Arnošt Dittrich
Methoda Hamilton-Jakobiho v mechanice Einsteinově

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 38--60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109367

Methoda Hamilton-Jakobi-ho v mechanice Einsteinově.

Napsal Dr. *Arnošt Dittrich.*

Převaha široké relativistiky Einsteinovy vůči fysice dosavadní jeví se — kromě jiného — v tom, že lze lecos odvoditi, co klassická teorie jen musila vzíti na vědomí. Tak dokázali na př. Levi-Civita [1]) a Weyl Fermatův princip, že světlo dorazí k cíli za nejkratší čas, pro statická pole gravitační. Podobně lze pro slabé statické pole gravitační a volný pohyb jediného hmotného bodu odvoditi princip Hamiltonův. [2])

Je to sice jen zvláštní případ principu, který klassická mechanika bere za základ, nevolí-li důsledek s principem Hamiltonovým rovnocenný. Ale již tento částečný úspěch vzbuzuje naději, že relativistika by mohla míti význam pro pochopení některých důsledků a zvláštností principu Hamiltonova.

Ujasněme si nejprve poměr klassické mechaniky k relativistice. Jako Euklidova geometrie, tak jest i klassická mechanika současně přírodní vědou a matematickou teorií, to jest logicky bezvadnou myšlenkovou stavbou. Proto zůstanou i pro Einsteina Euklidova geometrie a klassická mechanika větvemi ryzí matematiky, oné matematiky, pro kterou existuje vše, v čem není logického sporu. Pochybnosti relativistů týkají se jen užitelnosti Euklidovy geometrie a klassické mechaniky ve vědách přírodních. Přibližnou transienci vzorců nepopírají, — jinak by nauky ty nebyly vznikly. Ale jest otázka, je-li transience dokonalá, vyhovují-li vzorce pozorováním přesně. Tyto pochybnosti o užitelnosti vzorců ve vědách přírodních neupírají však Euklidově geometrii a klassické mechanice právo na immanenci v duchu matematika. Smí se však pochybovati o tom, zda geometrie světelných paprsků a našich tuhých těles jest opravdu Euklidova,[3]) i když tuto geometrii pokládáme za logicky bezvadnou, což algebraickými úvahami r. 1899 zabezpečil Hilbert. Byl to omyl, když matematikové pochybnosti takové pokládali skoro za ublížení. Vždyť se nepochybovalo o jejich výkonnosti v dedukcích, ale o transcienci jejich myšlenkové práce na přírodu. Zda tuhý dělený kruh na theodolitu jest tuhým ve smyslu Euklidovy geometrie, jest otázkou fysikální, jež je mimo dosah subjektivní říše logiky v duši matematikově. [4])

[1]) Litt. viz Pauli „Relativitaetstheorie“ 716, 1921. Velk´ Teubnerovy encyclopaedie mathematiky, sv. V., 2., seš. 4.

[2]) Weyl „Raum-Zeit-Materie“. Vydání 4. Str. 220. 1921, neb Laue „Die Relativitaetstheorie“ II. 186. 1921.

[3]) Einstein „Geometrie und Erfahrung“. 8 a 10. 1921.

[4]) Dittrich „Zur Frage nach d. Geometrie der Lichtstrahlen u. starren Koerper“, Ostwaldovy Annaly. 92. 1910.

Klassická mechanika jako logická immanentní stavba dosáhla velkolepé výše. Co tu pilností, důvtipem a tuhou logickou prací celých generací bylo dobyto, zůstává naším vědeckým majetkem i po Einsteinově rozšíření Newtonovy fysiky.

Takovým logickým úspěchem klassické mechaniky jest na př. metoda Hamilton-Jakobi-ho. Že Einstein sám považuje ji i na dále za závaznou, je viděti nejlépe z toho, že se pokusil o novou dedukci tohoto teorému z představ hydromechanických.[5]) Podobně Laue užívá beze všeho při odvození geodetických čar Einsteinových jako formální pomůcku principu Hamiltonova a rovnic Lagrangeových.[6]) Je to asi takový krok, jako když Kepler pohyb měsíce vystihl tím, že použil přece jen jeden epicykl, ač jinak názory Aristotelo-Ptolemaiovské zamítal. Užil epicykl právě jen jako geometrickou pomůcku, jako náhradu za — teprve později objevené — Fourierovy řady. Idea epicyklu jako pomůcka k vystižení libovolné křivky, nezávisí právě nijak na tom, zda pokládáme s Aristotelem prostor za tuho spojený se zemí, či zda užíváme prostoru Koperníkova.

Teorém Hamilton-Jakobi-ho těží ze speciálního charakteru differentiálních rovnic klassické mechaniky. Tyto lze vždy pokládati za rovnice charakteristik jisté partiální rovnice differentiální stupně prvého, píšeme-li je ve formě kanonické.

Soustava měj n stupňů volnosti. Poloha určena všeobecnými souřadnicemi q_ν ($\nu = 1 \ldots n$), pohyb dán derivacemi souřadnic dle času, všeobecnými složkami rychlosti q'_ν; kinetická energie soustavy T je kvadratická dle q'_ν s koefficienty na čase t a souřadnicích q_ν závislými.

Stav soustavy v určitém okamžiku t určen polohami q_ν a rychlostmi q'_ν. Výhodnější jest však nahraditi rychlosti impulsy

$$p_\nu = \frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\,; \nu = 1 \ldots n,$$

protože rovnice mechanické zní pak prostě

$$\frac{dq_\nu}{\dfrac{\partial H}{\partial p_\nu}} = \frac{dp_\nu}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_\nu}} = dt;\ \nu = 1 \ldots n. \tag{1}$$

Funkce H závisí na t, q_ν, p_ν. Vyvodí se z výrazů pro kinetickou a potentiální energii.[7])

Zůstanou kanonické rovnice (1) v Einsteinově mechanice gravitačních polí zachovány či je ztratíme?

[5]) Einstein „Eine Ableitung des Theorems von Jakobi". Berl. Ber. 606. 1917.

[6]) Laue „Relat", II. 66. 1921.

[7]) Charlier „Die Mechanik d. Himmels". I. § 8. 56, 1902.

Souřadnice prostoro-časového čtyřrozměrna buďtež x^1, x^2, x^3, x^4, kde indexy umístěny nahoře, aby se kovariance důsledně mohla značiti spodními indexy. Metrika světa dána elementem ds, kde

$$ds^2 = \Sigma g_{ik}\, dx^i\, dx^k.$$

Pohyb lehoučké hmoty, jež nepůsobí znatelné zkřivení čtyřrozměrna, které by se změnou Einsteinových gravitačních potenciálů [8]) g_{ik} projevovalo, dán geodetickou čarou, podél které

$$\delta \int ds = 0$$

pro libovolnou variaci čáry mezi pevným východiskem a pevným cílem.

