Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bohumil Machytka

Některé vztahy a grupy biracionálních transformací na obecné rovinné křivce rodu 1 [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 136--144

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109369

bien le théodolite magnétique. L'auteur décrit non seulement, d'une manière assez détaillée, les instruments, mais explique aussi, en détail, la théorie de la mesure, pour faciliter le travail à tout qui serait obligé d'exécuter de telles mesures.

Některé vztahy a grupy biracionálních transformací na obecné rovinné křivce rodu 1.

Napsal Dr. *Boh. Machytka.*

Na obecné algebraické rovinné křivce n-ho stupně C^n rodu $p=1$ (eliptické) existují jak známo dva druhy jednojednoznačných transformací. Transformace 1. druhu jsou involutorní a tvoří ∞^1 úplných lineárních soustav bodových g^1_2. Transformace 2. druhu jsou obecně neinvolutorní, jest jich rovněž ∞^1, jsou navzájem záměnné a tvoří grupu; značme je symbolem E. Součin vytvořený z několika transformací obou druhů dává jak známo transformaci druhu 1., resp. 2., dle toho, je-li počet transformací 1. druhu v součinu obsažených číslo liché, resp. sudé.

Bodové páry, kterékoliv určité transformace E_1 druhého druhu převádí každá involuce g prvého druhu v bodové páry, jež si odpovídají v téže korespondenci E_1, avšak v pořádku opačném. Symbolicky vyjádřeno: $g . E_1 . g \equiv \overset{-1}{E_1}$. Odtud plyne přímo známá konstrukce bodových párů korespondence E na obecné rovinné křivce C^3. Transformujeme-li bodové páry korespondence E_1 kteroukoliv jinou transformací 2. druhu E_2, obdržíme zřejmě bodové páry téže korespondence E_1. Komutativnost transformací 2. druhu dává totiž přímo relaci: $\overset{-1}{E_2} . E_1 . E_2 \equiv E_1$. Z věty o součinu několika transformací plyne poznatek, že bodové páry určité involuce 1. druhu g' převádí každá transformace kteréhokoliv druhu v bodové páry involuce 1. druhu g'', obecně ovšem různé od g'. Symbolicky:

$$g''' . g' . g''' \equiv g'' \text{ a } \overset{-1}{E} . g' . E \equiv g''.$$

Nabízí se tudíž úloha: Na křivce C^n rodu 1 dány jsou dvě involuce g' a g'' prvého druhu. Určiti veškeré jednojednoznačné transformace, které převádějí bodové páry involuce g' v bodové páry involuce g''.

Především snadno seznáme, že každá involuce prvého druhu g''', která řeší tento úkol, t. j. která hoví podmínce

$$g''' . g' . g''' \equiv g'', \tag{1}$$

vede přímo k transformaci druhého druhu E, která rovněž vyhovuje. Stačí totiž, učiníme-li

$$E \equiv g''' . g'' \equiv g' . g'''. \tag{2}$$

Identita plyne přímo, užijeme-li vztahu (1); obdržíme:

$$g''' g'' \equiv g''' g''' g' g''' \equiv g' g'''.$$

Transformujeme-li bodové páry involuce g' transformací $E \equiv g''' g''$, obdržíme vskutku bodové páry involuce g'', neboť jest vzhledem k relaci (1): $\overset{-1}{E}.g'.E \equiv g'' g''' g' g''' g'' \equiv g''.g''.g'' \equiv g''$.

A opačně: Každá korespondence E, která hoví podmínce

$$\overset{-1}{E} g' E \equiv g'', \qquad (3)$$

vede k takové involuci g'''. Stačí, nalezneme-li g''' tak, že jest $g' \cdot g''' \equiv E$, čemuž lze vždy vyhověti, neboť všechny korespondence 2. druhu lze vytvořiti jako součin dvou involucí prvého druhu, z nichž jedna je pevná. Jest tudíž

$$g''' \equiv g' E. \qquad (4)$$

Potom jest skutečně $g''' g' g''' \equiv g' E g' g' E \equiv \overset{-1}{E} g' E \equiv g''$, neboť, jak svrchu bylo řečeno, platí relace $g' E g' \equiv \overset{-1}{E}$. Z poslední řady identit však plyne přímo $g' . E^2 \equiv g''$, a tudíž

$$E^2 = g' \cdot g''. \qquad (5)$$

Tím dána jest korespondence E a tudíž i příslušná involuce g'''.

