Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Sobotka

Několik důkazů a konstrukcí věty Pohlkeovy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 191--203

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109362

au moyen de laquelle il a réussi à élargir les problèmes accessibles, en les soumettant à un procédé caractéristique (publié dans les mémoires de l'Académie de Prague en 1918). De plus, l'auteur déduit un système de formules se rattachant au volume du tétraèdre.

Několik důkazů a konstrukcí věty Pohlkeovy.

Napsal *J. Sobotka.*

1. K uveřejnění této skromné práce na tomto místě vedla mne jednak okolnost, že uvedená věta zaujímá mezi četnými pojítky geometrie s applikovanou mathematikou místo významné, jednak také vzpominky časové. Jest tomu letos asi 70 let, co Pohlke větu známou pod jeho jménem vyslovil a dokázal. H. A. Schwarz, jeho žák, uvádí v II. svazku svých sebraných spisů, v první své vědecké práci: „Elementarer Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der Axonometrie“ z r. 1863, že Pohlke kolem r. 1853 vytkl a dokázal větu, že tři v rovině pod různými úhly z jednoho bodu vycházející úsečky libovolné délky lze vždy považovati za parallelní (šikmý) průmět tří k sobě kolmých úseček stejné délky. Přesněji lze větu tu formulovati takto:

Tři úsečky v rovině z jednoho bodu vycházející, jež neleží všecky na jedné přímce, z nichž alespoň dvě mají konečné délky a žádná není nekonečně velká, lze vždy považovati za parallelní průmět tří k sobě kolmých úseček stejné délky, tvořících trojhran.

Jsou-li OX, OY, OZ uvedené tři délky v rovině, tu jsme vyloučili především případ, kdy jeden z bodů X, Y, Z jest v nekonečnu; neboť pak by byly paprsky promítající rovnoběžny s průmětnou a buďto by musely všecky body X, Y, Z splývati v nekonečnu, anebo by musely dvě z úseček těch ležeti v průmětně, býti k sobě kolmé a míti stejné délky. Je-li jedna z úseček OX, OY, OZ, na př. prvá, nekonečně malá, pak v mezích splývá bod X s bodem O, a tudíž jest úsečka ta průmětem úsečky nekonečně blízké paprsku promítajícímu vedenému bodem O, a naopak udává-li úsečka náležející jedné hraně zmíněného trojhranu směr promítání, jest průmětem jejím úsečka nullová na libovolné přímce průmětny, poněvadž každá rovina paprskem promítajícím položena jest jeho rovinou promítající, a věta Pohlkeova platí i v tomto případě.

Zmíněný důkaz této věty Pohlke však sám nikdy neuveřejnil, jelikož mu nebyl dosti elementární, a tak upadl důkaz ten na dlouho v zapomenutí. V r. 1877 našel a ve vídeňské Akademii věd (Sitzungsber. Bd. 76) uveřejnil K. Pelz[1]) jeden důkaz věty Pohlkeovy,

---

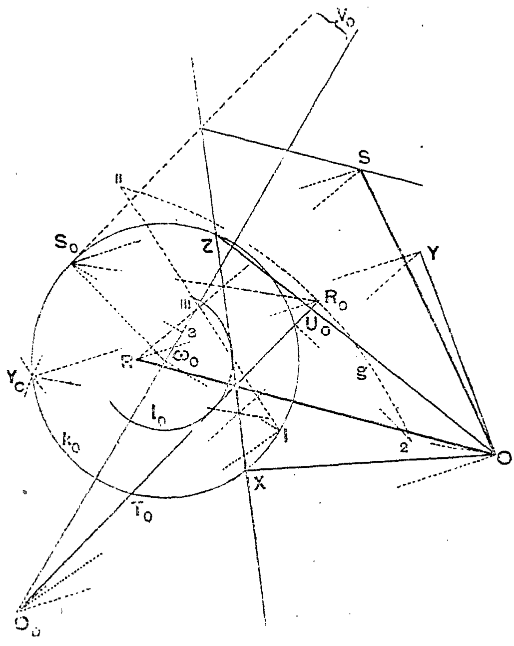
[1]) 16. června t. r. bylo tomu 15 let, co zemřel tento vynikající geometr český, stejně originelní jako myslitel, jako učitel i jako povaha a osobnost.

k němuž poznamenává Schwarz v dodatku ke svým sebraným spisům, že tím Pelz našel původní důkaz Pohlkeův.

Počet důkazů známých této věty jest velký. V následujícím jsem se snažil podati taková odvození, jež by vedla ke konstrukcím co možná jednoduchým.

I.

2. V následujícím označeny jsou útvary v prostoru těmitéž symboly jako jejich průměty a obrazy axonometrické s připojenou však tečkou nahoře, kdežto průměty a obrazy jsou označeny stejnými symboly.