Pokládejme

$$x^i = f^i(\tau);\ i = 1 \,..\, 4,$$

za funkce parametru τ. Pak jest

$$f \equiv \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \sum_{i,k}^{1..4} g_{ik}\, \dot{x}^i \dot{x}^k$$

a geodetické čáry dostaneme z

$$\delta \int d\tau \sqrt{f} = 0.$$

Eulerovy rovnice počtu variačního zní v tomto případě [9])

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i}}{2\sqrt{f}} - \frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}}{2\sqrt{f}} = 0;\ i = 1 \,..\, 4. \qquad (2)$$

Pro libovolnost parametru τ jest i f jako funkce tohoto parametru libovolnou funkcí. Můžeme ji proto bez újmy obecnosti předepsati stálou hodnotu

$$f = C.$$

Tím se Eulerovy rovnice zjednoduší na

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0;\ i = 1 \,..\, 4. \qquad (3)$$

$$f \equiv \sum_{i,k}^{1..4} g_{ik}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^k.$$

Rovnice ty lze interpretovati v rámci klassické mechaniky. Mají tutéž formu jako pohybové rovnice soustavy se čtyřmi stupni volnosti. Vzniká pak následující analogie:

---

[8]) Einstein „Entwurf e. verallgemeinten Relativitaetstheorie u. e. Th. d. Gravitation". 7. 1913.

[9]) Neumann, „Vorl. z. Einf. in d. Relativitaetstheorie". 196. 1922.

1. Einsteinovy souřadnice prostoro-časového kontinua.	1. Souřadnice mechanické soustavy se čtyřmi stupni volnosti.

$$x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4.$$

2. Parametr τ, neodvisle proměnná definovaná relací $f \equiv \Sigma\, g_{ik}\, \dot{x}^i \dot{x}^k = C.$	2. Čas značený proti jinak v mechanice obvyklému písmenou τ.
3. Funkce f, jež stanoví metriku čtyřrozměrna.	3. Funkce f, dvojnásobná kinetická energie, homogení 2. stupně v rychlostech $\dot{x}^i$.
4. Horní rovnice (3).	4. Lagrange-ovy rovnice druhého typu, pro zvláštní případ, že potentiální energie rovná se nulle.

Tato analogie jest arci jen formální. Je sice konstanta C kladnou, pokud jde o skutečný pohyb hmoty, ale může také býti nullou, když jde o paprsek světelný. U Einsteina jest možný pohyb (světla) i když analogie kinetické energie jest trvale nullou, což by v mechanice dalo naprostý klid. Ten je ale u Einsteina vyloučen tím, že by stanovil bod v určitém okamžiku, nikoliv bod trvající na místě.

Proto nelze čekati, že snad kinetickou energií vhodně vymyšleného stroje zjednáme si mechanický obraz metriky čtyřrozměrna, gravitační deformace světa. Myslím na takovou analogii jako Boltzmannův mechanism k illustraci Maxwellových rovnic. Ale i bez této možnosti je formální analogie naše užitečnou. Na př.: Podmínkou $f = C$ připojili jsme k 4 differentiálním rovnicím (3) pátou. To jest jen tenkráte přípustno, je-li nová rovnice důsledkem dřívějších. Co praví nová relace v naší analogii? — Že kinetická energie nezávisí na čase. Je to pravda? — Ovšem. Protože potentiální energie jest nullou a kinetická neobsahuje neodvisle proměnou τ.

Malý počet, jenž Laue[10]) této otázce věnuje, lze tedy nahraditi odvoláním na rovnocennou úvahu klassické mechaniky, jíž se zabezpečuje energetický integrál pohybových rovnic.

Sledujme naši analogii dál ve směru rovnic kanonických a methody Hamilton-Jakobi-ho. Pišme však v dalším známé v levo, nové v pravo. Přísluší si navzájem.

10) Laue, „Rel.“ II. 67. 1921.

5. Impulsy všeobecných souřadnic

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i};$$

5. Kovariantní složky rychlosti

$$p_i = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} = \sum_k^{1..4} g_{ik} \dot{x}^k.$$

$$i = 1 \,..\, 4.$$

Všeobecné složky rychlosti jsou

Kontravariantní jsou

$$\dot{x}^i, \; (i = 1 \,..\, 4).$$

6. Protože potentiální energie je rovna nulle a kinetická je kvadratická a homogenní v rychlostech, zní kanonické rovnice jednoduše [11])

$$\frac{d p_i}{-\dfrac{\partial T}{\partial x^i}} = \frac{d x^i}{\dfrac{\partial T}{\partial p_i}} = d\tau \tag{4}$$

6. Protože $f = 2T$ zní obdoba vedlejších rovnic

$$\frac{d p_i}{-\dfrac{\partial f}{\partial x^i}} = \frac{d x^i}{\dfrac{\partial f}{\partial p_i}} = \frac{d\tau}{2}.$$

$$i = 1 \,..\, 4.$$

Rovnice ty jsou totožny. Proto podržíme v dalším jen relace klassické mechaniky (4), kde

$$T \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,k}^{1..4} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k,$$

pamatujíce, že impulsy pomocné soustavy jsou kovariantními složkami rychlosti:

$$p_i = \sum_k^{1..4} g_{ik} \dot{x}^k. \tag{5}$$

Funkce T musí se arci vyjádřiti jen pomocí p_i a x^i. K účeli tomu invertujeme nejprve rovnice (5), takže dostaneme

$$\dot{x}^k = \sum_i^{1..4} g^{ik} p_i. \tag{6}$$

Řešení takové jest vždy možno, protože determinant

$$g = | g_{ik} | \neq 0.$$

Jest pak dle Eulera

$$2T = \sum_k^{1..4} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} \dot{x}^k = \sum_k^{1..4} p_k \dot{x}^k,$$

[11]) Charlier, »Mech.«, 58, vzorec 7, 8.

z čeho pomocí (6)

$$T=\frac{1}{2}\sum_{ik}^{1..4} g^{ik} p_i p_k.$$

Dvojitý součet ten lze psáti jako determinant. Je-li subdeterminantem prvku g_{ik} hodnota G_{ik}, zní inverse rovnic (5)

$$g\dot{x}_k=\sum_i^{1..4} G_{ik} p_i$$

tak, že — dle relací (6) —

$$g^{ik}=\frac{G_{ik}}{g}$$

Výraz

$$T=\frac{1}{2g}\sum_{i.k}^{1..4} G_{ik} p_i p_k$$

lze však psáti souměrným determinantem [12])

$$-2Tg=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & p_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & p_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & p_3 \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & p_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 \end{vmatrix}$$

neb anullovaně

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & p_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & p_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & p_3 \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & (2T) \end{vmatrix}=0.$$

Protože T neobsahuje explicité neodvisle proměnou τ, lze kanonické rovnice (4) řešiti následující specialisací methody Hamilton-Jakobi-ho. [13]) Zavedeme funkci S souřadnic $x^1 \ldots x^4$ definovanou relací

$$dS=\sum_i^{1..4} p_i\, dx^i \tag{7}$$

tak, že

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial x^i};\ i=1..4.$$

[12]) Weber, „Lehrb. d. Algebra". I. 96, vzorec (12).

