Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Schuster
Příspěvky k nauce o čtyřstěnu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 173--191

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109371

Dans cette formule B_{ξ, n_i} est un nombre auxiliaire qu'on calcule simplement à l'aide de la formule (11). Le second terme du deuxième membre donne la correction, qui peut, dans certains cas, être supérieure au premier membre. La formule (14) se prête bien, vu sa forme simple, à des calculs collectifs.

Příspěvky k nauce o čtyřstěnu.

Napsal Dr. *Jan Schuster* v Praze.

1. Nedávno vydaná práce Rudolfa Sturma „Über das grösste Tetraeder, wenn die Inhalte der Flächen gegeben sind" (J. für die reine und angew. Math. (Crelle) 1922, Bd. 152, str. 90. násl.) je podnětem k této publikaci. Sturm vychází z pojednání v Baltzerových „Elemente" a „Determinanten" a užívá jako pomůcek cosinů v rožném sinu a čtyřúhelníku přidruženého ke stěnám čtyřstěnu.

Při svých úvahách se přidržím výhradně svých method početních, obsažených jednak v „Einige Bemerkungen über das Tetraeder," Zeitschr. für d. Realschulw. 1917. XLII, jíž cituji jako I, jednak v práci „O čtyřstěnu největšího obsahu, v němž dány velikosti stěn", Rozpravy Akademie v Praze ročník XXVII., č. 30. z r. 1918; cituji jako II.

Pokud se týče Sturmova tvrzení (l. c. § 3.), že při daných velikostech stěn jsou protější úhly stěnové spolu vázány, odkazuji na II. rov. (*b*), kde odvozeno obecně.

V 1. odst. se zabývá Sturm čtyřstěnem maximálním, kde

$$\triangle^2_4 = \triangle^2_1 + \triangle^2_2 + \triangle^2_3.$$

Tento případ je trivialní řešení mých rovnic II (3), neboť se splní pro

$$x = B + C,\quad y = C + A,\quad z = A + B,$$

z čehož

$$A + B + C = \frac{K}{2} \text{ a } \varphi = -(BC + CA + AB) = -\frac{1}{2}\left(\frac{K^2}{4} - E\right).$$

Dle II (9) se rovnice I (10) vyloučením příslušného kořenového činitele sníží na

$$9\varphi^3 - \varphi\left(\frac{15}{2}E + \frac{K}{8}\right) + \varphi\left\{\frac{7}{4}\left(\frac{K^2}{4} - E\right)^2 - 6K\sqrt{g}\right\} +$$
$$+ \left(\frac{K^2}{4} - E\right)\left\{\left(\frac{K^2}{4} - E\right)^2 \frac{1}{8} - K\sqrt{g}\right\} = 0,$$

neboť $$F = \frac{1}{4}\left(\frac{K^2}{4} - E\right)^2 - K\sqrt{g}.$$

Definice veličin $ABCK$ ze II nám dají:

$$\frac{1}{8}(-\triangle^2_1 - \triangle^2_2 - \triangle^2_3 + 3\triangle^2_4) = \frac{1}{8}(\triangle^2_1 + \triangle^2_2 + \triangle^2_3 + \triangle^2_4),$$

neboli $\triangle^2_1 + \triangle^2_2 + \triangle^2_3 = \triangle^2_4$, jakož svrchu vytčeno.

Že jde o maximum absolutní, dokázal jsem ve II nerovností (8). Že při maximu jde o čtyřstěn kolmohranný, dokážu následovně:

2. Podmínka kolmohrannosti se ve hranách vyjadřuje rovnicemi

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2 \tag{1}$$

čili dle I (9):

$$M_{14} + M_{23} = M_{24} + M_{31} = M_{34} + M_{12}, \tag{2}$$

což lze dle I (4) přepsat na

$$M_{14} = -(\triangle^2_1 - \triangle^2_4)^2 + 8x(\triangle^2_1 + \triangle^2_4) - 16x^2$$

a dle (II)

$$M_{14} = -16(B + C)^2 + 8x(\triangle^2_1 + \triangle^1_4) - 16x^2.$$

Podobně

$$M_{23} = -16(B - C)^2 + 8x(\triangle^2_2 + \triangle^2_3) - 16x^2,$$

z čehož dle II (1):

$$\begin{aligned} x^2 - xK + B^2 + C^2 = y^2 - Ky + C^2 + \\ + A^2 = z^2 - Kz + A^2 + B^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Ale dle II (1) je

$$x^2 - Kx = x(x - K) = -x(y + z),$$

takže je první část ve (3), užijeme-li ještě II (3),

$$-x(y+z) + B^2 + C^2 = -B^2 - C^2 + 2\varphi + B^2 + C^2 = 2\varphi,$$

a nezávisí na x, y, z, čímž dokázána stejnost výrazů (3) u čtyřstěnu maximálního a jeho kolmohrannost.

Touž podmínku však můžeme odvodit jinak. Buďte $(\lambda_1\, \mu_1\, \nu_1\, \xi_1)$ a $(\lambda_4\, \mu_4\, \nu_4\, \xi_4)$ souřadnice pat výšek na stěnách $\triangle_1$ a $\triangle_4$. Pak platí:

$$\lambda_1 : \mu_1 : \nu_1 : \xi_1 = 0 : \triangle_2 \cos\gamma' : \triangle_3 \cos\beta' : \triangle_4 \cos\alpha$$
$$\lambda_4 : \mu_4 : \nu_4 : \xi_4 = \triangle_1 \cos\alpha : \triangle_2 \cos\beta : \triangle_3 \cos\gamma : 0.$$

Oba střední členy na pravo musí býti v témž poměru, takže obecně platí:

$$\cos\alpha\cos\alpha' = \cos\beta\cos\beta' = \cos\gamma\cos\gamma'. \qquad (4)$$

Znásobme číslem 4 $\triangle_1\,\triangle_2\,\triangle_3\,\triangle_4$ a užijme rovnic I (1). Pro první člen pak obdržíme:

$$(\triangle^2_1 + \triangle^2_4 - 4x)(\triangle^2_2 + \triangle^2_3 - 4x) =$$
$$= (2K + 4A - 4x)(2K - 4A - 4x).$$

Když pak číslem 16 ve (4) zkrátíme a označíme ψ společnou hodnotu ve (4), přejde první člen v

$$x^2 - Kx - A^2 - \frac{1}{4}K^2 = \psi \qquad (5)$$

a dle II (1) jako nahoře

$$-xy - xz - A^2 + \frac{1}{4}K^2 = \psi$$

nebo $$-B^2 - C^2 - A^2 + \frac{1}{4}K^2 + 2\varphi = \psi. \qquad (6')$$

Tím jednak znovu potvrzeno, že maximální čtyřstěn o daných velikostech stěn je kolmohranný, jednak získáváme následující poznatek.

Dány-li velikosti stěn čtyřstěnu kolmohranného, určí se ostatní části z rovnic tvaru (5), kde

$$\left(x - \frac{K}{2}\right)^2 = A^2 + \psi$$

atd., a po dosazení do I (1) platí pro ψ rovnice biquadratická:

$$\frac{K}{2} \pm \sqrt{A^2 + \psi} \pm \sqrt{B^2 + \psi} \pm \sqrt{C^2 + \psi} = 0. \qquad (7)$$

Ale uvážíme-li, že dle (6') souvisí parametr φ z práce I s hodnotou ψ relací

$$\psi - 2\varphi = \frac{1}{4}K^2 - E, \qquad (6)$$

vidíme, že místo nepřehledného řešení rovnice (7) možná vzíti propracované řešení φ rovnice I (10) a příslušné ψ vzít pak ze (6).