Libovolnému bodu X na křivce zvolenému odpovídá v dané involuci g' bod Y a tomuto odpovídá involucí g'' bod, který označme Z'. Symbolicky: $X \dots (g') \dots Y \dots (g'') \dots Z'$. Hledaná korespondence E převádí body X, Y v bodový pár X', Y' involuce g''. Pak jest $X \dots (E) \dots X' \dots (E) \dots X''$, a tudíž vzhledem k (5), jest $X'' \equiv Z'$. Znajíce body X, X'', které si odpovídají v korespondenci $g' g'' \equiv E^2$, můžeme určiti bod X' a tudíž hledanou transformaci E. Jde tedy, obrazně řečeno, o „půlení vzdálenosti" bodů X, X'' měřené na křivce transformací druhého druhu.[1])

Příslušná involuce g''' dána jest potom, vzhledem ke vztahu (4), bodovým párem X, Y', nebo, což jest totéž, párem Y, X'. Převádí tedy tato involuce g''' bodový pár X, Y involuce g' opět v bodový pár Y', X' involuce g''.

Involuci tuto můžeme snadno sestrojiti.

Na rovinné křivce C^n rodu $p = 1$ buď dána involuce 1. druhu g' bodovým párem A, B, a involuce g'' párem C, D. Involuce tyto obsaženy jsou v každé úplné lineární soustavě bodové g_3^2, kterou na křivce sestrojíme.

---

[1]) Užívám obrazného rčení dle F. Kleina: Body $X_1, X_2, X_3, \dots X_n$, které vznikly na křivce z bodu X transformacemi $T, T^2, T^3, \dots T^n$, mají od bodu X „vzdálenosti" 1, 2, 3, ... n.

· Viz na př. F. Klein: Gesammelte math. Abhandlungen I. — Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. S. 264.

Za tím účelem vytkněme ke křivce C^n system adjungovaných křivek Σ_l stupně l-ho, t. j. křivek, které mají v každém r-násobném bodě křivky C^n bod nejméně $(r-1)$-násobný. Při tom jest vždy $l \geqq n-2$. Lineární system tento obsahuje ∞^R křivek l. stupně a vytíná na C^n úplnou lineární soustavu bodovou g^r_{r+1}. Při tom jest obecně $R > r$; toliko v případě, kdy jest $l < n$, jest $R = r$.[2]) Dimense R, r lineárního systému adjungovaných křivek Σ_l a příslušné úplné lineární soustavy bodové g^r_{r+1} lze určiti vždy obecně, neboť všechny mnohonásobné body křivky C^n dávají pro adjungovanou křivku l. stupně, kde $l \geqq n-3$, lineární podmínky na sobě nezávislé.[3])

Položme nyní danými body A, B křivky C^n a třetím bodem P_1 na C^n libovolně zvoleným, jednu adjungovanou křivku C_1^l lineárního systemu Σ_l. Lze tak vždy učiniti, neboť můžeme stupeň l zvoliti dostatečně velikým. Ostatně výpočtem seznáme, že pro každé $l \geqq n-2$, dimense r soustavy bodové g^r_{r+1} vytvořené systemem Σ_l hoví vždy podmínce $r \geqq 3$, jakmile stupeň dané pevné křivky C^n jest $n \geqq 4$. Pro $n = 3$ stačí, volíme-li $l = 2$. Křivka C_1^l, procházející body A, B, P_1, vytíná na pevné křivce C^n, — nepřihlížejme ke společné jim skupině bodů mnohonásobných, — určitou další skupinu bodovou H, která obsahuje $r-2$ bodů. Při tom jest důležito, že tuto skupinu bodovou H můžeme předem, až na jeden její bod, zvoliti na C^n libovolně. Jest tedy konstrukce její lineární. Všechny adjungované křivky systemu Σ_l, které procházejí touto skupinou bodovou H, tvoří lineární system S_l a vytínají na křivce C^n úplnou lineární soustavu bodovou g^2_3. Položme nyní podobně danými body C, D, které určují na C^n druhou danou involuci g'', kteroukoliv adjungovanou křivku lineárního systemu S_l.[4]) Tato křivka seče C^n v dalším jediném určitém bodě, který označme P_2. Pak jsou skupiny bodové (A, B, P_1) a (C, D, P_2) navzájem ekvivalentní. Pišme symbolicky $(A, B, P_1) \equiv (C, D, P_2)$. Každá z nich jest residuální ke skupině H. Adjungované křivky lineárního systemu S_l procházející pevným bodem Q na křivce C^n jinak obecně zvoleným, tvoří lineární system, — značme ho stručně S^l_Q, — a vytínají na C^n involuci g^1_2. Kterýkoliv bodový pár této involuce tvoří