[13]) Charlier, »Mech.«, I. 65.

Z relace $f = C$ stane se tím partiální differentiální rovnice prvého stupně

$$\sum_{i,k}^{1..4} g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = C.$$

Položíme-li $C = 2h$, lze ji psáti ve formě $T = h$ neb jako determinant

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & \frac{\partial S}{\partial x^1} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & \frac{\partial S}{\partial x^2} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & \frac{\partial S}{\partial x^3} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & \frac{\partial S}{\partial x^4} \\ \frac{\partial S}{\partial x^1} & \frac{\partial S}{\partial x^2} & \frac{\partial S}{\partial x^3} & \frac{\partial S}{\partial x^4} & (2h) \end{vmatrix} = 0.$$

Nalezneme úplné řešení S této rovnice

$$S = S\ (x^1 \ldots x^4,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ h)$$

obsahující 3 na sobě nezávislé konstanty α_j a konstantu h z rovnice základní. Čtvrtá konstanta, jež přistupuje aditivně k funkci S, nás nezajímá, protože S je definováno svým totálním differentiálem (7), je beztak zatíženo neurčitou konstantou.

Řešení canonických rovnic (4) dostaneme pak ve formě

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial S}{\partial x^1} & \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} &= \beta_1 \\ p_2 &= \frac{\partial S}{\partial x^2} & \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} &= \beta_2 \\ p_3 &= \frac{\partial S}{\partial x^3} & \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} &= \beta_3 \\ p_4 &= \frac{\partial S}{\partial x^4} & \qquad \frac{\partial S}{\partial h} &= \beta_4 + \tau. \end{aligned} \tag{8}$$

V klassické mechanice jest

$$S = 2\int_0^t T\, dt, \tag{9}$$

kde t je čas. S sluje „účinnou funkcí". [14]) V Einsteinově mechanice bude

$$S = 2\int_0^\tau T\, d\tau,$$

[14]) Sommerfeld, „Atombau u. Spektrallinien", 484, 1921.

kde integrace vede se dle skutečné geodetické čáry. Dle té je ale kinetická energie stálou $T = h$ tak, že

$$S = 2h\tau = C\tau.$$

Nejde-li právě o šíření světla, kdy $C = 0$, lze položiti bez újmy obecnosti $C = 1$. Pak se neodvisle proměná místo τ značí s; sluje soukromým časem. Je to neodvisle proměná pro relativistické úvahy nejvýhodnější.

Jak je však možno, že veličina známá nám původně jen jako neodvisle proměná objeví se tu najednou jako označení funkce

$$s = S\ (x^1 \ldots x^4,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ h).$$

Všimněme si Einsteinova výkladu,[15] jak všeobecně vyjádřiti souřadnice bodu na geodetické linii nějakým parametrem λ. Zavádí λ nejdříve jako funkci souřadnic $x^1 \ldots x^4$. Tato definuje osnovu ploch, jež geodetické linie přetíná. Obecný bod geodetické linie lze pak charakterisovati onou hodnotou λ, jež přísluší ploše (3-rozměrné), v níž tento bod leží. Proto lze souřadnice x^i bodu na geodetické čáře pokládati za funkce parametru λ.

Pak zavádí místo parametru λ „oblouk“ s, měřený na geodetické linii, definovaný differentiálem ds pomocí relace

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1..4} g_{ik}\, dx^i\, dx^k.$$

O funkci souřadnic, jež by nyní odpovídala λ-plochám, nemluví. Použitím methody Hamilton-Jacobi-ho v mechanice Einsteinově jsme se však dověděli, že takové 3-rozměrné s-plochy existují. Ba nalezením těchto ploch jest pohybový problém úplně řešen, je-li

$$s = S\ (x^i,\ \alpha_j,\ h) = h\,\tau.$$

T. j. obsahuje-li funkce s vedle souřadnic x^i, ještě 3 na sobě nezávislé konstanty α_j, z nichž žádná není jen aditivní konstantou ku s, a parametr h, lze pouhým differencováním dle osmi proměných dostati integrály canonických rovnic.

Použijme našich vzorců k prozkoumání gravitačního pole vně slunce. Element ds dán pak dle Schwarzschildovy[16] integrace Einsteinových rovnic relací

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{\alpha}{r}} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2),$$

---

[15]) Einstein, „Die Grundlagen der allgemeinen Relativitaetstheorie“. 29. 1916.

[16]) Schwarzschild, „Uiber d. Gravitationsfeld. e. Massenpunktes nach d. Einsteinschen Theorie«. Berl. Ber. 47. 189. 1916.

kde značí:

t ... čas.

r, ϑ, φ ... polární souřadnice.

c ... rychlost světla.

$\frac{\alpha}{2} = 1{\cdot}47\,km = \frac{k}{c^2} M$, jest konstantou pole charakterisující.

k ... gravitační konstanta.

M ... hmota slunce.

Pro kulovou symmetrii slunečního pole budou dráhy planet rovinné. Položme předem rovinu dráhy do roviny $\varphi = 0$. Pak je trvale $\varphi = 0$, tak že

$$T \equiv \frac{1}{2}\left[c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1-\frac{\alpha}{r}} - r^2\dot{\vartheta}^2\right] = h. \tag{10}$$

Impulsy k Einsteinovým souřadnicím náležející jsou

$$p_t = c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\dot{t};\qquad p_r = -\frac{\dot{r}}{1-\frac{\alpha}{r}};\qquad p_\vartheta = -r^2\dot{\vartheta}.$$

Inversí těchto rovnic dostaneme, že

$$\dot{t} = \frac{p_t}{c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)};\qquad \dot{r} = -\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)p_r;\qquad \dot{\vartheta} = -\frac{p_\vartheta}{r^2}.$$

Eliminací rychlostí ze základní rovnice plyne

$$\frac{p_t^2}{c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)} - \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)p_r^2 - \frac{p_\vartheta^2}{r^2} = 2h,$$

což jest partiální rovnice differentiální, jejíž charakteristiky jsou Einsteinovými geodetickými čarami. Jest pak

$$dS = p_t\,dt + p_r\,dr + p_\vartheta\,d\vartheta$$

úplným differentiálem, pokládáme-li v duchu Eulerova zpracování hydromechaniky [17]) impulsy za funkce polohy t, r, ϑ. Třeba tedy řešiti rovnici

$$\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2}{c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)} - \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2}{r^2} = 2h. \tag{11}$$

---

[17]) Einstein, „Ableitung d. Theorems von Jakobi". 607. Berl. Ber. 1917.

