Vilém Jung

Několik analytických studií o plochách mimosměrek (zborcených). [V.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 6, 316--320

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109376`

ním vlhoměru ku předvídání mrazů, řka: „Mráz noční nedostaví se, když bod orosení nad 0° leží, jest pak k očekávání, leží-li bod orosení pod bodem mrazu (0°); jeť tedy zapotřebí, stanoviti bod orosení v dobu, kdy vyzařování noční počíná, tedy po západu slunce."

Několik analytických studií o plochách mimosměrek (zborcených).

Podává

Vilém Jung,

s. professor při státní průmyslové škole v Brně.

10. *Souhrnem přímek, protínajících tři mimoběžky, určena jest plocha mimosměrek 2-ho stupně.*

Buďtež dány přímky P, Q, R rovnicemi

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{P}=0 \\ p=0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} \mathrm{Q}=0 \\ q=0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} \mathrm{R}=0 \\ r=0 \end{matrix}\right\};$$

P_k, Q_k, R_k, p_k, q_k, r_k pro $k=1, 2, 3, 4$ jsou konstanty.

Libovolnou přímku protínající dané tři přímky P, Q, R obdržíme, stanovíme-li průsečnici roviny, obsahující bod $(x_1y_1z_1)$ přímky P a přímku Q, s rovinou, obsahující týž bod $(x_1y_1z_1)$ a přímku R.

Znamenejž

$$^1\mathrm{Q}=\mathrm{Q}(x_1y_1z_1), \quad {}^1q=q(x_1y_1z_1);$$
$$^1\mathrm{R}=\mathrm{R}(x_1y_1z_1), \quad {}^1r=r(x_1y_1z_1).$$

Hledaná přímka jest pronikem rovin, jichž rovnice jsou:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{Q} & ^1\mathrm{Q} \\ q & ^1q \end{vmatrix}=0, \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{R} & ^1\mathrm{R} \\ r & ^1r \end{vmatrix}=0. \qquad \text{(II)}$$

Vyloučíme-li z obou rovnic veličiny y_1 z_1 pomocí rovnic:

$$\mathrm{P}(x_1y_1z_1)=0, \quad p(x_1y_1z_1)=0,$$

a zavedeme-li označení:

$$\Sigma \pm (Q_1 P_2 p_3) = \alpha, \qquad \Sigma \pm (q_1 P_2 p_3) = \beta,$$

$$\Sigma \pm (Q_4 P_2 p_3) = \begin{vmatrix} Q_4 & Q_2 & Q_3 \\ P_4 & P_2 & P_3 \\ p_4 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = \alpha_1,$$

$$\Sigma \pm (q_4 P_2 p_4) = \beta_1,$$

$$\Sigma \pm (R_1 P_2 p_3) = \gamma, \qquad \Sigma \pm (r_1 P_2 p_3) = \delta,$$

$$\Sigma \pm (R_4 P_2 p_3) = \gamma_1, \qquad \Sigma \pm (r_4 P_2 p_3) = \delta_1,$$

obdržíme jakožto rovnice povrchové přímky, určené parametrem x_1:

$$\begin{vmatrix} Q, & \alpha x_1 + \alpha_1 \\ q, & \beta x_1 + \beta_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} R, & \gamma x_1 + \gamma_1 \\ r, & \delta x_1 + \delta_1 \end{vmatrix} = 0,$$

čili

$$\begin{vmatrix} Q & \alpha_1 \\ q & \beta_1 \end{vmatrix} + x_1 \begin{vmatrix} Q & \alpha \\ q & \beta \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} R & \gamma_1 \\ r & \delta_1 \end{vmatrix} + x_1 \begin{vmatrix} R & \gamma \\ r & \delta \end{vmatrix} = 0,$$

kteréžto rovnice možno psáti ve stručné formě:

$$A + x_1 B = 0$$
$$a + x_1 b = 0,$$

při čemž mají A, B; a, b známý význam (viz odst. 5.).

Parametr x_1 se tu vyskytuje v obou rovnicích linearně, pročež jest hledaná plocha 2-ho stupně, jejíž rovnici v rozvinutém tvaru snadno určíme.