3. V odstavci 5. pojednává Sturm o maximu čtyřstěnu při daných velikostech stěn a jednom úhlu. Buď jím třeba γ, což vlastně značí známé p_c dle I (1) Dle II (2) jde pak o extremum funkce

$$U = \begin{vmatrix} x & C & B \\ C & g & A \\ B & A & p_c \end{vmatrix} = p_c{}^2\left(x - \frac{B^2}{p_c{}^2}\right)\left(y - \frac{A^2}{p_c{}^2}\right) + 2ABC - \frac{A^2B^2 + p_c{}^4C^2}{p_c{}^2}$$

při $$x + y = K - p_c{}^2.$$

Ale ježto z obdélníků daného obvodu je největší čtverec, musí být

$$x-\frac{B^2}{p_c^2}=y-\frac{A^2}{p_c^2}=\frac{1}{2}\left[K-p_c^2-\frac{B^2+A^2}{p_c^2}\right], \text{ tedy}$$

$$p_a^2 a=x=\frac{1}{2}\left[K-p_c^2-\frac{A^2-B^2}{p_c^2}\right]$$

$$p_b^2=y=\frac{1}{2}\left[K-p_c^2-\frac{B^2-A^2}{p_c^2}\right].$$

Podmínka (4), omezená na hrany $c\ c'$, platí jen v prvních svých dvou členech, což dá

$$(\triangle_1^2+\triangle_4^2-4x)\,(\triangle_2^2+\triangle_3^2-4x)=$$
$$=(\triangle_2^2+\triangle_4^2-4y)\,(\triangle_3^2+\triangle_1^2-4y),$$

tedy
$$\triangle_2^2\triangle_4^2+\triangle_1^2\triangle_3^2-\triangle_1^2\triangle_4^2-\triangle_2^2\triangle_3^2-$$
$$-16(x-y)K+16(x^2-y^2)=0,$$

nebo
$$(\triangle_4^2-\triangle_3^2)\,(\triangle_2^2-\triangle_1^2)-16\,\frac{B^2-A^2}{p_c^2}K$$

$$+16\,(K-p_c^2)\,\frac{B^2-A^2}{p_c^2}.$$

Členy s K se ruší, ostatní jsou:

$$(\triangle_4^2-\triangle_3^2)\,(\triangle_2^2-\triangle_1^2)-16(B^2-A^2)=$$
$$=4(A+B)\,4\,(B-A)-16(B^2-A^2)=0,$$

čímž tvrzení dokázáno.

4. Nyní se obrátíme k úkolu extrema čtyřstěnu, příslušného k prostorovému 4 úhelníku o hranách $a\ a'\ b\ b'$.

Aby se stal úkol formálně souměrným, přepišme formuli (86) v „Nauce o čtyřstěnu“ od Ant. Šourka ve tvar:

$$144\,T^2=2\,(a^2+a'^2)\,b^2b'^2+2\,(b^2+b'^2)\,a^2a'^2+$$
$$+c^2c'^2c''^2-c^2(a^2b^2+a'^2b'^2)-c'^2(b^2a'^2+$$
$$+a^2b'^2)-c''^2(a^2a'^2+b^2b'^2),$$

kde jsme zavedli třetí úhlopříčku c'' podmínkou:

$$c^2+c'^2+c''^2=a^2+a'^2+b^2+b'^2. \tag{8}$$

Formuli pro objem doplníme tak, aby při c^2, c'^2, c''^2 stály úplné čtverce, t. j. přidáme všude $-2aa'\,bb'$, a přičteme odpovídající výraz, jenž se dle (8) rovná

$$2\,aa'\,b\,b'\,(a^2+a'^2+b^2+b'^2),$$

k prvním dvěma, tak že pak člen prostý úhlopříček se dá psát:

$$2(a^2+a'^2)\,b\,b'\,(b\,b'+a\,a')+2\,(b^2+b'^2)\,a\,a'\,(b\,b'+a\,a')=$$
$$=2\,(a\,a'+b\,b')\,(a\,b'+b\,a')\,(a\,b+a'\,b')$$

a objem lze psát ve tvaru determinantu II (2):

$$144\,T^2=\begin{vmatrix} c^2 & a\,a'+b\,b', & b\,a'+a\,b' \\ a\,a'+b\,b', & c'^2 & a\,b+a'\,b' \\ b\,a'+a\,b', & a\,b+a'\,b', & c''^2 \end{vmatrix} \qquad (9)$$

Maximum se tedy řeší z (8) a (9) přesně dle práce II, je-li

$$c^2=x,\ c'^2=y,\ c''^2=z.$$

Vyšetřme úhly γ a γ', ležící při úhlopříčkách c a c' v případě maxima. K tomu účelu dosaďme do I (1) výrazy pro stěny $\triangle_2$, $\triangle_4$ a p_c, totiž

$$16\,\triangle^2_4=4\,a^2\,b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$$
$$16\,\triangle^2_3=4\,a'^2\,b'^2-(a'^2+b'^2-c^2)^2$$
$$64\,p_c^2=4\,c^2\,c'^2-(a^2+a'^2-b^2-b'^2)^2,$$

což dá na levo

$$16\,(\triangle^2_3+\triangle^2_4-4\,p_c^2)=2\,c^2\,(a^2+b^2+a'^2+b'^2)-$$
$$-(a^2-b^2)^2-(a'^2-b'^2)-2\,c^4-4\,c^2\,c'^2+$$
$$+(a^2+a'^2-b^2-b'^2)^2$$

Ale dle (8) je první člen na pravo, spojený se čtvrtým a pátým,

$$2\,x\,(y+z)-4\,x\,y=2\,x\,(z-y)$$

a ostatní se rovnají

$$2\,(a^2-b^2)\,(a'^2-b'^2)=2\,[(a\,a'+b\,b')^2-(b\,a'+a\,b')^2]=2\,(C^2-B^2)$$

Celkem je dle II (3):

$$2\,[x\,z-B^2-x\,y+C^2]=0.$$

Druhá strana rovnice I (1) může mít jen cos γ nullový, tak že je $\gamma=90^0$, a podobně se dokáže též $\gamma'=90^0$, čímž tvrzení Sturmovo (l. c. odst. 3.) dokázáno. Zde se vše rozšíří i na úhlopříčku c'', jež vyžaduje pouze jiný sled stran čtyřúhelníku.

To je ostatně samozřejmým důsledkem toho, že úkol není než polární obdobou úkolu uvažovaného v § 2. Podmínce (1) odpovídá

$$\triangle^2_1+\triangle^2_2=\triangle^2_3+\triangle^2_4=4\,p^2_c.$$

Také úkol (9) má triviální řešení extrema pro případ

$$c^2=b\,a'+a\,b'+a\,a'+b'b=(a+b)\,(a'+b'),$$
$$c'^2=(a'+b)\,(a+b'),\ c''^2=(a+a')\,(b=b'),$$

takže z (8) plyne podmínka:

$$(a+b)\ (a'+b')+(a'+b)\,(a+b')+(a+a')\,(b+b')=$$
$$=a^2+a'^2+b^2+b'^2,$$

nebo ježto $2(a+b)\,(a'+b')=(a+a'+b+b')^2-(a+b)^2-(a'+b')^2$,

a na pravo podobně lze zavést dvojmoc čtyřčlenu a šest dvojnásobných součinů sloučit ze šesti dvojmocemi na levo, je

$$(a+a'+b+b')^2=(a-b)^2+(a'-b')^2+(a'-b)^2+(a-b')^2+$$
$$+(a-a')^2+(b-b')^2.$$

5. Zavedeme-li na uzavřeném polyedru souhlasný smysl oběhu stěn, takže se každá hrana proběhne dvěma protivnými směry, a přidružíme-li každé stěně kolmý vektor délky rovné její velikosti a namířený na stranu kladného oběhu, je součet všech těchto vektorů nullou, t. j. tvoří uzavřený polygon prostorový (Möbius).