Protože S závisí na 3 neodvisle proměných, třeba nalézti řešení závisle na dvou konstantách. Ani t ani ϑ není v rovnici differentiální obsaženo explicité. Proto lze S pokládati za lineárné dle těchto proměných tak, že

$$S = a\,c\,t + b\,\vartheta - f(r).$$

Tím jsme zadali dvě konstanty a, b. Stálému činiteli při t dali jsme tvar ac, protože se tím relace určující funkci $f(r)$ zjednoduší. Tuto dostaneme dosadivše derivace funkce S do základní rovnice (11), čím obdržíme, že

$$\frac{a^2}{1-\frac{\alpha}{r}} - \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(\frac{df}{dr}\right)^2 - \frac{b^2}{r^2} = 2\,h$$

z čeho

$$r^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^2\left(\frac{df}{dr}\right)^2 = a^2\,r^2 - b^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right) - 2\,h\,r^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right).$$

Zavedeme-li zkratku

$$N \equiv a^2\,r^2 - b^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right) - 2\,h\,r^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right) \tag{12}$$

jest

$$\frac{df}{dr} = \frac{\sqrt{N}}{r-\alpha}$$

tak že

$$f(r) = \int \frac{dr\sqrt{N}}{r-\alpha}$$

Je tedy

$$S = act + b\,\vartheta - \int \frac{dr\sqrt{N}}{r-\alpha} \tag{13}$$

Integrál obsahuje konstanty a, b, h prostřednictvím zkratky N. Jeho aditivní konstanta jest bez významu, protože S explicité v základní rovnici (11) se nevyskytuje.

Integrály stanovící geodetické čáry zní dle vzorců (8).

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{\partial S}{\partial t} & \qquad \frac{\partial S}{\partial a} &= A \\ p_r &= \frac{\partial S}{\partial r} & \qquad \frac{\partial S}{\partial b} &= B \\ p_\vartheta &= \frac{\partial S}{\partial \vartheta} & \qquad \frac{\partial S}{\partial h} &= \beta + \tau. \end{aligned} \tag{14}$$

Vyviňme nejprve relace impulsové. Použijeme-li funkce S, vzorec (13), jest

$$p_t = a\,c; \qquad p_\vartheta = b; \qquad p_r = -\frac{\sqrt{N}}{r-\alpha}.$$

Vyjádřeme impulsy rychlostmi, abychom smysl těchto relací prohlédli. Pak jest

$$c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}=ac$$

$$-r^2\frac{d\vartheta}{d\tau}=b$$

$$-\frac{\dfrac{dr}{d\tau}}{1-\dfrac{\alpha}{r}}=-\frac{\sqrt{N}}{r-\alpha}.$$

1. Prvá z těchto rovnic praví, kombinujeme-li ji se základní relací (10), že

$$a^2-\dot{r}^2-r^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\dot{\vartheta}^2=2h\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)$$

To je kvadratická relace mezi differentiály dr, $d\vartheta$, $d\tau$.

Rovnici naši lze přepsati na

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\vartheta}^2-\alpha r\dot{\vartheta}^2=\frac{2h\alpha}{r}+Const.$$

v čem poznáváme relativistické rozšíření věty o stálosti součtu z kinetické a potentiální energie. Stálost impulsu dle osy časové značí tedy větu o zachování energie.

2. Podobně poznáváme v relaci

$$-r^2\frac{d\vartheta}{d\tau}=b$$

větu rovnocennou s principem ploch v klassické mechanice.

3. Z relace pro impuls ve směru r plyne

$$\frac{dr}{d\tau}=\frac{\sqrt{N}}{r}.$$

Z toho lze integrací přímo vyjádřiti r pomocí τ. Této integrace není však zapotřebí, protože relace vyjadřující Einsteinovy souřadnice neodvisle proměnou dostaneme přímo z relací (14) druhá řada, jež zní

$$\frac{\partial S}{\partial a}=A,\quad \frac{\partial S}{\partial b}=B,\quad \frac{\partial S}{\partial h}=\beta+\tau,$$

kde

$$S=act+b\vartheta-f(r)$$

$$f(r)=\int\frac{dr\sqrt{N}}{r-\alpha}$$

$$N\equiv a^2r^2-b^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)-2hr^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right).$$

Při derivování funkce S dle a, b, h třeba pamatovati na to, že $f(r)$ obsahuje tyto veličiny prostřednictvím zkratky N. Vyviňme si proto nejprve

$$\frac{\partial f}{\partial a} = a \int \frac{r^2\,dr}{r-\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -b \int \frac{dr}{r\sqrt{N}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial h} = -\int \frac{r\,dr}{\sqrt{N}}.$$

Pohybové rovnice zní tedy

$$\begin{aligned} ct - a \int \frac{r^2\,dr}{r-\alpha} \frac{1}{\sqrt{N}} &= A \\ \vartheta + b \int \frac{dr}{r\sqrt{N}} &= B \\ \int \frac{r\,dr}{\sqrt{N}} &= \beta + \tau. \end{aligned} \tag{15}$$

Prvá rovnice stanoví závislost průvodiče na čase. Druhá určuje dráhu, třetí vyjadřuje r parametrem τ. Je to relace, jež v derivované formě se objevila jako rovnice pro impuls ve směru r.

Shledali jsme v relaci (*9*), že všeobecně pro každý gravitační pohyb Einsteinův jest $S = 2h\tau$. Přesvědčme se o tom dosazením z posledních tří rovnic do relace pro S ve vzorci (*13*). Eliminujeme-li nejdříve t a ϑ, dostaneme

$$S = aA + bB + a^2 \int \frac{r^2\,dr}{r-\alpha} \frac{1}{\sqrt{N}} - b^2 \int \frac{dr}{r\sqrt{N}} - \int \frac{dr\sqrt{N}}{r-\alpha},$$

což lze přepsati na

$$S = \text{konst.} + \int \frac{dr}{r-\alpha} \cdot \frac{a^2 r^2 - b^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) - N}{\sqrt{N}}.$$

Dosadíme-li z vzorce (12) za N, zjednoduší se integrál na

$$S = \text{konst.} + 2h \int \frac{r\,dr}{\sqrt{N}}.$$

Dle třetího z rovnic (*15*) je ale integrál ten až na aditivní konstantu roveň τ tak, že

$$S = Const. + 2h\tau.$$

Lze proto třetí relaci (*15*) nahraditi rovnicí

$$2h\tau = act + b\vartheta - \int \frac{dr\sqrt{N}}{r-\alpha}.$$

Řešíme-li problém o pohybu planetárním jest ds vždy kladný a lze bez újmy obecnosti položiti $2h = 1$, čím se N zjednoduší na

$$N \equiv a^2 r^2 - b^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) - r^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right).$$

Zajímáme-li se na př. o stáčení perihelia, chopíme se relace obsahující ϑ a r, protože dává dráhu. Jest pak

$$\vartheta + b \int \frac{dr}{r\sqrt{a^2 r^2 - b^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) - r^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}} = B.$$

Zaveďme novou proměnou

$$\varrho = \frac{1}{r}.$$

Pak jest

$$d\vartheta = b \frac{d\varrho}{\sqrt{a^2 - 1 + \alpha\varrho - b^2(\varrho^2 - \alpha\varrho^3)}}$$

a konečně

$$d\vartheta = \frac{d\varrho}{\sqrt{\frac{a^2 - 1}{b^2} + \frac{\alpha}{b^2}\varrho - \varrho^2 + \alpha\varrho^3}}.$$