Obr. 1.

Buďtež tedy (obr. 1.) libovolné úsečky OX, OY, OZ parallelními průměty tří úseček $O^{\cdot}X^{\cdot}$, $O^{\cdot}Y^{\cdot}$, $O^{\cdot}Z^{\cdot}$ stejné délky a navzájem kolmých. Můžeme předpokládati, že bod O leží vně trojúhelníka XYZ; neboť kdyby tomu tak nebylo, můžeme bod $X^{\cdot}$ nahraditi bodem $X^{\cdot}_{*}$ na $O^{\cdot}X^{\cdot}$, pro nějž $O^{\cdot}X^{\cdot}_{*} = X^{\cdot}O^{\cdot}$; pak leží bod O vně trojúhelníka $X_{*}YZ$, který nám nyní nahrazuje trojúhelník XYZ.

Body $X^{\cdot}, Y^{\cdot}, Z^{\cdot}$ jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka; budiž $k^{\cdot}$ kružnice jemu opsaná a $l^{\cdot}$ kružnice jemu vepsaná; $\omega^{\cdot}$ budiž společný střed obou. Jsou-li dále $X^{\cdot}_1$, $Y^{\cdot}_1, Z^{\cdot}_1$ vrcholy libovolného jiného trojúhelníka rovnostranného vepsaného kružnici k', pak jsou též úsečky OX'_1, $O'Y'_1$, $O'Z'_1$ navzájem kolmé a mají stejné délky s úsečkami $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$. Docházíme takto k jednoduchému nekonečnému množství takových trojic navzájem kolmých přímek ležících na rotačním kuželi K', který má vrchol O' a prochází kružnicí k'. Zmíněné trojice přímek tvoří zároveň trojice rovin navzájem kolmých, které obalují rotační kužel L' soustředný s K' a obsahující kružnici l: Následkem našeho předpokladu o poloze bodu O leží tento vně ellipsy l do níž se l' promítá. Lze tudíž z bodu O vésti dvě reálné tečny ke křivce l, jež jsou průměty dvou tečen k l'. Vytkněme si jednu z nich, která nechť protne k' v bodech T', U'; pak jest úsečka $T'U'$ stranou rovnostranného trojúhelníka $S'T'U'$ kružnici k' vepsaného, a OS, OT, OU jsou průměty parallelní tří navzájem kolmých úseček rovnajících se úsečce $O'X'$, a paprsek promítající s', bodem O' vedený, leží v rovině $OT'U'$.

Bez újmy obecnosti můžeme zde, jakož i v úvahách následujících předpokládati, že průmětna prochází bodem O', tedy že $O' \equiv O$.

Stopa roviny $OT'U'$ do průmětny jest přímka OT. Budiž OR' úsečka v rovině $OT'U'$ kolmá k s', jejíž délka nechť se rovná délce úseček OX', OT', OU', tu jak známo a patrno jest

$$\overline{OR}^2 = \overline{OT}^2 + \overline{OU}^2 \tag{1}$$

pomocí kteréžto relace lze sestrojiti bod R. Tím docházíme k rovině $OR'S'$ kolmé k paprsku promítajícímu a známe průměty OR, OS dvou úseček OR', OS' vní k sobě kolmých majících tutéž délku jako OX'. Všecky úsečky bodem O v rovině $OR'S'$ téže délky mají své koncové body na kružnici, jejíž parallelní průmět ve směru s' jest ellipsa h, mající úsečky OR a OS za sdružené poloměry. Budiž A jeden vrchol na ose hlavní, B jeden vrchol na ose vedlejší a F jedno ohnisko této ellipsy. Přímka OB jest patrně stopou roviny $OR'S'$ do průmětny a OA jest průmětem její přímky spádové; proto $OB = OX'$, $AA' \parallel s'$, $AA' = OF$. Naneseme-li tudíž na kolmici k průmětně v bodě O vztyčené v příslušném smyslu úsečku $OG' = OX'$, jest $G'F \parallel s'$.