---

[2]) Lineární soustava bodová g^r_m, vytvořená na křivce C^n lineárním systemem křivek Σ, má dimensi r jen tehdy menší, než-li je dimense R systemu Σ, jestliže se v systemu Σ nalézají takové křivky, které jsou složené a mají danou křivku C^n za součást. Viz Severi-Löffler: Algebraische Geometrie. Str. 65, 66.

[3]) Severi-Löffler: Alg. Geom. str. 114, 129.

[4]) Je-li $l < n$, jest tato křivka jen jediná, neboť dimense lineárního systemu S_l jest potom rovna 2, takže máme síť adjungovaných křivek. Je-li specielně $n = 3$, můžeme se bez újmy obecnosti omeziti na případ nejjednodušší a zvoliti $l = 1$, takže příslušný lineární system S_1 se redukuje na soustavu ∞^2 přímek roviny, které na křivce C^3 vytínají příslušnou lineární soustavu bodovou g^2_3 složenou z bodových trojic ležících v přímce.

s bodem Q trojici bodovou, která je residuální ke skupině H a tudíž ekvivalentní ke skupině (A, B, P_1) a (C, D, P_2). Je-li $l < n$, přejde tento system S_Q^l ve svazek křivek adjungovaných.

Jest tedy involuce g', která jest dána bodovým párem A, B, na křivce C^n vyťata lineárním systemem $S_{P_1}^l$, a druhá involuce g'', určená párem C, D, lineárním systemem $S_{P_2}^l$. Hledaná involuce g''' která převádí bodové páry involuce g' v páry involuce g'', jest potom vytvořena lineárním systemem adjungovaných křivek $S_{P_3}^l$, kde P_3 jest určitý neznámý bod křivky C^n.

V systemu adjungovaných křivek S_l vytkněme nyní křivku, která prochází body P_1 a P_2 a náleží tudíž oběma systemům $S_{P_1}^l$ a $S_{P_2}^l$. Křivka ta seče C^n v dalším jediném určitém bodě U. Pak máme ekvivalentní bodové skupiny

$$(A, B, P_1) \equiv (C, D, P_2) \equiv (P_1, P_2, U).$$

Involuce g''' převádí bod P_2 v bod, který označme L, a bod U v bod K. Pak jest:

$$(P_3, P_2, L) \equiv (P_3, U, K) \equiv (P_1, P_2, U). \tag{6}$$

Ježto body U, P_2 tvoří bodový pár involuce g', musí korespondenční body K, L tvořiti bodový pár involuce g''. Jest tedy

$(K, P_2, L) \equiv (P_1, P_2, U)$ a tudíž vzhledem k (6)
$(K, P_2, L) \equiv (P_3, P_2, L)$.

Jest tedy nutně $K \equiv P_3$, takže relaci (6) můžeme psáti:

$$(P_3, U, P_3) \equiv (P_1, U, P_2).$$

Hledaný bod P_3 jest dvojným bodem involuce 1. druhu g_2^1, kterou na křivce C^n vytíná lineární system křivek S_U^l, t. j. dvojným bodem involuce určené bodovým párem P_1, P_2. Při tom jest konstrukce bodu U lineární. Involuce g_2^1 má čtyři body samodružné, existují tudíž čtyři polohy pro bod P_3. A naopak: Každý bod P_3, který jest dvojným bodem involuce g_2^1 určené na křivce C^n bodovým párem P_1, P_2, vede k involuci g''' vyťaté na C^n lineárním systemem adj. křivek $S_{P_3}^l$, která převádí bodový pár U, P_2 involuce g' v bodový pár P_3, L involuce g'' a tudíž involuci g' v g''.