Tím způsobem lze přidružiti čtyřstěnu řadu čtyřúhelníků prostorových, jež se různí pořadím stran. Jejich úhly hranové se rovnají stěnovým u čtyřstěnu.

Bližší úvaha ukazuje, že jen tři z nich jsou podstatně různé a ostatní z nich plynou cyklicky. Schemata lze vystihnout takto:

$$\text{I}\quad \begin{array}{ccc} \triangle_1 & 0 & \triangle_2 \\ 0 & & 0 \\ \triangle_3 & 0 & \triangle_4 \end{array} \qquad \text{II}\quad \begin{array}{ccc} \triangle_1 & 0 & \triangle_2 \\ 0 & & 0 \\ \triangle_4 & 0 & \triangle_3 \end{array} \qquad \text{III}\quad \begin{array}{ccc} \triangle_1 & 0 & \triangle_3 \\ 0 & & 0 \\ \triangle_4 & 0 & \triangle_2. \end{array}$$

Měrná čísla úhlopříček jsou plochy opsaného rovnoběžnostěnu $q_a\, q_b\, q_c$. Na př. ve schematu I je vodorovná úhlopříčka

$$(34)^2=(12)^2=\triangle_1^2+\triangle_2^2-2\,\triangle_1\triangle_2\cos\gamma'=q_c^2,$$

svislá $\quad (13)^2=(24)^2=\triangle_1^2+\triangle_3^2-2\,\triangle_1\triangle_3\cos\beta=q_b^2.$

Že jsou kolmé ke stejnojmenným stěnám, ukazují hned úhly

$$(q_c\,\triangle_1)\ (q_b\,\triangle_4),$$

pro něž je $\qquad q_c\cos(q_c\,\triangle_4)=\triangle_4-\triangle_3\cos\gamma,$

promítnutím stran trojúhelníku $(\triangle_3\,\triangle_4\,q_c)$ do $\triangle_4$. Znásobíme-li veličinou $2\triangle_4$, bude

$$2\,\triangle_4\,q_c\cos(q_c\,\triangle_4)=2\,\triangle_4^2-\triangle_3^2-\triangle_4^2+$$
$$+4p_c^2=\triangle_3^2-\triangle_3^2+4p_c^2$$

v souhlasu s II (k). Tím důkaz proveden.

Úhlopříčky čtyřúhelníků I, II, III se cyklicky permutují mezi třemi, totiž

$$q_b\ q_c;\qquad q_c\ q_a;\qquad q_a\ q_b.$$

Úhly úhlopříček jsou stěnové úhly opsaného rovnoběžnostěnu. Úhly stěnové při hranách $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3\ \triangle_4$ určíme takto:

V tělese I je stěna $(\triangle_1\, q_c\, \triangle_2)$ kolmá k průsečnici stěn q_c a $\triangle_1$ ve čtyřstěnu, t. j. ke hraně c', stěna $(\triangle_1\, q_b\, \triangle_3)$ je kolmá ke hraně b', takže jest úhel při hraně $\triangle_1$ roven a_1. Podobně úhel stěn $(\triangle_2\, q_c)$ a $(\triangle_2\, q_b)$ je $(c'b) = a_2$, dále

$$\sphericalangle\{(\triangle_3\, q_c)\ (\triangle_3\, q_b)\} = \sphericalangle(cb') = a_3$$
$$\sphericalangle\{(\triangle_4\, q_c)\ (\triangle_4\, q_b)\} = \sphericalangle(cb) = a_4.$$

Přiléhají tedy ke hranám

$$\begin{array}{llllll} & \triangle_1 & \triangle_2 & \triangle_3 & \triangle_4 & \\ \text{stěnové úhly} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \text{v I. čtyřúhelníku,} \\ & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \text{ve II. } \quad " \\ & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \text{ve III. } \quad " \end{array} \qquad (10)$$

a všude ku $q_{a'}\, q_{b'}\, q_c$ úhly $(a\,a')$, $(b\,b')$, $(c\,c')$.

Velikosti stěn určeny funkcemi M_{hk}, udanými v I. str. 267. a 269., neboť na př. stěna $(\triangle_1\, \triangle_2\, q_c)$ jest dána rovnicí:

$$16\,[12]^2 = 4\,\triangle_1^2\,\triangle_2^2 - (\triangle_1^2 + \triangle_2^2 - q_c^2)^2 = M_{12}.$$

Pro střední řez π_{14}, rovnoběžný ke hranám $\triangle_1\, \triangle_4$, platí:

$$64\,\pi_{14}^2 = 4\,\triangle_1^2\,\triangle_4^2 - (\triangle_2^2 + \triangle_3^2 - q_b^2 - q_c^2)^2.$$

Ježto je dle I (2) závorka rovna $(q_a^2 - \triangle_1^2 - \triangle_4^2)$, platí $64\,\pi_{14}^2 = M_{14}$ a $64\,\pi_{23}^2 = M_{23}$.

Ale pro střední řez π_{bc}, rovnoběžný s q_b a q_c, dá obdoba věty I (2):

$$64\,\pi_{bc}^2 = -M_{14} - M_{23} + M_{13} + M_{12} + M_{24} + M_{34}.$$

Jsou tedy 16-násobné čtverce stěn v přidružených čtyřstěnech:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{v I} & M_{31} & M_{12} & M_{24} & M_{34} \\ \text{ve II} & M_{23} & M_{12} & M_{14} & M_{34} \\ \text{ve III} & M_{23} & M_{13} & M_{24} & M_{14}, \end{array}\right\} \quad (11)$$

a 64-násobné čtverce středních řezů:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{v I} & -M_{14} - M_{23} + M_{31} + M_{24} + M_{12} + M_{34}, & M_{14}, & M_{23} \\ \text{ve II} & M_{31}, & M_{23} + M_{14} - M_{13} - M_{24} + M_{12} + M_{34} & M_{24} \\ \text{ve III} & M_{12}, & M_{34} & M_{23} + M_{14} + M_{31} + M_{24} - M_{12} - M_{34} \end{array}\right\} \quad (12)$$

Objemy všech přidružených čtyřstěnů jsou stejné, a dají se určiti formulí (9), když označíme

$$A = \triangle_1 \triangle_4 + \triangle_2 \triangle_3 \quad B = \triangle_2 \triangle_4 + \triangle_1 \triangle_3$$
$$C = \triangle_3 \triangle_4 + \triangle_1 \triangle_2, \tag{13}$$

ve tvaru

$$144 V^2 = \begin{vmatrix} q_a^2 & C & B \\ C & q_b^2 & A \\ B & A & q_c^2 \end{vmatrix} \tag{14}$$

Ale pošineme-li ve 4-úhelníku ($\triangle_1 \triangle_2 \triangle_3 \triangle_4$) hranu $\triangle_2$ podél $\triangle_1$, vznikne trojhran ($\triangle_1 \triangle_4 \triangle_2$), jenž má rožný sinus E_3 (viz. I) a dává pro obsah hodnotu [I (α)]

$$V = \frac{1}{6} \triangle_1 \triangle_2 \triangle_4 E_3,$$

což dle I (e) dá:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{2} T^2 = \frac{3}{4} T^2. \tag{15}$$

Tím vystižen vzájemný vztah sdružených čtyřstěnů.

K maximálnímu čtyřstěnu, kde jsou protější hrany kolmé, patří maximální přidružený 4-stěn, kde stěnové úhly při úhlopříčkách čtyřúhelníka jsou pravé, jak zjištěno v odstavci 4.