Rovnice poslední liší se od aequivalentní relace drahové v klassické mechanice jen kubickým členem $\alpha\rho^3$, jehož činitel α jest velmi malý. Výraz pod kořenem lze tedy psáti ve formě

$$\alpha(\varrho_0 - \varrho)(\varrho_1 - \varrho)(\varrho - \varrho_2).$$

Zde jsou ρ_1 a ρ_2 extremní hodnoty, mezi nimiž ρ planety kolísá. Třetí kořen ϱ_0 je vůči těmto velmi veliký, protože

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{1}{\alpha}$$

je velmi velké. Odtud vycházeje získá se snadno stáčení perihelia.[18])

Jde-li o šíření světla, třeba nalézti geodetické čáry, jež jsou zároveň čarami nullovými, pro něž element ds zmizí. Tím řečeno, že v obecných úvahách předcházejících, jež platí pro libovolné h, třeba položiti

$$h = 0.$$

Křivení světla na př. dostaneme z drahové relace, z prostřední z tří rovnic (15), když v N položíme h rovno nulle. Pak bude

$$N \equiv a^2 r^2 - b^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$$

[18]) Kopff, „Grundzuige d. Einsteinschen Relativitaetstheorie", 184. 1921.

a paprsek světelný určen rovnicí

$$\vartheta + b \int \frac{dr}{r\sqrt{a^2 r^2 - b^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}} = B$$

nebo rovnocenou relací

$$d\vartheta = \frac{-dr}{r\sqrt{\frac{a^2}{b^2} r^2 + \frac{\alpha}{r} - 1}}.$$

Zaveďme zkratku Δ definovanou relací

$$\Delta^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Pak jest $\left(\frac{r^2}{\Delta^2} + \frac{\alpha}{r} - 1\right) r^2 \, d\vartheta^2 = d r^2.$

Ve veličině α ukryt vliv tíže sluneční na tvar světelného paprsku. Položíme-li

$$\alpha = 0.$$

jest $$\frac{r^4 d\vartheta^2}{\Delta^2} = dr^2 + r^2 \, d\vartheta^2$$

čili $$\frac{r^2 \, d\vartheta}{\Delta} = \sqrt{dr^2 + r^2 \, d\vartheta^2}$$

Položivše $\alpha = 0$, nabyli jsme práva na užívání Euklidovy geometrie. Zavedeme-li Descartesovy pravoúhlé souřadnice x, y, dostaneme z poslední relace, že

$$x\,dy - y\,dx = \Delta \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

tak, že differentiální rovnice paprsků světelných zní

$$xy' - y = \Delta \sqrt{1 + y'^2}.$$

To je ale známá rovnice Clairautova,[19]) jež se řeší tím, že se položí

$$y' = A,$$

kde A jest konstantou. Paprsky světelné v rovině středem slunce jdoucí seskupují se nám pak v přímky

$$\frac{xA - y}{\sqrt{1 + A^2}} = \Delta,$$

jež mají od středu slunce vzdálenost Δ. Tím jest význam této konstanty objasněn.

[19]) Elegantní odůvodnění této integrace „Sophus Lie“, Geom. d. Berührungstransformationen“, 42 a 31. 1896.

Chceme-li vyšetřiti prohnutí světla tíží, nesmíme člen obsahující α zanedbati. Konstanta Δ znamená však v prvém přiblížení zase nejmenší vzdálenost, na kterou se paprsek slunci přiblíží. Pro minimum průvodiče r_0 jest ovšem $dr = 0$, tak, že

$$\frac{r^2_0}{\Delta^2} + \frac{\alpha}{r_0} - 1 = 0 .$$

I pro paprsek nejtěsněji slunce míjející jest zlomek

$$\frac{\alpha}{r_\odot} = \frac{4\cdot27}{10^6}.$$

Zanedbáme-li tento zlomek vůči jednotce, jest pro paprsek slunce právě se dotýkající

$$r_\odot = \Delta.$$

Prohnutí tíží pro takový paprsek dáno úchylkou úhlu

$$2\vartheta = 2\int_\infty^{r_\odot} \frac{dr}{\sqrt{\frac{r^4}{r^2_\odot} + \alpha r - r^2}}$$

od 2π. Při vypočtení tohoto úhlu se členové prvého řádu dle α podrží. [20])

Dle Einsteina zachovávají rovnice jeho svou formu, podrobíme-li čtyřrozměrno libovolné deformaci, nahradíme-li souřadnice $x^1 \ldots x^4$ libovolnými na sobě nezávislými funkcemi jejich jako novými proměnými. Připouštějí tedy rovnice geodetických čar libovolnou transformaci souřadnic, při níž bod přechází v bod. Tento teorém lze přímo ověřiti prostředky klassické mechaniky. Vždyť rovnice canonické zachovávají svou formu při libovolné transformaci proměných. Svoboda, kterou Einstein svým širokým principem žádá, není tedy tak novou, jak se na první pohled zdá. Je v úzké souvislosti s transformačními teorémy Hamiltonovy rovnice, jež byly objeveny od Lagrange-a a Poissona, vybudovány od Jakobi-ho.

Ale klassická mechanika neví nic o rovnoprávnosti času s prostorovými souřadnicemi? —

Nemluví o této rovnoprávnosti, ale jen se podívejme, jak čas zapadne mezi ostatní souřadnice, když rovnice Hamilton-Jakobi-ho jej explicité obsahují. A když astronomové v pohybu jediného tělesa vyjadřují průvodič r i čas t Keplerovy elipsy, excentrickou anomalii w, — co je to než doznání, že lépe jest zacházeti s časem t jako se souřadnicí r a zavésti novou neodvisle proměnou w.

Ve starém rýsuje se nové, což není nic divného. Einsteinova

[20]) Laue, »Relativitaetstheorie« II., 227.

nauka jest přirozeným rozšířením Newtonova matematicismu, jímž jeho Filosophia Naturalis dosáhla svých úspěchů.

Klassická nauka není vždy chudší než Einsteinova. V některých směrech jest dokonce bohatší. Rovnice canonické snesou totiž nejen všechny možné bodové transformace, jak Einstein žádá, ale také všechny možné tečné transformace impulsů a souřadnic. Přeneseme-li tyto věty do relativistiky Einsteinovy, dovíme se novum, že rovnice geodetických čar čtyřrozměrna snesou všechny možné tečné transformace kovariantních složek rychlostí p_i a souřadnic x^i při nichž se veličiny ty nahradí jinými

$$P_i = f_i(x^1 \ldots x^4 . p_1 \ldots p_4);\; X^i = g^i(x^1 \ldots x^4, p_1 \ldots p_4),$$

kde následkem těchto rovnic

$$\sum_i^{1..4} P_i\, d X^i = \sum_i^{1..4} p_i\, d x^i. \qquad (16)$$

Einsteinovy bodové transformace jsou jen velmi specielním případem těchto tečných transformací. Klassická mechanika byla tedy na půdě transformační mnohem radikálnější než Einstein sám, který fysiku pokládá za invariantní teorii nekonečné skupiny všech bodových transformací čtyřrozměrna.