11. *Asymptotické roviny plochy mimosměrek 2-ho stupně procházejí jediným bodem, obalujíce asymptotickou plochu kuželovou druhého stupně, jejíž střed jest ve středu plochy mimosměrek. Hyperboloid jednodílný. Hyperbolický paraboloid.*

Plocha mimosměrek 2-ho stupně jest dána soustavou rovnic:

$$\left.\begin{aligned} A + tB &= 0 \\ a + tb &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{I}$$

Tečná rovina v bodě (xyz) přímky (t) má rovnici:

$$\begin{vmatrix} A + tB, & B(xyz) \\ a + tb, & b(xyz) \end{vmatrix} = 0,$$

tuto ale možno psáti ve formě

$$\begin{vmatrix} A(\xi\eta\zeta), & B(xyz) \\ a(\xi\eta\zeta), & b(xyz) \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} B(\xi\eta\zeta), & B(xyz) \\ b(\xi\eta\zeta), & b(xyz) \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(II)}$$

Ježto ale

$$A(xyz) + tB(xyz) = 0,$$
$$a(xyz) + tb(xyz) = 0,$$

jest

$$t = -\frac{A(xyz)}{B(xyz)} = -\frac{a(xyz)}{b(xyz)},$$

tak že možno (II) psáti ve formě:

$$\begin{vmatrix} A(\xi\eta\zeta), & B(xyz) \\ a(\xi\eta\zeta), & b(xyz) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A(xyz), & B(\xi\eta\zeta) \\ a(xyz), & b(\xi\eta\zeta) \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(III)}$$

Pro rovinu asymptotickou jest $x = \infty$, $y = \infty$, $z = \infty$; $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ však jsou hodnoty určité a konečné.

Dělíme-li levou stranu rovnice (III) veličinou $z = \infty$ a zavedeme-li označení

$$\begin{vmatrix} A_k & B_i \\ a_k & b_i \end{vmatrix} = \varrho_{ki},$$

obdržíme:

$$\begin{aligned} &[(\varrho_{11}+\varrho_{11})\xi + (\varrho_{12}+\varrho_{21})\eta + (\varrho_{13}+\varrho_{31})\zeta + (\varrho_{14}+\varrho_{41})]\frac{x}{z} \\ &+ [(\varrho_{21}+\varrho_{12})\xi + (\varrho_{22}+\varrho_{22})\eta + (\varrho_{23}+\varrho_{32})\zeta + (\varrho_{24}+\varrho_{42})]\frac{y}{z} \qquad \text{(IV)} \\ &+ [(\varrho_{31}+\varrho_{13})\xi + (\varrho_{32}+\varrho_{23})\eta + (\varrho_{33}+\varrho_{33})\zeta + (\varrho_{34}+\varrho_{43})] = 0, \end{aligned}$$

jakožto rovnici asymptotické roviny pro přímku (t), při čemž:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} A_2 + tB_2, & A_3 + tB_3 \\ a_2 + tb_2, & a_3 + tb_3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} A_3 + tB_3, & A_1 + tB_1 \\ a_3 + tb_3, & a_1 + tb_1 \end{vmatrix}}$$
$$= \frac{z}{\begin{vmatrix} A_1 + tB_1, & A_2 + tB_2 \\ a_1 + tb_1, & a_2 + tb_2 \end{vmatrix}}.$$

Rovnice (IV) znamená, že veškeré asymptotické roviny procházejí bodem XYZ, určeným rovnicemi:

$$\left.\begin{aligned} (\varrho_{11}+\varrho_{11})X + (\varrho_{12}+\varrho_{21})Y + (\varrho_{13}+\varrho_{31})Z + (\varrho_{14}+\varrho_{41}) = 0 \\ (\varrho_{21}+\varrho_{12})X + (\varrho_{22}+\varrho_{22})Y + (\varrho_{23}+\varrho_{32})Z + (\varrho_{24}+\varrho_{42}) = 0 \\ (\varrho_{31}+\varrho_{13})X + (\varrho_{32}+\varrho_{23})Y + (\varrho_{33}+\varrho_{33})Z + (\varrho_{34}+\varrho_{43}) = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(V)}$$

Determinant této soustavy zní:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varrho_{11}+\varrho_{11}, & \varrho_{12}+\varrho_{21}, & \varrho_{13}+\varrho_{31} \\ \varrho_{21}+\varrho_{12}, & \varrho_{22}+\varrho_{22}, & \varrho_{23}+\varrho_{32} \\ \varrho_{31}+\varrho_{13}, & \varrho_{32}+\varrho_{23}, & \varrho_{33}+\varrho_{33} \end{vmatrix}.$$