Dále platí theorem: Čtyři vektory v prostoru mohou dáti 4-úhelníky, jejichž úhlopříčky jsou vždy dva z dalších tří vektorů. Součet čtverců vektorů úhlopříčkových je roven součtu čtverců čtyř stran.

Formule I (3), když do ní dosadíme hodnoty 11) a 12) za obsahy stěn, přejde ve

$$-2(48 V)^4 = -2(6 T)^8 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 M_{31} & M_{14} & \pi^2{}_{bc} & M_{23} \\ 1 & M_{14} & 4 M_{12} & M_{23} & \pi^2{}_{bc} \\ 1 & \pi^2{}_{bc} & M_{23} & 4 M_{24} & M_{14} \\ 1 & M_{23} & \pi^2{}_{bc} & M_{14} & 4 M_{34} \end{vmatrix} \tag{16}$$

a podobné další dvě.

6. Význam formule (14) se jinak osvětlí, když pokládáme $q_a\ q_b\ q_c$ za střední řezy nového rovnoběžnostěnu o stěnách $d_1\ d_2\ d_3\ d_4$, takže

$$\left.\begin{aligned} d^2{}_1 - d^2{}_2 - d^2{}_3 + d^2{}_4 = 8 A, \quad -d^2{}_1 + d^2{}_2 - d^2{}_3 + d^2{}_4 = 8 B, \\ -d^2{}_1 - d^2{}_2 + d^2{}_3 + d^2{}_4 = 8 C, \quad d^2{}_1 + d^2{}_2 + d^2{}_3 + d^2{}_4 = \\ = 4 (q_a^2 + q_b^2 + q_c^2) = 16 K = 4 (\triangle^2{}_1 + \triangle^2{}_2 + \triangle^2{}_3 + \triangle^2{}_4) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Pak máme se zřetelem na (13)

$$\left.\begin{aligned} \pm d_1 &= \triangle_1 - \triangle_2 - \triangle_3 + \triangle_4, \\ \pm d_2 &= -\triangle_1 + \triangle_2 - \triangle_3 + \triangle_4 \\ \pm d_3 &= -\triangle_1 - \triangle_2 + \triangle_3 + \triangle_4 \\ \pm d_4 &= \triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 + \triangle_4. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Tyto veličiny ukazují, že úkol určiti čtyřstěn maximální, dány-li (a) střední řezy $p_a p_b p_c$ a jedna stěna, na př. $\triangle_4$, při čemž jsou proměnnými parametry A, B, C s daným součtem

$$A + B + C = \frac{\triangle^2_4 - K}{2},$$

nebo (b) dány-li střední řezy a povrch $d_4 = \triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 + \triangle_4$, při čemž užijeme formule (14) s vedlejší podmínkou

$$A + B + C = \frac{d^2_4 - 4K}{2},$$

nebo (c) dány-li úhlopříčky $c\, c'\, c''$ a obvod 4-úhelníka

$$k = a + a' + b + b',$$

při čemž se užije rovnice (9), a lze mutatis mutandis zavést parametry $\alpha_1 = ab + a'b'$, $\beta_1 = \ldots$, $\gamma_1 \ldots$, a vázati je podmínkou

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \frac{k^2 - (c^2 + c'^2 + c''^2}{2},$$

se řeší doslovně stejně.

Ježto přímé užití Lagrangeovy methody nedá výsledků průhledných, vedoucích k pohodlným závěrům, provedeme na formulích transformaci, již vyložím pro případ (a).

Uvažujme čtyřstěn, odťatý stěnou $\triangle_4$ od rovnoběžnostěnu. Jeho ostatní stěny jsou $p_a\, p_b\, p_c$ a střední řezy se obdrží z relací tvaru

$$\left.\begin{aligned} &4p'^2_a = p_b^2 + p_c^2 - 2p_b p_c \cos(p_b p_c) = p_b^2 + p_c^2 + 2A \\ &\text{dle I str. 270 a II str. 1. Dosadíme-li ještě} \\ &8A_1 = p_a^2 + \triangle^2_4 - p_b^2 - p_c^2 = 2p_a^2 + \triangle^2_4 - K \end{aligned}\right\} (19_1)$$

atd., přejde ve veličinách $p'_a\, p'_b\, p'_c\, A_1\, B_1\, C_1$ úkol na řešení provedené ve (II), kde

$$4(p'^2_a + p'^2_b + p'^2_c) = 2(p_a^2 + p_b^2 + p_c^2) + \\ + \frac{2(-\triangle^2_1 - \triangle^2_2 - \triangle^2_3 - \triangle^2_4 + 4\triangle^2_4)}{8}$$

nebo $$p'^2_a + p'^2_b + p'^2_c = \frac{K + \triangle^2_4}{4} \tag{20_1}$$

Formule příslušná pak dává objem poloviční.

V úkolu (b) zavedeme

$$\left.\begin{aligned} 4p'^2_a &= q_b^2 + q_c^2 - 2q_b q_c \cos(q_b q_c) = q_b^2 + q_c^2 + 2A \\ 8A_1 &= q_a^2 + d^2_4 - q_b^2 - q_c^2 = 2q_a^2 + d^2_4 - 4K. \end{aligned}\right\} \tag{19_2}$$

Tu jde o extremum

$$36V^2 = \frac{81}{4}T^4 = \begin{vmatrix} p'^2_a & C_1 & B_1 \\ C_1 & p'^2_b & A_1 \\ B_1 & A_1 & p'^2_c \end{vmatrix} \tag{21_2}$$

při

$$4(p'^2_a + p'^2_b + p'^2_c) = 2\left\{4K + \frac{1}{8}(4d^2_4 - d^2_1 - d^2_2 - d^2_3 - d^2_4)\right\} =$$

$$= 2\left\{4K + \frac{1}{8}(4d^2_4 - 16K)\right\} = 4K + d^2_4 \tag{20_2}$$

V úkolu (c) bude

$$\left.\begin{aligned} 4p'^2_a &= c'^2 + c''^2 - 2c'c'' \cos(c'c'') = c'^2 + c''^2 + 2\alpha_1 \text{ atd.} \\ 8\alpha_2 &= c^2 + k^2 - c'^2 - c''^2 = 2c^2 + d^2_4 - 4K \\ &(4K = c^2 + c'^2 + c''^2) \end{aligned}\right\} \tag{19_3}$$

$$4(p'^2_a + p'^2_b + p'^2_c) = 4K + d^2_4. \tag{20_3}$$

7. Rovnice 17) a 18) vlastně ukazují, že se úkol extrema přenáší na nový čtyřstěn, jehož stěny jsou linearními funkcemi daného. Úkol (a) se pak dá řešit pro danou jinou stěnu než je d_4 při známých $p_a\, p_b\, p_c$.

Takový případ nastává na př. při podmínce

$$\triangle_1 + \triangle_2 = \triangle_3 + \triangle_4. \tag{22}$$

Pro zajímavost podáme zde ještě jiné řešení tohoto úkolu.