3. Postup uvedený lze obrátiti. Z daných bodů O, X, Y, Z lze uvedenými konstrukcemi v průmětně dospěti k bodům A, B, F a k ellipse h. Naneseme pak na kolmici v O k průmětně vztyčenou úsečku $OG' = OB$ v jednom neb druhém smyslu a zvolme směr přímky FG' za směr promítání parallelního. Ellipsa h jest tu patrně průmětem kružnice h' v rovině H' bodem O kolmo k FG' položené a sdružené poloměry OR, OS jsou průměty dvou k sobě kolmých poloměrů OR', OS' kružnice h'. Přímka $s' \parallel FG'$ bodem O vedená tvoří s OR' a OS' trojici navzájem kolmých přímek. Opišme nyní v rovině $(s'R')$ kolem středu O kružnici r' poloměru OR'. Z rovnice (1) plyne, že jedna z úseček OU, OT jest menší než-li poloměr

této kružnice; budiž to úsečka OT; proto rovnoběžka bodem U k $s^{\cdot}$ vedená protíná $r^{\cdot}$ ve dvou bodech realných. Zvolme jeden z nich za bod $U^{\cdot}$; kolmice v O k přímce $OU^{\cdot}$ vztýčená a v rovině ($s^{\cdot}R^{\cdot}$) položená protne $r^{\cdot}$ ve dvou bodech, z nichž jeden $T^{\cdot}$ má v důsledku relace (1) svůj parallelní průmět v bodě T, druhý pak v bodě k T souměrně položeném vzhledem k bodu O. Jsou tudíž $OS^{\cdot}$, $OT^{\cdot}$, $OU^{\cdot}$ tři k sobě navzájem kolmé úsečky délky OB, a trojúhelník $S^{\cdot}T^{\cdot}U^{\cdot}$ jest rovnostranný. Vrcholy trojúhelníků $S^{\cdot}T^{\cdot}U^{\cdot}$ a XYZ leží na ellipse k a strany jejich se dotýkají ellipsy l a ježto jsou přímky ve dvojicích XY, $Z\omega$; $YZ, X\omega$; $ZX, Y\omega$ a tedy i ve dvojicích TU, $S\omega$; US, $T\omega$; ST, $U\omega$ vzhledem k oběma ellipsám sdruženy, proto jsou průměty jejich do roviny $S^{\cdot}T^{\cdot}U^{\cdot}$ sdruženy vzhledem ke kuželosečkám k^*, l^* v rovině $S^{\cdot}T^{\cdot}U^{\cdot}$, do nichž se k a l ve směru $s^{\cdot}$ promítají. Ale průměty posledních tří dvojic jsou utvořeny třemi dvojicemi přímek k sobě kolmých. Neboť ω jest společným těžištěm trojúhelníků STU, XYZ, proto jest průmět ω^* bodu ω společným těžištěm trojúhelníků $S^{\cdot}T^{\cdot}U^{\cdot} \equiv S^*T^*U^*$ a $X^*Y^*Z^*$; avšak těžiště prvého z nich jest střed kružnice trojúhelníku $S^{\cdot}T^{\cdot}U^{\cdot}$ opsané; jsou tedy přímky v každé z posledních tří dvojic k sobě kolmé; proto jsou každé dvě přímky vzhledem ke k^* a l^* sdružené k sobě kolmy a tudíž jsou křivky k^* a l^* kružnicemi. Splývají proto kružnice k^* a l^* s kružnicemi $k^{\cdot}$ a $l^{\cdot}$. Body X^*, Y^*, Z^* tvoří tudíž též rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy leží na kružnici $k^{\cdot}$; jsou to proto body $X^{\cdot}$, $Y^{\cdot}$, $Z^{\cdot}$ jež se promítají do X, Y, Z. Trojhrany O ($S^{\cdot}T^{\cdot}U^{\cdot}$), O ($X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot}$) leží na kuželi rotačním majícím O za vrchol a obsahujícím kružnici $k^{\cdot}$ a jsou shodny. Z toho plyne konečně, že přímky $OX^{\cdot}$, $OY^{\cdot}$, $OZ^{\cdot}$ jsou navzájem kolmy a mají stejnou délku rovnající se úsečce OB.

Tím jest věta Pohlke-ho dokázána a jest dána též konstrukce délky OB a směru promítání.

Z daného odvození jest též patrna víceznačnost. Předně nebyl směr promítání stanoven jednoznačně; místo, abychom si vytkli směr $s^{\cdot} \parallel TG^{\cdot}$ mohli jsme vzíti směr k němu souměrný vzhledem k průmětně, což jest ovšem i přímo patrno. Dále jsme za $T^{\cdot}$ zvolili jeden z bodů možných, v němž přímka bodem T rovnoběžně k $s^{\cdot}$ vedená protíná kružnici $r^{\cdot}$; mohli jsme ale zvoliti též druhý z těchto bodů za $T^{\cdot}$, čímž bychom byli dospěli místo k $OX^{\cdot}$, $OY^{\cdot}$, $OZ^{\cdot}$ k novým třem úsečkám $\overline{OX}^{\cdot}$, $\overline{OY}^{\cdot}$, $\overline{OZ}^{\cdot}$, jež jak patrno jsou k oněm souměrně položeny vzhledem k rovině H$^{\cdot}$.