Rozvinutá rovnice plochy, určené soustavou (I), však zní

$$\begin{aligned} F = \varrho_{11}x^2 + \varrho_{22}y^2 + \varrho_{33}z^2 + (\varrho_{12}+\varrho_{21})xy + (\varrho_{23}+\varrho_{32})yz \\ + (\varrho_{31}+\varrho_{13})zx + (\varrho_{14}+\varrho_{41})x + (\varrho_{24}+\varrho_{42})y \\ + (\varrho_{34}+\varrho_{43})z + \varrho_{44} = 0. \qquad \text{(VI)} \end{aligned}$$

Středem plochy 2-ho stupně nazývá se bod, jenž půlí veškeré tětivy plochy, jím procházející.

Dle této definice určen jest střed plochy rovnicemi:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Avšak rovnice soustavy (V) shodují se vzhledem ku rovnici (VI) s těmito podmínkami, pročež jest bod, jímž veškeré asymptotické roviny plochy procházejí, středem plochy.*)

Rovnici (IV) asymptotické roviny lze stručně napsati ve formě

$$K + tL + t^2M = 0, \qquad \text{(VII)}$$

značí-li K, L, M linearné polynomy proměnných ξ, η, ζ.

Derrivováním rovnice (VII) dle t plyne:

$$L + 2tM = 0. \qquad \text{(VIII)}$$

Rovnici asymptotické plochy obalové obdržíme, vyloučíme-li z rovnic (VII) a (VIII) parametr t, tak že máme:

$$4KM - L^2 = 0,$$

kteráž jest ohledně proměnných ξ, η, ζ stupně druhého.

Dle toho, má-li plocha mimosměrek 2-ho stupně svůj střed v konečnu nebo nekonečnu, rozeznáváme dva druhy těchto ploch.

Má-li totiž střed v konečnu, nazývá se *jednodílným hyperboloidem*; má-li jej v nekonečnu, nazývá se *hyperbolickým paraboloidem.*

---

*) O plochách 2-ho stupně platí vůbec věta: Tečné roviny, dotýkající se plochy 2-ho stupně v bodech úběžných, procházejí jeho středem. Důkaz její lze snadno provésti, což zde pomíjíme.

Soustava (I) znamená tehdy *hyperbolický paraboloid*, když $\Delta = 0$; jinak znamená *jednodílný hyperboloid*.

Věta o asymptotické ploše kuželové platí doslovně o *hyperboloidu*; vzhledem ku *paraboloidu* se poněkud modifikuje.

Úlohy.

Řešení úlohy 25.

Střed O daného kruhu budiž počátkem a OA osou X pravoúhlé soustavy souřadnic. Tečna kruhu v bodu D nechť protíná osu X v bodu B a tečnu bodu A v C. V trojúhelníku pravoúhlém ABC jest AM medianou, tedy

$$\sphericalangle \mathrm{ABM} = \mathrm{BAM} = \varphi,$$

a v trojúhelníku pravoúhlém BOD

$$\sphericalangle \mathrm{BOD} = 90 - \varphi.$$

Tečna BD a přímka AM mají rovnice

$$y \cos\varphi + x \sin\varphi = r,$$

$$y \cos\varphi - (x - r) \sin\varphi = 0.$$

Z rovnic těchto jest nám φ vyloučiti, výsledek eliminace jest rovnicí geom. místa bodu M. Řešením rovnic zmíněných obdržíme

$$\sin\varphi = \frac{r}{2x - r}, \quad \cos\varphi = \frac{r(x - r)}{y(2x - r)},$$

a dle vzorce $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$,

jest $r^2 (x - r)^2 = 4xy^2 (x - r)$.

Z rovnice této plyne dále

$$x - r = 0,$$

$$y^2 = \frac{r^2 (x - r)}{4x}.$$

Rovnice předposlední náleží tečně AC, a rovnice poslední vyjadřuje, že geom. místem bodu M jest křivka stupně třetího, dotýkající se kružnice dané ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka a mající své asymptoty v přímkách $x = 0$, $y = \pm \frac{r}{2}$.

Sestrojení tečny. Rychlosť bodu M lze rozložiti: 1. v rychlosť pošinutí ve směru AM a rychlosť úhlovou (cirkulační) kolem bodu A; 2. v rychlosť pošinutí ve směru DM a rychlosť úhlo-