Mechanika klassická transformacemi v ní přípustnými sahá daleko za doménu Einsteinovu. Vždyť prve zmíněné transformace tečné nejsou ještě nejobecnějším případem. Ještě obecnější, právě prakticky důležité transformace dostaneme, když podmínku (16) nahradíme relací

$$\sum_i^{1..4} P_i\, d X^i = \sum_i^{1..4} p_i\, dx^i + d F, \qquad (17)$$

kde F jest jakoukoliv funkci x^i a p_i neb x^i a P_i, či p_i, P_i neb x^i, X^i.

Užitečnost těchto, jak Sommerfeld říká, „zvšeobecněných tečných transformací“, osvětlíme příkladem. Geodetické čáry vně slunce dány funkcí

$$S = a c t + b \vartheta - \int \frac{dr\sqrt{N}}{r - \alpha}.$$

Pokud S závisí na t, r, ϑ, je

$$d S = p_t\, d t + p_r dr + p_\vartheta\, d\vartheta.$$

Ale S závisí také na a, b, h, neboť

$$N \equiv a^2 r^2 - b^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) - 2 h r^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right).$$

Proto bude obecně

$$d S = p_t\, dt + p_r\, dr + p_\vartheta\, d\vartheta + Ada + Bdb + Hdh,$$

[21]) Atombau u. Spektrallinien, 471.

kde zkratky A, B, H značí

$$A=\frac{\partial S}{\partial a}, \qquad B=\frac{\partial S}{\partial b}, \qquad H=\frac{\partial S}{\partial h}.$$

Obratem z thermodynamiky známým upravíme horní relaci na

$$d(S-aA-bB-hH)=p_t\,dt+p_r\,dr+p_\vartheta\,d\vartheta-$$
$$-a\,dA-b\,dB-h\,dH.$$

To je ale relace typu (*17*), na níž vidíme, že místo p_r, p_ϑ, p_t lze zavésti nové impulsy a, b, h, místo souřadnic t, r, ϑ nové souřadnice A, B, H. Hamiltonova funkce T zvaná, jež při pohybu vyhovuje relaci

$$T=h,$$

stane se v nových souřadnicích a, b, h, A, B, H velmi jednoduchou. Redukuje se na pouhé h samotné.

Potřebujeme canonické rovnice v nových proměných. V těch se vyskytují všechny derivace Hamiltonovy funkce h. Ty však jsou vesměs rovny nulle, vyjma jediné. Je totiž derivace dle h rovna jedné. Protože k impulsu h patří souřadnice H, jest dle canonických rovnic

$$\frac{dH}{d\tau}=1$$

z čeho

$$H=\tau+\beta.$$

Ostatní veličiny a, b, h, A, B mají — dle canonických rovnic — derivace τ rovné nulle, jsou při pohybu konstantami.[22])

Tím jsou vzorce (*14*), dříve jen sdělené, dokázány.

Rovnice transformační, jimiž se převod veličin p_t, p_r, p_ϑ, t, r, ϑ v nové a, b, h, A, H, B provede, dostaneme, když relace (14) dle těchto veličin řešíme. Jest pak

$$a=\frac{p_t}{c} \qquad A=ct-a\int\frac{r^2\,dr}{r-\alpha}\frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$b=p_\vartheta \qquad B=\vartheta+b\int\frac{dr}{r\sqrt{N}} \tag{18}$$

$$h=\frac{1}{2}\left[\frac{p_t^2}{c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}-\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)p_r^2-\frac{p_\vartheta^2}{r^2}\right] \qquad H=\int\frac{r\,dr}{\sqrt{N}}$$

$$N\equiv a^2r^2-b^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)-2hr^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right).$$

Z impulsů a průvodiče r vypočte se nejprve a, b, h. Pomocí těchto veličin a t, r, ϑ stanoví se A, B, H.

---

[22]) Sommerfeld, „Atombau u. Spektrallinien“. 490.

Položíme-li v relacích (18) $\alpha = 0$, dostaneme proměnu pohybů rovnoměrně přímočarých v týž pomocný pohyb, ve který jsme právě převedli rozmanitost pohybů možných kol slunce. Rovnice převodní, nyní trochu jednoduší, zní

$$\begin{aligned} a &= \frac{P_T}{c} & A &= cT - a\int \frac{R\,dR}{\sqrt{N_0}} \\ b &= P_\Theta & B &= \Theta + b\int \frac{dR}{R\sqrt{N_0}} \qquad (19) \\ h &= \frac{1}{2}\left[\frac{P_T^2}{c^2} - P_R^2 - \frac{P_\Theta^2}{R^2}\right] & H &= \int \frac{R\,dR}{\sqrt{N_0}}. \end{aligned}$$

Také N zjednoduší se na

$$N_0 = a^2 R^2 - b^2 - 2\,h\,R^2.$$

Mysleme si, že nejprve transformujeme pomocí (18) rozmanitost pohybů planetárních v pohyb pomocný. Pak tento inversí transformace (19) převedeme v rozmanitost všech pohybů přímočarých. Tu se nám pohyby planet kol slunce promění v přímočaře rovnoměrný pohyb od setrvačnosti!

Odtransformování slunce provede se pomocí rovnic

$$\begin{aligned} P_T &= p_t = ac & cT - a\int \frac{R\,dR}{\sqrt{N_0}} &= t - a\int \frac{r^2\,dr}{r-\alpha}\frac{1}{\sqrt{N}} \\ P_\Theta &= p_\vartheta = b & \Theta + b\int \frac{dR}{R\sqrt{N_0}} &= \vartheta + b\int \frac{dr}{r\sqrt{N}} \qquad (20) \end{aligned}$$

$$\frac{P_T^2}{c^2} - P_R - \frac{P_\Theta^2}{R^2} = \frac{p_t^2}{c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)p_r^2 - \frac{p_\vartheta^2}{r^2} = 2h$$

$$\int \frac{R\,dR}{\sqrt{N_0}} = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{N}}.$$

Relace pro h prozrazuje, že paprsku světelnému v poli slunečním přísluší zase paprsek světelný, ale nyní ve vakuu.

Maxwell, Helmholtz, Boltzmann [23]) a mnozí jiní fysikové starší doby zastávali názor, že veškeré děje fysikální jsou v podstatě ději mechanickými. Soudili pak, že mechanické rovnice Lagrange-ovy ve všeobecných souřadnicích jsou universálními rovnicemi fysiky vůbec, jež se musí hoditi k popisu časového průběhu jakéhokoliv děje fysikálního. Třeba jen šťastně rozpoznati, které měřitelné veličiny se chovají jako Lagrange-ovy všeobecné souřadnice a které jako jejich impulsy. Tak na př. Maxwell již před 50 lety si všiml,

[23]) Litt: Velká Teubnerova enzyklopedie math. Lorentzův článek »Maxwells elektromagnetische Theorie«, č. 34., str. 123, 1903.