Položme $\triangle_1 = -\lambda + \mu + \nu$, $\triangle_2 = \lambda - \mu + \nu$, $\triangle_3 = -\lambda - \mu + \nu$, $\triangle_4 = \lambda + \mu + \nu$,

čímž se (22) identicky splní. Dále máme:

$$8A = \triangle^2_1 + \triangle^2_4 - \triangle^2_2 - \triangle^2_3 = (\triangle_1 + \triangle_2)(\triangle_1 - \triangle_2 - \triangle_3 + \\ + \triangle_4) = 8\mu\nu,\ B = \nu\lambda,\ C = \lambda\mu$$

$$4(p_a^2 + p_b^2 + p_c^2) = \triangle^2_1 + \triangle^2_2 + \triangle^2_3 + \triangle^2_4 = 4(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2).$$

Jde tedy o maximum funkce

$$U=\frac{81}{64}T^4=\begin{vmatrix} p_a^2 & \lambda\mu & \lambda\nu \\ \mu\lambda & p_b^2 & \lambda\nu \\ \nu\lambda & \nu\mu & p_c^2 \end{vmatrix}=p_a^2 p_b^2 p_c^2+2\lambda^2\mu^2\nu^2-$$

$$-p_a^2\mu^2\nu^2-p_b^2\nu^2\lambda^2-p_c^2\lambda^2\nu^2$$

s podmínkou $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=K$

Bereme-li λ^2, μ^2, ν^2 za proměnné, dá Lagrangeova methoda:

$$2\mu^2\nu^2-p_b^2\nu^2-p_c^2\mu^2+\varphi=o\equiv$$

$$\equiv\left(\mu^2-\frac{p_b^2}{2}\right)\left(\nu^2-\frac{p_c^2}{2}\right)-\frac{1}{4}p_b^2p_c^2+\varphi=o$$

a zavedením $x=\lambda^2-\frac{1}{2}p^2_a$, $y=\mu^2-\frac{1}{2}p_b^2$,

$$z=\nu^2-\frac{1}{2}p_c^2,\quad x+y+z=\frac{1}{2}K,$$

dospíváme úplně k rovnicím II (3).

8. Jiný princip transformační dává přidružení těžnic k plochám. Označme vzdálenosti těžiště od vrcholů, jež činí $\frac{3}{4}$ těžnic, $u_1\, u_2\, u_3\, u_4$ resp. a od středů hran $u_a\, u_b\, u_c$. Tyto jsou polovinami těžnic hranových.

Potom nám dají věty o příčkách v trojúhelníku (Stewart)

$$a^2=2\,(u^2_2+u^2_3)-4\,u_a^2\quad a'^2=2\,(u^2_1+u^2_4)-u_a^2 \text{ atd.} \tag{23}$$

Odtud pak je:

$$\left.\begin{aligned} a^2+a'^2&=2\,(u^2_1+u^2_2+u^2_3+u^2_4)-8\,u_a^2 \text{ atd.}\\ a'^2-a^2&=2\,(u^2_1+u^2_4-u^2_2-u^2_3) \quad \text{atd.}\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Ale hrany opsaného rovnoběžnostěnu, rovné hranovým těžnicím, jsou dvojnásobky hodnot $u_a\ldots$, a stranami rovnoběžníků s úhlopříčkami a a' atd., čímž plyne:

$$\left.\begin{aligned} 8\,(u_b^2+u_c^2)=a^2+a'^2,\ 8\,(u_c^2+u_a^2)=b^2+b'^2,\\ 8\,(u_c^2+u_a^2)=c^2+c'^2\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Je tedy dle (24):

$$16\,(u_a^2+u_b^2+u_c^2)=6\,(u^2_1+u^2_2+u^2_3+u^2_4)-8\,(u_a^2+u_b^2+u_c^2),$$

z čehož $$u^2_1+u^2_2+u^2_3+u^2_4=4\,(u_a^2+u_b^2+u_c^2) \tag{26}$$

v obdobě k I (2), a mohou tudíž dáti vznik formulím pro obsah, obdobným se stěnovými.

K tomu cíli uvažujme čtyřstěn odříznutý od rovnoběžnostěnu stěnou $\triangle_4$, kde jsou hrany rohu d_a, d_b, d_c a protější hrany a, b, c. Formule pro objem (viz Šourek, rov. 84) se pak dá psát:

$$72\,T^2 = \begin{vmatrix} 2\,d_a^2 & d_a^2+d_b^2-c^2 & d_a^2+d_c^2-b^2 \\ d_b^2+d_c^2-c^2 & 2\,d_b^2 & d_b^2+d_c^2-a^2 \\ d_c^2+d_a^2-b^2 & d_c^2+d_b^2-a^2 & 2\,d_c^2 \end{vmatrix} \qquad (27)$$

a odtud dle (25):

$$576\,T^2 =$$
$$\begin{vmatrix} -a^2-a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2, & c'^2-c^2 & b'^2-b^2 \\ c'^2-c^2 & a^2+a'^2-b^2-b'^2+c^2+c'^2 & a'^2-a^2 \\ b'^2-b^2 & a'^2-a^2, & a^2+a'^2+b^2+b'^2-c^2-c'^2 \end{vmatrix} \quad (28)$$

nebo

$$= \begin{vmatrix} a''^2 & c'^2-c^2 & b'^2-b^2 \\ c'^2-c^2 & b''^2 & a'^2-a^2 \\ b'^2-b^2 & a'^2-a^2 & a''^2 \end{vmatrix},$$

kde význam a'' a b'' jest obdobný s c''.

$$72\,T^2 =$$
$$\begin{vmatrix} 8\,u_a^2 & u^2_3+u^2_4-u^2_1-u^2_2 & u^2_2+u^2_4-u^2_1-u^2_3 \\ u^2_3+u^2_4-u^2_1-u^2_2 & 8\,u_b^2 & u^2_1+u^2_4-u^2_2-u^2_3 \\ u^2_2+u^2_4-u^2_1-u^2_3 & u^2_1+u^2_4-u^2_2-u^2_3 & 8\,u_c^2 \end{vmatrix} \quad (29)$$

Tato formule je plně obdobná s I (12) nebo II (2).

Podobně dosazení hodnot (23) do I (f), když první řádek a sloupec, znásobené postupně čísly $2u^2_1$, $2u^2_2$, $2u^2_3$, $2u^2_4$ resp. odečteme od následujících, dá po vytčení činitele -4^3 výraz obdobný s I (3):

$$-\frac{9}{2}\,T^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u^2_1 & u_c^2 & u_b^2 & u_a^2 \\ 1 & u_c^2 & u^2_2 & u_a^2 & u_b^2 \\ 1 & u_b^2 & u_a^2 & u^2_3 & u_c^2 \\ 1 & u_a^2 & u_b^2 & u^2_c & u^2_4 \end{vmatrix} \qquad (30)$$

Právě získaného poznatku použijme pro čtyřstěny, kde prvky $\triangle_k$, p jsou úseky těžnic. Tím obdržíme nové výrazy hranové, užijíce (23). Odtud pak dle I (m) (n) hodnota hrany, jež vstoupí za a a a' resp. jest:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= 16\mathfrak{A}'^2 = 2\,[\triangle^2_2+\triangle^2_3-2p_a^2] \\ a'^2 &= 16\,\mathfrak{A}^2 = 2\,[\triangle^2_1+\triangle^2_4-2p_a^2]. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Je-li V objem 4-stěnu, vzniklého z I (3), když po dosazení uvedeme členy na dvojnásobky a pak odečteme poslední řádek a sloupec, znásobené resp. čísly $\triangle_1\, \triangle_2\, \triangle_3\, \triangle_4$ od prvních čtyř, obdržíme relaci:

$$288\,.\,V^2.\,16^{-3}=\frac{81}{128}\,T^4=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \mathfrak{C}'^2 & \mathfrak{B}'^2 & \mathfrak{A}^2 \\ 1 & \mathfrak{C}'^2 & 0 & \mathfrak{A}'^2 & \mathfrak{B}^2 \\ 1 & \mathfrak{B}'^2 & \mathfrak{A}'^2 & 0 & \mathfrak{C}^2 \\ 1 & \mathfrak{A}^2 & \mathfrak{B}^2 & \mathfrak{C}^2 & 0 \end{vmatrix} \tag{32}$$

$$576\,.\,V^2.16^{-3}=\frac{81}{64}\,T^4= \tag{33}$$

$$\begin{vmatrix} -\mathfrak{A}^2-\mathfrak{A}'^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{B}'^2+\mathfrak{C}^2+\mathfrak{C}'^2 & \mathfrak{C}^2-\mathfrak{C}^2 & \mathfrak{B}^2-\mathfrak{B}'^2 \\ \mathfrak{C}^2-\mathfrak{C}'^2 & \mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}'^2-\mathfrak{B}^2-\mathfrak{B}'^2+\mathfrak{C}^2+\mathfrak{C}'^2 & \mathfrak{A}^2-\mathfrak{A}'^2 \\ \mathfrak{B}^2-\mathfrak{B}'^2 & \mathfrak{A}^2-\mathfrak{A}'^2 & \mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}'^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{B}'^2-\mathfrak{C}^2-\mathfrak{C}'^2 \end{vmatrix}$$

tak že $V=3\,T^2$.