Každá nalezená involuce g''' vede přímo k příslušné korespondenci E, která úlohu rovněž řeší. Nalezli jsme $E \equiv g' g''' \equiv g''' g''$.

Odpovídá tedy bodu:

$M \equiv P_2 \ldots\ldots (g') \ldots\ldots U \ldots\ldots (g''') \ldots\ldots P_3 \equiv M'$, a bodu
$M' \equiv P_3 \ldots\ldots (g''') \ldots\ldots U \ldots\ldots (g'') \ldots\ldots P_1 \equiv M''$.

Přiřazuje tudíž hledaná korespondence E, převádějící involuci g' v g'', bodu $M \equiv P_2$ bod $M' \equiv P_3$ a tomuto opět bod $M'' \equiv P_1$.

Nalezený bod P_3 „půlí“ tudíž „vzdálenost“ daných bodů P_2, P_1 měřenou na křivce jednoznačnou korespondencí druhého druhu E. Máme tedy výsledek:

Úloha určiti jednojednoznačnou korespondenci druhého druhu E, je-li dána její druhá mocnina E^2 přiřazující danému bodu M určitý bod M'', jest obecně čtyřznačná. Bod M', který v hledané korespondenci E odpovídá bodu M, jest dvojným bodem involuce prvého druhu g^1_2 určené bodovým párem M, M''.

Pro bod M' existují tudíž čtyři polohy: značme je M'_i ($i = 1$, 2. 3, 4). Polohám těmto přísluší čtyři hledané korespondence 2. druhu E_i. Jestliže jedna takto nalezená korespondence E_k, která převádí bod M v M'_k, jest inversní k druhé E_l, jež převádí M v M'_l, pak obě tyto korespondence dávají v podstatě touž transformaci. Pak jest nutně daná korespondence E^2, v níž odpovídá bodu M bod M'', binárně cyklická čili involutorní. Nalezené korespondence E_i redukují se v tomto případě v podstatě (nepřihlížíme-li k jejich inversím) jen na dvě a jsou kvaternárně cyklické.

Mimo to jsme seznali:

Existují čtyři involuce prvého druhu g''' a čtyři jednojednoznačné korespondence druhého druhu E, které převádějí bodové páry involuce g' v páry involuce g''. Je-li involuce g' dána svým bodovým párem A, B a involuce g'' párem C, D, jest konstrukce hledaných transformací tato: Na dané křivce C^n vytkněme kteroukoliv jednu úplnou lineární soustavu bodovou g^2_3 a sestrojíme její ekvivalentní skupiny bodové $(A, B, P_1) \equiv (C, D. P_2)$. Involuce prvého druhu g^1_2, která jest na C^n určena bodovým párem P_1 P_2 má čtyři body dvojnásobné P_3, z nichž každý vede k jedné hledané involuci g''' a jedné korespondenci E. Involuce g''' skládá se z bodových párů, které doplňují bod P_3 v bodové trojice vytknuté lineární soustavy bodové g^2_3. Příslušná korespondence $E \equiv g' g''' \equiv g''' . g''$ dána jest potom bodovým párem P_2, P_3, nebo, což jest totéž, párem P_3, P_1.

Vytkněme dvojné body dané involuce g'; značme je D'_1, D'_2, D'_3, D'_4 a skupinu jejich značme stručně (D'). Podobně značme skupinu dvojných bodů D_1'', D_2'', D_3'', D_4'' involuce g'' znakem (D'').

Každá ze čtyř nalezených involucí g''' a příslušných jednoznačných korespondencí E převádí nutně dvojný bod D_i' involuce g' v dvojný bod D_k'' involuce g'', t. j. převádí Jacobiho skupinu dvojných bodů (D') v Jacobiho skupinu dvojných bodů (D''). Ze vztahu $E \equiv g' g'''$ pak plyne přímo: Převádí-li involuce g''' dvojný bod D_i' v bod D_i'', převádí příslušná korespondence E týž dvojný bod D_i' v tentýž bod D_i''. Involuce g''' a příslušící k ní korespondence E mají společné čtyři bodové páry D_i', D_i''. ($i = 1, 2, 3, 4$).