že u lineárných vodičů lze dostati zákony indukční i elektrodynamických účinků z Lagrangeových rovnic. Zavádí parametry p_m, jež určují polohu vodičů a přiřaďuje každému vodiči veličinu p_e, jejíž derivace dle času jest silou elektrického proudu v něm. Z experimentálních fakt soudí, že kinetická energie neobsahuje součiny rychlostí p'_m s rychlostmi p'_e. A souřadnice p_e v této energii se vůbec nevyskytují. Maxwellova elektrokinetická energie zní pak

$$T = \frac{1}{2} L_1 p'^2_{1e} + \frac{1}{2} L_2 p'^2_{2e} + \ldots + M_{12} p'_{1e} p'_{2e} + \ldots$$

kde $L_1, L_2 \ldots$ jsou koefficienty samoindukce, $M_{12} \ldots$ vzájemné indukce, jež závisí pouze na polohových parametrech p_m Potentiální energie klade se rovna nulle. Pak plynou z Lagrangeových rovnic ve všeobecných souřadnicích výrazy pro indukované elektromotorické síly i všeobecné složky ponderomotorických sil.

K mechanistické fysice, jež přičítala rovnicím canonickým universální platnost, náležela transformační teorie tak bohatá jako k rovnici Hamilton-Jakobi-ho. Odtud vycházejíc mohla se vyvinouti širší fysika než Einsteinova rozšířená relativistika. — Proč se to nestalo?

Hlavní důvod — poněkud prosaický — bude asi v tom, že methoda Hamilton-Jacobi-ho byla považována od fysiků za matematický instrument pro praxis astronomů. I fysikové, jako Boltzmann, kteří metodu tu dobře znali,[24]) mohli se domnívati, že transformační vlastnosti jsou „matematicko-formální". Teprve teorie kvant (Schwarzschild, Epstein 1916), upozornila fysiky na význam

$$\int p_i \, dx^i$$

a tím i na význam Hamilton-Jakobi-ho „účinné funkce"

$$d S = \sum_{i}^{1..4} p_i \, dx^i.$$

Sommerfeld[25]) praví, že dříve se methodě této význam pro fysiku nepřičítal. Mínilo se, že je pro poruchové počty astronomů a že je především tematem matematickým.

Druhý důvod mohl by býti v tom, že klassická mechanika pracujíc ve všeobecných souřadnicích ztrácí pojem třírozměrného prostoru, ztrácí jeviště pohybů. Jakmile se soustavou, jež má „n" stupňů volnosti, zacházíme, jako by šlo o jediný bod, jenž se pohybuje v prostoru n-rozměrném, ztrácíme dotyk mezi 3-rozměrnou skutečností a pletivem vzorců, jež ji má vypodobniti.

Obsahovala tedy i klassická mechanika začátky a zárodky nového. Historický vývoj arci šel přes Lorentzovu transformaci,

---

[24]) Boltzmann, „Principe d. Mechanik", II., kap. 5 a 6. 1904.
[25]) Sommerfeld, „Atombau u. Spektrallinien", 482. 1921.

která byla objevena na Maxwellových rovnicích. Ale již při rozšíření relativistiky na libovolné transformace byl by se mohl Einstein dovolávati rovnocennosti času se souřadnicemi a transformačních teorií klassické mechaniky.

Einstein omezil transformace, jež připouští na takové, jimiž bod čtyřrozměrna promění se zase v bod. Proto nemůže proměniti pohyby planet v pohyby rovnoměrně přímočaré. Připustíme-li však i rozšířené transformace tečné — viz (17), — stane se taková přeměna možnou. Neboť vůči těmto transformacím partiální rovnice differentiální prvého stupně nemají individuálních vlastností. Každá se dá přeměniti v každou jinou.[26]) Arci vzdáváme se pak bodu jako prvku čtyřrozměrna a nahražujeme jej „plošným prvkem" se souřadnicemi $x^1 .. x^4$, $p_1 .. p_4$, který v geometrii zavedl Sophus Lie.

Problém gravitační v rámci bodových transformací řeší Einstein postavením polních rovnic, jichž integrace dá g_{ik} a stanovením geodetických čar pro takto nalezený element ds se řešení ukončí. V relativistice rozšířených tečných transformací bylo by jen vypočítati tečnou transformaci, která geodetické čáry Minkowského (přímky) převádí v geodetické čáry znamenající pohyby pod vlivem gravitace. Transformaci tu jsme ve vzorcích *(20)* napsali. Eventuelní rozšíření Einsteinovy teorie tíže by je musilo odvodit na př. z myšlenky, že střed slunce má býti singulárním bodem v poli. Myšlenka ta bude asi charakteristickou pro pole s kulovou souměrností. Proto mohl Bauer[27]) z myšlenky, že gravitační pole hmotného bodu jest singulárním řešením rovnic, jichž regulární řešení vede k světu Minkowského, propočítati stáčení perihelia i křivení světla, aniž by se vyslovil pro určité polní rovnice gravitační.

Protože transformace *(18)* a *(19)* vznikly derivací jediné funkce S, lze problém gravitační v rámci rozšířených tečných transformací vysloviti jako požadavek, aby se z relace

$$S = a c t + b \vartheta + \int \frac{dr \sqrt{N_0}}{r}$$

$$N_0 = x^2 r^2 - b^2 - 2 h r^2$$

odvodila funkce

$$S = a c t + b \vartheta + \int \frac{dr \sqrt{N_\alpha}}{r - \alpha} \tag{21}$$

kde

$$N_\alpha \equiv a^2 r^2 - b^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) - 2 h r^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right).$$

---

[26]) E. Goursat, „Vorl. ü. partielle Differentialgleichungen". I. Ordn. 287. 1893.

[27]) Bauer, „Einführung in d. Gravitationstheorie Einsteins". 49 a 50. 1922.

Tušíme tu úkol: najíti pro okolí slunce funkci $F(r, \alpha)$, jež vyhovuje (prozatím) neznámým podmínkám a pro $\alpha = 0$ neb $r = \infty$ redukuje se na z vakua známou funkci:

$$\int \frac{dr \sqrt{a^2 r^2 - b^2 - 2hr^2}}{r}.$$

K problému tomu jsme dovedeni, užijeme-li methody Hamilton-Jakobi-ho v rámci Einsteinovy theorie tíže. Z rámce Einsteinova arci problém ten vybočuje. Jeho bodovými transformacemi nelze proměniti dráhy planet v přímky. Také by bylo těžko věřit, že „jen" bodové transformace (Einsteinovy) mají fysikální význam, vedouce k jeho tensorovému kalkulu, jenž celou fysiku obepíná, kdežto rozšířené tečné transformace by měly míti pouze význam matematický. Vždyť dosud každý pokrok matematiky ukázal se významným pro přírodní vědy. Proto je pravděpodobnější, že zavedení methody Hamilton-Jakobi-ho do mechaniky Einsteinovy odhaluje nám, že základna jeho: skupina všech bodových trasformací je dobrovolným zužením v rámci nekonečné skupiny všech rozšířených tečných transformací.