Od těchto formulí co hranových přejdeme ke stěnovým jako od I (f) k I (3). Stěna δ_4, omezená hranami $\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{C}'$, má obsah δ_4, daný rovnicí:

$$-16\,\delta^2_4=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \mathfrak{C}'^2 & \mathfrak{B}'^2 \\ 1 & \mathfrak{C}'^2 & 0 & \mathfrak{A}'^2 \\ 1 & \mathfrak{B}'^2 & \mathfrak{A}'^2 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \triangle^2_1 & p_c^2 & p_b^2 \\ 1 & p_c^2 & \triangle^2_2 & p_a^2 \\ 1 & p_b^2 & p_a^2 & \triangle^2_3 \end{vmatrix} \tag{34}$$

Pro střední řezy $\pi_a\ \pi_b\ \pi_c$ bude pak:

$$64\,\pi_a^2=4\,\mathfrak{A}^2\,\mathfrak{A}'^2-(\mathfrak{B}^2+\mathfrak{B}'^2-\mathfrak{C}^2-\mathfrak{C}'^2)^2=$$
$$=\frac{4}{64}\left\{(\triangle^2_1+\triangle^2_2)\ (\triangle^2_3+\triangle^2_4)-2\,p_a^2\,\Sigma\,\triangle^2+4\,p_a^4\right\}-$$
$$-\frac{(4p_b^2-4p_c)^2}{64}.$$

Druhý člen na pravo nahraďme součtem, píšíce zaň

$$p_b^2\,p_c^2-\frac{1}{64}\,(\Sigma\,\triangle^2-4\,p_a^2)^2,$$

tak že po rozvinutí a sloučení s prvním členem zbude

$$64\,\pi_a^2=p_b^2\,p_c^2-\frac{1}{64}\left\{(\triangle^2_1+\triangle^2_4)-(\triangle^2_2+\triangle^2_3)\right\}^2= \tag{34}$$
$$=p_b^2\,p_c^2-A^2.$$

Pak jest:

$$\delta^2_1 + \delta^2_2 + \delta^2_3 + \delta^2_4 = 4\,(\pi_a{}^2 + \pi_b{}^2 + \pi_c{}^2)$$

a
$$-\frac{81}{2}\,.\,V^4\,.\,16^{-6} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\,T}{8}\right)^8 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \delta^2_1 & \pi_c{}^2 & \pi_b{}^2 & \pi_a{}^2 \\ 1 & \pi_c{}^2 & \delta^2_2 & \pi_a{}^2 & \pi_b{}^2 \\ 1 & \pi_b{}^2 & \pi_a{}^2 & \delta^2_3 & \pi_c{}^2 \\ 1 & \pi_a{}^2 & \pi_b{}^2 & \pi_c{}^2 & \delta^2_4 \end{vmatrix} \qquad (35)$$

Obdobou s I (12) je pak

$$2\,.\left(\frac{3\,T}{8}\right)^8 = \qquad (36)$$
$$\begin{vmatrix} 8\,\pi_a{}^2 & \delta^2_3 + \delta^2_4 - \delta^2_1 - \delta^2_2 & \delta^2_2 + \delta^2_4 - \delta^2_1 - \delta^2_3 \\ \delta^2_3 + \delta^2_4 - \delta^2_1 - \delta^2_2 & 8\,\pi_b{}^2 & \delta^2_1 + \delta^2_4 - \delta^2_2 - \delta^2_3 \\ \delta^2_2 + \delta^2_4 - \delta^2_1 - \delta^2_3 & \delta^2_1 + \delta^2_4 - \delta^2_2 - \delta^2_3 & 8\,\pi_c{}^2 \end{vmatrix}$$

Ale určíme-li trojúhelníky, stanovené stranami $\triangle_1$ $\triangle_4$ a těžnicí p_a, t. j. těžištěm a hranou $4\,\mathfrak{A}^2$ atd., obdržíme prvky tvaru:

$$M_{14} = 4\,\triangle^2_1\,\triangle^2_4 - (\triangle^2_1 + \triangle^2_4 - 16\,\mathfrak{A}^2)^2 =$$
$$= 4\,\triangle^2_1\,\triangle^2_4 - (\triangle^2_1 + \triangle^2_4 - 2\,\triangle^2_1 - 2\,\triangle^2_4 + 4\,p_a{}^2)^2 =$$
$$= 4\,\triangle^2_1\,\triangle^2_4 - (\triangle^2_1 + \triangle^2_4 - 4\,p_a{}^2)^2 =$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \triangle^2_1 & 4p_a{}^2 \\ 1 & \triangle^2_1 & 0 & \triangle^2_4 \\ 1 & 4p_a{}^2 & \triangle^2_4 & 0 \end{vmatrix}, \text{ atd.} \qquad (37)$$

což vede na formuli:

$$2^5\,.\,9^4\,.\,T^8 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ 1 & M_{21} & 0 & M_{23} & M_{24} \\ 1 & M_{31} & M_{32} & 0 & M_{34} \\ 1 & M_{41} & M_{42} & M_{43} & 0 \end{vmatrix} \qquad (38)$$

obdobnou s (32), a na další

$$\frac{1}{4}\cdot(6\,T)^8 = \qquad (39)$$
$$\begin{vmatrix} -M_{23} - M_{14} + M_{31} + M_{24} + M_{12} + M_{34}, & M_{12} - M_{34}, & M_{31} - M_{24} \\ M_{21} - M_{34}, & M_{23} + M_{14} - M_{31} - M_{24} + M_{12} + M_{34}, & M_{32} - M_{14} \\ M_{31} - M_{24}, & M_{32} - M_{14}, & M_{23} + M_{14} + M_{31} + M_{24} - M_{12} - M_{34}. \end{vmatrix}$$

Tuto formuli můžeme však psát ještě jinak. Je totiž

$$\begin{aligned}&-M_{23}-M_{14}+M_{31}+M_{24}+M_{12}+M_{34}=\\&=32p_a^4-8p_a^2\,\Sigma\triangle^2+(\triangle^2_1-\triangle^2_4)^2+(\triangle^2_2-\triangle^2_3)^2-\\&-32p_b^4+8p_b^2\,\Sigma\triangle^2-(\triangle^2_2-\triangle^2_3)^2-(\triangle^2_1-\triangle^2_3)^2-\\&-32p_c^4+8p_c^2\,\Sigma\triangle^2-(\triangle^2_3-\triangle^2_4)^2-(\triangle^2_1-\triangle^2_2)^2.\end{aligned}$$