Čtyři involuce prvého druhu g_i''' a k nim příslušné čtyři korespondence druhého druhu E_i, které převádějí danou involuci g'

v druhou involuci g'', převádějí Jacobi-ho skupinu (D') dvojných bodů involuce g' ve skupinu (D'') dvojných bodů involuce g''. Převádí-li korespondence E_i dvojný bod D_1' involuce g' ve dvojný bod D_i'' involuce g'', tu tytéž body v sebe převádí příslušná involuce g_i'''. Ze skupin bodových (D') a (D'') lze vytvořiti 16 bodových párů D_k', D_l'' $(k, l = 1, 2, 3, 4)$ jež lze rozděliti ve 4 skupiny, z nichž každá obsahuje 4 bodové páry. Každá tato skupina se skládá ze společných 4 bodových párů jedné involuce g_i''' a k ní příslušící jednojednoznačné korespondence E_i.

Z úvahy předchozí plyne mimo to poznatek: *Involuce prvého druhu g a obecná jednoznačná korespondence E druhého druhu mají čtyři společné bodové páry. Sestrojíme je takto: Určíme involuci g' z podmínky $E \equiv g' . g$, čili $g' \equiv E . g$. Dvojným bodům (D') involuce g' přiřazuje potom korespondence E i involuce g tytéž body (D'').* Jest to zřejmo z toho, že involuce g i korespondence E převádějí involuci g' v touž involuci g''.

Jestliže obě dané involuce splynou $g' \equiv g''$, jest $P_2 \equiv P_1$, jeden ze čtyř nalezených bodů P_3 přejde v bod P_1, jedna z nalezených čtyř involucí g_i''' přejde v danou involuci g', a příslušící k ní korespondence E přejde v identitu. Ostatní tři korespondence E jsou binárně cyklické čili involutorní, neboť jest $E \equiv g' g''' \equiv g''' g'$ a tudíž $E^2 = 1$. Identita, involuce 1. druhu g', tři binárně cyklické korespondence 2. druhu E a k nim příslušící tři další involuce prvého druhu g_i''' tvoří grupu G_8 jednojednoznačných transformací, které reprodukují danou involuci g' a tudíž i skupinu (D') čtyř jejich dvojných bodů.

Abychom určili některé vlastnosti této grupy, zaveďme označení. Danou involuci prvého druhu značme g a dvojné body její buďtež D_1, D_2, D_3, D_4. Grupa G_8 reprodukující tuto involuci g a její skupinu Jacobi-ho (D), skládá se z identity, tří binárně cyklických (involutorních) korespondencí druhého druhu $E_{1,2}, E_{1,3}, E_{1,4}$ a čtyř involucí prvého druhu $g \equiv g_{1,1}, g_{1,2}, g_{1,3}, g_{1,4}$. Při tom příslušné indexy značí, že korespondence $E_{1,k}$ i involuce $g_{1,k}$ převádějí dvojný bod D_1 involuce g ve dvojný bod D_k a zbývající dva dvojné body D_h a D_l též navzájem vyměňují. (Indexy $(k, h, l$ jsou navzájem různé a mají některou z hodnot 2, 3, 4). Involuce $g_{1,1}$ jest zřejmě danou involucí g a korespondence $E_{1,1}$ dává identitu.

Nejprve snadno seznáme, že daná involuce g v grupě G_8 nehraje žádnou zvláštní roli, neboť grupa G_8 reprodukuje též kteroukoliv jinou involuci prvého druhu $g_{1,k}$ v grupě obsaženou.

Involuce $g_{1,k}$ má totiž bodový pár D_1, D_k, který převádí involuce g a korespondence $E_{1,k}$ v týž bodový pár, a kterákoliv další transformace grupy G_8 v bodový pár D_l, D_h, jenž však patří opět involuci $g_{1,k}$; grupa G_8 reprodukuje tudíž každou involuci $g_{1,k}$. Poněvadž bodové páry binárně cyklické korespondence E převádí každá involuce prvého druhu g_2^1 a tudíž i každá korespondence E

opět v bodové páry téže binárně cyklické korespondence E, máme poznatek:

Každá transformace grupy G_8 jest transformacemi této grupy reprodukována.

