1}{\sqrt{p^2 + y_1^2}} \cdot \frac{p}{\sqrt{p^2 + y_1^2}} + \frac{p}{2} = \frac{p}{2} - \frac{p^2\left(\frac{p}{2} + x_1\right)}{p^2 + y_1^2};$$

známo, že

$$p^2 + y_1^2 = 2pr \text{ a } x_1 + \frac{p}{2} = r \ (r = \text{délka průvodiče}),$$

pročež

$$\xi = \frac{p}{2} - \frac{p^2 r}{2pr} = 0,$$

což jest rovnice osy y-ové.

Z toho jde, že tu hledané místo jest přímka, kteráž prochází vrcholem a stojí na ose paraboly kolmo.

Shrneme-li všechny tyto výsledky v jedno, poznáváme, že geometrické místo pat kolmic vedených z ohnisek křivek stupně druhého na tečny, jest kružnice, jejíž střed nalezá se ve středu křivky; že však parabola má střed svůj v nekonečné vzdálenosti, přechází tu kružnice v přímku kolmou na osu paraboly.

Na těchto vlastnostech zakládá se známé zobrazování ellipsy, hyperboly a paraboly co obalné čáry tečen jejich!

---

jsou, jak známo, $+\frac{b}{a}$, $-\frac{b}{a}$ a směrnice tečen, jak lze se přesvědčiti: $-\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b}$. Přímky, které prochází středem hyperboly a body dotyčnými oněch tečen jsou, jak patrno, asymptoty.