Když za $\Sigma\triangle^2$ dosadíme $4(p_a^2+p_b^2+p_c^2)$, shrnou se všecky členy s p v jediný $64p_b^2p_c^2$. V kladných členech ostatku nahraďme rozdíly ve dvojmocích součty, v ostatních oddělme dvojnásobné součiny od biquadratů, a ony nahraďme součinem, což dá

$$\begin{aligned}&(\triangle^2_1+\triangle^2_4)^2+(\triangle^2_2+\triangle^2_3)^2-4\triangle^2_1\triangle^2_4-4\triangle^2_3\triangle^2_2-\\&-2\Sigma\triangle^2+2(\triangle^2_1+\triangle^2_4)(\triangle^2_2+\triangle^2_3)=(\triangle^2_1+\triangle^2_4)^2+\\&+(\triangle^2_2+\triangle^2_3)^2-2[(\triangle^2_1+\triangle^2_4)^2-(\triangle^2_2+\triangle^2_3)^2]+\\&+2(\triangle^2_1+\triangle^2_4)(\triangle^2_2+\triangle^2_3)=-(\triangle^2_1+\triangle^2_4-\triangle^2_2-\triangle^2_3)^2=-64A^2.\end{aligned}$$

Jsou tedy členy úhlopříčkové tvaru:

$$64(p_b^2p_c^2-A^2)=64\pi_a^2.$$

Ostatní se přepíšou na:

$$\begin{aligned}&8p_c^2(\triangle^2_1+\triangle^2_2-\triangle^2_3-\triangle^2_4)-(\triangle^2_1-\triangle^2_2)^2+\\&+(\triangle^2_3-\triangle^2_4)^2=64(AB-Cp^2_c)\end{aligned}$$

Máme tedy:

$$\left(\frac{9}{8}\right)^4 T^8=\begin{vmatrix}p_b^2p_c^2-A^2 & AB-Cp_c^2 & AC-Bp_b^2\\ BA-Cp_c^2 & p_c^2p_a^2-B^2 & BC-Ap_a^2\\ CA-Bp_b^2 & CB-Ap_a^2 & p_a^2p_b^2-C^2\end{vmatrix}\qquad(40)$$

Řadu těchto formulí možná odvoditi též polárními transformacemi, ale vylíčení příslušných úkonů budiž vyhrazeno jiné příležitosti.

9. Dle I (3), má čtyřstěn, jehož stěny jsou $u_1\ldots u_4$ a střední řezy $u_a\ldots$ determinant pro objem rovný $-\frac{81}{2}\tau^4$, jenž je dle (30) roven zase $-\frac{9}{2}T^2$, z čehož

$$T=3\tau^2\qquad(41)$$

Proto dle (14), když tam provedeme udanou transformaci, bude

$$81\tau^4=9T^2=\begin{vmatrix}4u_a^2 & u_3u_4+u_1u_2 & u_2u_4+u_1u_2\\ u_3u_4+u_1u_2 & 4u_b^2 & u_1u_4+u_2u_3\\ u_2u_4+u_1u_3 & u_1u_4+u_2u_3 & 4u_c^2\end{vmatrix}\qquad(42)$$

Od formule (9) možná přejít k nové formuli, uvážíme-li, že pravé strany rovnic I (3) a II (2) jsou v poměru -32, a že je možná v (9) označit veličiny

$$-a-b+a'+b',\ a-b-a'+b',\ -a+b-a'+b',$$
$$a+b+a'+b',\ \text{resp. symboly}$$
$$\triangle_1,\ \triangle_2,\ \triangle_3,\ \triangle_4,$$

tak že c, c, c'' resp. stojí místo p_a. p_b, p_c.

Máme tedy v obdobě s I (3) formuli:

$$-2\,.\,(48\,T)^2 = \begin{vmatrix} 0, & 1 & 1 & 1, & 1 \\ 1, & (-a-b+a'+b')^2, & c'^2 & c'^2, & c^2 \\ 1, & c''^2, & (a-b-a'+b')^2, & c^2, & c'^2 \\ 1, & c'^2, & c^2, & (-a+b-a'+b')^2, & c''^2 \\ 1, & c^2, & c'^2, & c''^2, & (a+b+a'+b')^2 \end{vmatrix}$$

Úlohy o maximu možno nyní rozšířiti o tyto:

d) K daným těžnicím vrcholovým nalézt maximální čtyřstěn. Užije se rovnice (29) s podmínkou (26) nebo rovnice (42) s daným součtem členů mimo diagonalu, a úkol je zase doslovně provedený jako ve II.

e) Naproti tomu stanovení maxima při daných těžnicích

$$u_a,\ u_b,\ u_c$$

a daném součtu $\quad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \text{konst.}$

se provede dle vzoru rovnic (19)—(21).

Řešení úkolu *d*) vede zase k jednoduché geometrické interpretaci. Když přepíšeme v těžnicích podmínku kolmohrannosti, vyjádřenou v odst. 3 stěnami, pak patrno, že součiny cosinů vzájemných sklonů vrcholových těžnic, pokud jejich roviny obsahují touž těžnici hranovou, musí býti stejné:

$$\cos(u_1 u_4)\cos(u_2 u_3) = \cos(u_2 u_4)\cos(u_1 u_3) =$$
$$= \cos(u_3 u_4)\cos(u_1 u_2).$$

Když napíšeme v těžnicích hodnoty trojúhelníků, určených hranami čtyřstěnu a těžištěm, máme

$$16\,\mathfrak{A}^2 = 4\,u_2^2 u_3^2 - (u_2^2 + u_2^2 - a^2)^2 = 4\,u_2^2 u_3^2 - (u_2^2 + u_3^2 -$$
$$- 2\,u_2^2 - 2\,u_3^2 + 4\,u_a^2)^2 = 4\,u_2^2 u_3^2 - (u_2^2 + u_4^2 - 4\,u_a)^2,$$

tedy

$$16\,(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}'^2) = -32\,u_a^4 + 8\,u_a^2\,(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) -$$
$$-(u_2^2 - u_3^2)^2 - (u_1^2 - u_4^2)^2$$

čili dle (26) $\quad 32\,(u_a^2 u_b^2 + u_a^2 u_c^2) - [\bar{b}^2 + \bar{c}^2]$,

kde $\bar{b}\ \bar{c}$ mají význam veličin $B\ C$. Dle obdob s řešením v práci II je poslední výraz nezávislý na párech protějších prvků, a máme tedy v maximalním čtyřstěnu

$$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}'^2 = \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}'^2 = \mathfrak{C}^2 + \mathfrak{C}'^2. \tag{43}$$

Formuli (42) můžeme odvodit též přímo. Pošineme-li úsek těžnice u_1 z těžiště podél u_4, vznikne trojúhelník s třetí stranou $2\,u_a$. Pošineme-li pak u_3 v jeho směru o jeho délku přes těžiště, a u_2 o $2\,u_a$ přes těžiště do koncového bodu pošinutého úseku u_1, vznikne čtyřúhelník, omezený čtyřmi vektory, téhož typu, jako v odst. 5. o něm byla řeč, a jeho úhlopříčky jsou $2\,u_a$, $2\,u_c$, při jiných posunech přistoupí ještě $2\,u_b$, čímž znovu ony věty dokázány. Potom lze přímo formuli (9) převést na tento útvar. Pro maximum musí dle odst. 4 býti úhly stěnové, přiléhající k u_a, u_b býti pravé, t. j. plochy $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'$ resp. $\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}'$ resp. $\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}'$ musí býti v rovinách navzájem kolmých. Toto jest jen obměnou poslední věty v odst. 4.