Dále snadno seznáme, že transformace grupy G_8 jsou komutativní. Především jest zřejmo, že $g_{1,k} \cdot g_{1,h} \equiv g_{1,h} \cdot g_{1,k}$. Máme totiž dle svrchu uvedeného označení:

$$D_1 \ldots\ldots (g_{1,k}) \ldots\ldots D_k \ldots\ldots (g_{1,h}) \ldots\ldots D_l,$$

$$D_1 \ldots\ldots (g_{1,h}) \ldots\ldots D_h \ldots\ldots (g_{1,k}) \ldots\ldots D_l,$$ odkud plyne přímo

$$g_{1,k} \cdot g_{1,h} \equiv g_{1,h}\, g_{1,k} \equiv E_{1,l}. \tag{7}$$

Odtud plyne však přímo důsledek

$$E_{1,l} \cdot g_{1,h} \equiv g_{1,h} \cdot E_{1,l} \equiv g_{1,k}. \tag{8}$$

Podobně obdržíme touž cestou:

$$g_{11} \cdot g_{1,k} \equiv g_{1,k} \cdot g_{11} \equiv E_{1,k} \tag{9}$$

$$g_{11}\; E_{1,k} \equiv E_{1,k}\, g_{11} \equiv g_{1,k} \tag{10}$$

$$g_{1,k}\, E_{1,k} \equiv E_{1,k}\, g_{1,k} \equiv g_{11}. \tag{11}$$

Tím dány jsou přímo podgrupy grupy G_8:

Především jest to komutativní podgrupa 4. stupně:

$$1;\; E_{1,2},\; E_{1,3},\; E_{1,4}$$

složená z *binárně cyklických korespondencí 2. druhu.*

Z nalezených vztahů 9), 10), 11) máme přímo *další tři komutativní podgrupy 4. stupně:*

$$1,\; g_{1,1},\; g_{1,k},\; E_{1,k}, \qquad \text{kde } k = 2, 3, 4,$$

a ze vztahů 7), 8) opět *tři další komutativní podgrupy 4. stupně*

$$1,\; g_{1,k}, g_{1,h}, E_{1,l},$$

při čemž indexy k, h, l jsou různé cyklické permutace prvků 2, 3, 4. Každá z posledně nalezených šesti komutativních podgrup 4. stupně skládá se z identity, ze dvou involucí prvého druhu a binárně cyklické (involutorní) korespondence 2. druhu, jež jest jejich součinem vytvořena. Máme tedy výsledek:

Na obecné křivce C^n rodu 1 existuje ∞^1 grup G_8 jedno-jednoznačných korespondencí, složených z identity, tři binárně cyklických (involutorních) korespondencí druhého druhu E a čtyř involucí prvého druhu g_2^1. Každá involuce g_2^1 prvého druhu na křivce C^n sestrojená jest reprodukována jednou takovouto grupou G_8 transformací. A opačně reprodukuje každá takováto grupa G_8 všechny involuce v ní obsažené. Jacobi-ho čtyř- bodové skupiny dvojných bodů všech čtyř involucí prvého druhu v grupě obsaže-

ných jsou tudíž vůči grupě G_8 invariantní. Grupa G_8 obsahuje jednu podgrupu 4. stupně složenou z identity a tří binárně cyklických korespondencí druhého druhu E, mimo to dalších šest podgrup 4. stupně, z nich každá obsahuje dvě involuce prvého druhu g a binárně cyklickou korespondenci druhého druhu E, jež jest jejich součinem vytvořena. Transformace grupy G_8 a tudíž i všech podgrup jsou komutativní.

Aplikujeme-li tyto obecné poznatky, týkající se alg. rovinných křivek rodu 1 na křivky určitého stupně, dostáváme řadu vět zvláštních. Je-li na př. daná křivka kubickou křivkou rovinnou C^3, obdržíme věty, jež vyslovují jednak vlastnosti tří čtveřin bodových, které obdržíme, vedeme-li ze tří bodů křivky C^3 ležících v přímce tečny k této křivce, anebo na př. vlastnosti skupiny 16 bodů, jež mají společný druhý bod tečnový. Některé takto získané vlastnosti jsou známy a obecné věty svrchu vyslovené jsou tudíž jejich generalisacemi.[5])

Je-li daná křivka 4. stupně se dvěma dvojnými body, pak jest na př. jedna takováto grupa G_8 na této křivce C^4 vytvořena grupou G^8 sedmi kvadratických rovinných transformací, jež křivku C^4 reprodukují a mají dva hlavní body v bodech dvojnásobných křivky C^4.[6]) Lze tedy některé vlastnosti, jež se týkají skupin bodových, vytvořených na této křivce C^4 touto grupou G_8 kvadratických rovinných transformací, sevšeobecniti.