Einsteinova nauka není posledním slovem. Jen si všimněme emanačního charakteru chudobné optiky, jež jeho gravitační nauku lemuje jako extremní případ pohybu v gravitačním poli. Einstein tu jedná o paprscích světelných jako Newton. Tento předhuygensovský charakter jeho — jinak veledůležitých — počtů o křivení světla poukazuje na to, že jde o první kroky na nové půdě.

Bude asi těsnější vztah mezi zjevy elektromagnetickými jako světlo a tíže, než z dosavadního zpracování Einsteinova vysvítá. Také Weylovy pokusy o rozšíření nauky Einsteinovy tomu nasvědčují.

*

Sur la méthode de Hamilton-Jacobi dans la mécanique d'Einstein.

(Extrait de l'article précédent.)

La large théorie de la relativité d'Einstein est capable de déduire de ses principes bien des théoremes que la physique ancienne n'a fait que constater. Néanmoins, les rapports entre les deux théories ne sont nullement hostiles. La géométrie euclidienne aussi bien que la mécanique classique ne cessent pas d'être des théories mathématiques rigoureusement logiques. On a seulement des doutes sur leur valeur pratique en vue de l'étude de la nature, des doutes, en somme, sur leur valeur transiente.

Voilà pourquoi rien ne s'oppose à ce qu'on se serve des moyens de la mécanique classique, p. ex. de la méthode de

Hamilton-Jacobi, comme d'instrument de recherche, dans l'interêt même de la théorie de la relativité. Alors, les courbes de l'univers de Minkowski expriment des mouvements ayant quatre degré de liberté, dont l'énergie potentielle est nulle et dont l'énergie cinétique est une forme quadratique des impulsions. La variable indépendante ne figure pas dans les équations. Voir les formules (2) a (3).

On obtient aisément les équations de Hamilton-Jacobi en bordant le déterminant $|g_{ik}|$ d'Einstein par les impulsions (5). On a alors une équation à dérivées partielles I. ord. pour la fonction S, proportionnelle à l'intégrale, prise par rapport au temps, de l'énergie cinétique (9). Dans la mécanique d'E. on peut déterminer plus près le caractère de cette fonction: elle change dans le mouvement comme le temps propre $\int ds$. La fonction „active" S divise l'espace à quatre dimensions en des surfaces à trois dimensions. A chaque surface correspond une certaine valeur du temps propre s. Les lignes géodésiques des mouvements effectifs coupent ces surfaces, tandis que les lignes géodésiques de la lumière sont situées sur ces surfaces. A titre d'exemple, l'auteur étudie par la méthode de Hamilton-Jacobi le mouvement d'une planète, et de la lumière à l'extérieur du soleil.

Les équations canoniques de la mécanique classique conservent leur forme dans une transformation quelconque des variables. Pour cette raison il suit de la mécanique classique une preuve analytique directe du fait que les courbes géodésiques d'E. sont invariables dans une déformation élastique quelconque de l'espace. Mais les théorèmes sur la transformation de l'équation de Hamilton, découverts par Lagrange et Poisson, établis par Jacobi, nous revèlent le fait qu'il y a des transformations plus générales encore que les transformations ponctuelles employées par E. Ce sont les transformations de contact. Les transformations ponctuelles continues de l'espace à quatre dimensions d'E. sont un cas très particulier de ces transformations. On voit donc que la théorie des transformations de la mécanique classique est beaucoup plus radicale que celle d'E., laquelle considère la physique comme une théorie des invariants appartenant (seulement) au groupe de toutes les transformations ponctuelles de l'espace à quatre dimensions.

Mais on peut faire usage, dans la mécanique classique, de transformations plus générales encore que ne le sont celles de contact. On peut employer ces transformations, appelées transformations de contact élargies, en suivant l'exemple de Sommerfeld, à la résolution de la relation de Hamilton-Jacobi en la transformant en un mouvement idéal dont les coordonnées, les impulsions et l'énergie cinétique sont constants. Il n'y a que la coordonnée appartenant à l'énergie cinétique qui est variable. On transforme d'abord en un mouvement de ce genre la révolution planétaire. Ensuite on fait tendre vers zéro la masse du soleil et l'on obtient la transformation, en ce même mouvement idéal, des mouvements uniformes rectilignes. Si, maintenant, l'on élimine ce mouvement auxiliaire, on obtient la transformation des mouvements Galiléens, uniformes et rectilignes, en des mouvements elliptiques de Kepler (20). Une telle transformation n'est pas possible pour E., puisqu'il se borne volontairement aux transformations ponctuelles.

Maxwell, Helmholtz et Boltzmann avaient déjà fait usage des équations de Lagrange, exprimées en coordonnées générales, même en dehors de la mécanique. Il y a là des premiers essais et des germes d'une théorie de la rélativité plus large que ne l'est celle d'E. Si cette théorie ne s'est pas développée, c'est, à mon avis, que les physiciens considéraient la théorie de Hamilton-Jacobi comme une partie des mathématiques pures.

La gravifique de cette théorie élargie de la relativité ne cherchera pas des équations de champ comme le fait E. Elle cherchera des transformations (celles de Sommerfeld) par lesquelles le mouvement de Galilée est changé en un mouvement qui se produit sous l'influence de la gravité. Pour les planètes, il suffirait de trouver une seule fonction active S (21) satisfaisant, à l'infini et au centre, à certaines conditions.

C'est ainsi que la mécanique classique, employée comme instrument dans la gravifique d'E.. nous amène à des possibilités qui sont au delà de la portée de cette théorie se bornant aux transformations ponctuelles. Les adversaires de la théorie d'E., qui s'accrochent à la signification absolue de la géométrie euclidéenne, devraient se rendre compte que l'espace à n dimensions de la mécanique classique (pour un système à n degrés de liberté) fait usage, depuis plus d'un demi-siècle, de transformations beaucoup plus compliquées que ne le sont les transformations élastiques de l'espace d'E.

Metodologie matematiky.

Napsala *B. Dratvová.*

Metodologii matematiky považuji za úvod do studia logických základů matematického myšlení. V metodologii matematiky jako f o r m ě pracovního postupu matematikova jsem si vytkla tři skupiny otázek: 1. O hledání a volbě problémů, 2. o řešení úloh, 3. o důkazech.

I. O hledání a volbě problémů.

Předmětem úlohy v matematice je stanoviti odpověď (= neznámé) ve formě v matematice přípustné, která vyhovuje podmínkám daným ať z vlastní iniciativy matematikovy, ať cizí.

Nalezení problému či volbu problému považujeme za znak vynalézavosti matematikovy. Kterou cestou se to děje, je otázka