Na čtyřúhelník o stranách $u_1\ u_2\ u_3\ u_4$ a úhlopříčkách $2\,u_a$, $2\,u_c$ applikujme nyní týž postup, který vedl na rovnici (16). Stěny jsou dány rovnicemi tvaru:

$$4\,u_1^2\,u_4^2 - (u_1^2 + u_4^2 - a'^2) = 16'\,\mathfrak{A}'^2 \text{ atd.}$$

jsou tedy ostatní stěny $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}\ \mathfrak{C}'$, střední řezy, označené $\bar{p}_{24}\ \bar{p}_b\ \bar{p}_{13}$, mají hodnoty dané rovnicemi:

$$\bar{p}_b = \frac{1}{2} p_b,\ 64 p_{24}^2 = 4\,u_4^2\,u_2^2 - (u_1^2 + u_3^2 - 4\,u_a^2 - 4\,u_c^2)^2 =$$
$$= 4\,u_2^2\,u_4^2 - [u_2^2 + u_4^2 - 4\,u_b^2] = 16\,\mathfrak{B}'^2,\ 64 p_{13}^2 = 16\,\mathfrak{B}^2.$$

Užijeme-li tedy pro čtyřstěn, příslušný 4-úhelníku, formule I (3) a pamatujeme-li, že jeho objem je $\frac{1}{4}$ objemu základního čtyřstěnu, budeme mít:

$$-2\left(\frac{3}{2}\,T\right)^4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4\mathfrak{A}^2 & p_b^2 & \mathfrak{B}'^2 & \mathfrak{B}^2 \\ 1 & p_b^2 & 4\mathfrak{A}'^2 & \mathfrak{B}^2 & \mathfrak{B}'^2 \\ 1 & \mathfrak{B}'^2 & \mathfrak{B}^2 & 4\mathfrak{C}^2 & p_b^2 \\ 1 & \mathfrak{B}^2 & \mathfrak{B}'^2 & p_b^2 & 4\mathfrak{C}'^2 \end{vmatrix} \tag{44}$$

a podobné dvě další. Při tom platí

$$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{C}^2 + \mathfrak{C}'^2 = p_b^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}'^2 \tag{45}$$

Další formuli pro T^8 obdržíme přechodem od (14) k formuli vztahem orthogonalním přidružené s prvky 34) a 34').

Je-li V' přidružený objem, je

$$144\,V'^2 = 144.\left(\frac{3}{4}V^2\right)^2 = 144\,.\,\frac{9}{16}.\left(\frac{3}{4}T^2\right)^4 = \left(\frac{3}{2}T\right)^8,$$

pročež

$$\left(\frac{3}{2}T\right)^8 = \begin{vmatrix} 4\pi_a{}^2 & C_2 & B_2 \\ C_2 & 4\pi_b{}^2 & A_2 \\ B_2 & A_2 & 4\pi_c{}^2 \end{vmatrix} \tag{45}$$

$$A_2 = \delta_1\,\delta_4 + \delta_2\,\delta_3 \quad B_2 = \delta_2\,\delta_4 + \delta_3\,\delta_1 \quad C_2 = \delta_3\,\delta_4 + \delta_1\,\delta_2 \tag{46}$$

Abychom měli úplné cykly těchto formulí, dosaďme za M_{uu} do (16) jejich hodnoty z I (9), tak že se zkrátí $(9\,T^2)^3$ a na levo bude

$$-512\,.\,(3\,T)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4b^2 & a'^2 & 16u_a{}^2 & a^2 \\ 1 & a'^2 & 4c^2 & a^2 & 16u_a{}^2 \\ 1 & 16u_a{}^2 & a^2 & 4b^2 & a'^2 \\ 1 & a^2 & 16u_a{}^2 & a'^2 & 4c'^2 \end{vmatrix} \tag{47}$$

Zde zavedeno u_a dle (25). Podobné další dvě formule se snadno doplní.

10. K závěru nemohu opomenout jisté obdoby ve výrazech pro T^2, T^4, T^8, které tvoří zajímavé cykly co do platnosti pro opsaný rovnoběžnostěn (determinanty stupně 3) a pro čtyřstěn (det. stupně 5) i výrazy pro prostorový čtyřúhelník, při čemž se strany střídají dle toho, jsou-li prvky těžnice nebo hrany, stěny a řezy nebo plochy omezené těžnicemi, funkce hranové a pod.

Možno pak sestaviti formule následovně:

I(*f*),	28 ,	29,	30	9,42	47	pro	T^2
32,	23 ,	II (2),	I (3)	14	44	„	T^4
38,	39,40,	36,	35	46	16	„	T^8,

kde pod sebou stojí výrazy tvarově stejné.

V Praze, dne 18. února 1923.

*

Contributions à la théorie du tétraedre.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur reprend les raisonnements de R. Sturm, insérés dans le „Journal für die reine und angewandte Mathematik", t. 152, p. 90 sq., sur les maxima, en se servant d'une méthode purement numérique, au moyen de laquelle il a réussi à élargir les problèmes accessibles, en les soumettant à un procédé caractéristique (publié dans les mémoires de l'Académie de Prague en 1918). De plus, l'auteur déduit un système de formules se rattachant au volume du tétraèdre.

Několik důkazů a konstrukcí věty Pohlkeovy.

Napsal *J. Sobotka.*

1. K uveřejnění této skromné práce na tomto místě vedla mne jednak okolnost, že uvedená věta zaujímá mezi četnými pojítky geometrie s applikovanou mathematikou místo významné, jednak také vzpominky časové. Jest tomu letos asi 70 let, co Pohlke větu známou pod jeho jménem vyslovil a dokázal. H. A. Schwarz, jeho žák, uvádí v II. svazku svých sebraných spisů, v první své vědecké práci: „Elementarer Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der Axonometrie" z r. 1863, že Pohlke kolem r. 1853 vytkl a dokázal větu, že tři v rovině pod různými úhly z jednoho bodu vycházející úsečky libovolné délky lze vždy považovati za parallelní (šikmý) průmět tří k sobě kolmých úseček stejné délky. Přesněji lze větu tu formulovati takto:

Tři úsečky v rovině z jednoho bodu vycházející, jež neleží všecky na jedné přímce, z nichž alespoň dvě mají konečné délky a žádná není nekonečně velká, lze vždy považovati za parallelní průmět tří k sobě kolmých úseček stejné délky, tvořících trojhran.

Jsou-li OX, OY, OZ uvedené tři délky v rovině, tu jsme vyloučili především případ, kdy jeden z bodů X, Y, Z jest v nekonečnu; neboť pak by byly paprsky promítající rovnoběžny s průmětnou a buďto by musely všecky body X, Y, Z splývati v nekonečnu, anebo by musely dvě z úseček těch ležeti v průmětně, býti k sobě kolmé a míti stejné délky. Je-li jedna z úseček OX, OY, OZ, na př. prvá, nekonečně malá, pak v mezích splývá bod X s bodem O, a tudíž jest úsečka ta průmětem úsečky nekonečně blízké paprsku promítajícímu vedenému bodem O, a naopak udává-li úsečka náležející jedné hraně zmíněného trojhranu směr promítání, jest průmětem jejím úsečka nullová na libovolné přímce průmětny, poněvadž každá rovina paprskem promítajícím položena jest jeho rovinou promítající, a věta Pohlkeova platí i v tomto případě.

Zmíněný důkaz této věty Pohlke však sám nikdy neuveřejnil, jelikož mu nebyl dosti elementární, a tak upadl důkaz ten na dlouho v zapomenutí. V r. 1877 našel a ve vídeňské Akademii věd (Sitzungsber. Bd. 76) uveřejnil K. Pelz[1]) jeden důkaz věty Pohlkeovy,

---

[1]) 16. června t. r. bylo tomu 15 let, co zemřel tento vynikající geometr český, stejně originelní jako myslitel, jako učitel i jako povaha a osobnost.