O některých dalších vztazích a grupách pojednám v příštím článku.

*

Sur des rapports entre les transformations birationnelles sur une courbe plane générale de genre un.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur étudie, sur une courbe elliptique générale, quelques propriétés des involutions uniunivoques de la première espèce g_2^1 et des correspondances uniunivoques E, qui ne sont pas en général des involutions, de la seconde espèce. Il trouve les résultats principaux suivant:

1. Il y a, en général, quatre involutions g''' de la première espèce et quatre correspondances univoques E de la deuxième espèce, qui transforment les couples d'une involution g' de la pre-

[5]) Tak na př. jest většina vět uvedených na str. 210—216 v učebnici Durège: Curven 3. Ordnung, důsledkem vět svrchu vyslovených.

[6]) Obecná rovinná křivka C^4 se dvěma dvojnými body jest reprodukována 9 kvadratickými transformacemi; sedm z nich má dva hlavní body v bodech dvojnásobných, třetí mimo ni a tvoří s identitou grupu G_8. Další dvě, — inverse Bertiniho — do grupy té nenáleží. Viz na př. B. Bydžovský: Kvadr. transf. obecné rovinné křivky bikvadratické rodu 1. Rozpravy České Akademie tř. II., roč. 29, čís. 17.

mière espèce donnée en couples d'une autre involution g'' donnée. L'auteur trouve des rapports et des constructions qui s'y rattachent.

2. L'involution g de la première espèce et une correspondance de la deuxième espèce E générale ont, en général, quatre couples communs; on les obtient en déterminant les points unis de l'involution $g' \equiv E \cdot g$.

3. Sur une courbe elliptique il existe ∞^1 de groupes G_8 de correspondances uniunivoques, contenant, outre l'identité, trois involutions E de la deuxième espèce et quatre involutions g_2^1 de la première espèce. Toute involution g_2^1 de la première espèce se reproduit par un tel groupe G_8. Inversement tout groupe G_8 reproduit toutes les involutions g_2^1 qu'il contient. Les groupes de Jacobi des points unis des quatre involutions de la premiere espèce contenues dans le groupe G_8, sont invariants pour ce groupe. Le groupe G_8 contient un sousgroupe du 4^e^ ordre contenant trois involutions E de la deuxième espèce, six sousgroupes du 4^e^ ordre, dont chacun contient deux involutions de la première espèce et une involution E de la deuxième expèce, produit des deux premières involutions. Les transformations du groupe G_8 sont commutatives.

Zrcadlový přístroj k určení okamžiku, kdy dvě libovolné hvězdy mají stejnou zenitovou vzdálenost.

Napsal Dr. *Jaroslav Pantofliček.*

Užije-li se k měření dle methody Talcott-Harrebowy theodolitu, nedá se zaměřiti na obě hvězdy najednou. Pozorování následují za sebou v malém časovém intervalu.

Snadno se však dá sestrojiti přístroj, kterým lze obě hvězdy pozorovati najednou. Přístroj musí míti rtuťový horizont a buď 1. jedno zrcadlo nebo tříboký hranol nebo 2. dvě zrcadla nebo jeden hranol čtyřboký. Alternativních řešení je několik.

Prof. J. Svoboda hovořil se mnou kdysi o svém projektu, užíti jednoho zrcadla nad rtuťovým horizontem v meridiánu k určení zeměpisné šířky. Úprava tato nehodí se však dobře pro můj účel, protože kolmost zrcadla k horizontu dá se verifikovati jedině druhým pozorováním a i výběr hvězd se velice zmenšuje v mém případě podmínkou symetrické polohy k rovině dříve již daného azimutu.

Některé vady má konstrukce, při níž položí se dvě zrcadla kolmá k sobě nad rtuťový horizont do takové polohy, že průsečnice obou zrcadel je vodorovná (obr. 1.). Paprsky z hvězdy E_1 odráží se od horizontu a zrcadla z_1, paprsky z hvězdy E_2 od zrcadla z_2 a vytvoří v dalekohledu obrazy obou hvězd, jež se stotožní