Dospíváme tudíž ke čtyřem trojicím úseček $OX^{\cdot}$, $OY^{\cdot}$, $OZ^{\cdot}$ délky OB a navzájem kolmých té vlastnosti, že každá z trojic těch má za průmět parallelní trojici úseček OX, OY, OZ.

4. Konstrukci délky OB a přímky $s^{\cdot}$ provedeme jak následuje. Útvary v rovině $X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot}$ a průměty jejich ve směru $s^{\cdot}$ do průmětny axonometrické jsou útvary affinní. K prve řečeným útvarům $\Sigma^{\cdot}$ lze zvětšením dle zákona podobnosti odvoditi útvary Σ_0, jež lze pře-

místěním do průmětny uvésti v polohu affinní se $\Sigma^{\cdot}$, která má jednu z přímek XY, YZ, ZX za osu affinity. Zvolíme-li XZ za tuto osu, bude trojúhelníku XYZ příslušeti v Σ_0 trojúhelník rovnostranný ZXY_0 na jedné neb druhé straně přímky XZ v rovině průmětné položený a ellipsám k, l příslušeti budou v Σ_0 kružnice k_0, l_0, mající střed v bodě ω_0, z nichž prvá jest trojúhelníku ZXY_0 opsaná, druhá vepsaná. Bodu Y přísluší affinně bod Y_0; čímž jest poloha affinní stanovená. Paprsek $s^{\cdot}$ nechť protíná rovinu $X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot}$ v bodě $\overline{O}^{\cdot}$, jehož průmět se stotožňuje s bodem O; bodu tomu přísluší affinně bod O_0. Vedeme bodem tímto jednu z tečen ke kružnici l_0 a protneme ji kružnicí k_0 v bodech T_0, U_0. Bodu R přísluší affinně bod R_0 na uvedené tečně, pro nějž $\overline{O_0 R_0}^2 = \overline{O_0 T_0}^2 + \overline{O_0 U_0}^2$. Naneseme tudíž na kolmici v U_0 k O_0U_0 úsečku $U_0 2 = O_0 T_0$ a opišeme kolem O_0 jakožto středu kružnici g procházející bodem 2, která protne $O_0 U_0$ v bodě R_0, k němuž odvodíme R jakožto affinně příslušný v Σ. Poloměr kružnice k_0 kolmý k O_0U_0, jenž přímku tuto neprotíná, má za koncový bod S_0, jemuž affinně příslušný bod v Σ jest S. Sestrojení bodů uvedených jest z obrazce patrno. Tím jest ellipsa h stanovena sdruženými poloměry OR, OS, z nichž pak některým ze známých způsobů sestrojíme body A, B a F, čímž dle dřívějšího jest pak délka OB úseček $OZ^{\cdot}$, $OY^{\cdot}$, $OZ^{\cdot}$ dána a směr $s^{\cdot}$ taktéž stanoven. Křivkou h procházející válec promítající seče rovinu $X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot}$ v křivce $\overline{h}^{\cdot}$, jejíž průmět se stotožňuje s h, a tomu odpovídá v Σ_0 affinně ellipsa h_0 mající O_0R_0 a O_0S_0 za průměry sdružené; dotýká se tedy kružnice k_0 ellipsy h_0 v bodě S_0 a v bodě k němu vzhledem k $O_0\omega_0$ souměrně položeném. Nechť seče společná tečna v S_0 ke k_0 a h_0 přímku $O_0\omega_0$ v bodě V_0; jest tu $O_0V_0 = 3\,O_0\omega_0$. Pro bod affinně příslušný v Σ jest tedy $OV = 3\,O\omega$. Z toho plyne, že S jest průmětem bodu dotyku plochy kulové středu O a obsahující kružnici $k^{\cdot}$ jednou její rovinou tečnou rovnoběžnou s paprskem $s^{\cdot}$ o dotýkající se koule na kružnici $k^{\cdot}$; neboť naneseme-li na přímku $O\omega^{\cdot}$ úsečku $OV^{\cdot} = 3.\ O\omega^{\cdot}$, jest bod $V^{\cdot}$ vrcholem kužele opsaného kouli podél kružnice $k^{\cdot}$ a zmíněná rovina jest promítající rovinou tečnou kužele toho.

Označme 3 patu kolmice z S_0 na $\overline{O_0\omega_0}$, dále ϱ poloměr kružnice k_0 a klaďme $\overline{O_0\omega_6} = \delta$. Jest pak

$$\varrho^2 = 2\,\overline{\omega_0 3}.\ \delta. \tag{2}$$

Dále jest

$$\left(\frac{O_0\,T_0 + O_0U_0}{2}\right)^2 = \delta^2 - \frac{\varrho^2}{4}, \qquad O_0T_0\,.\,O_0U_0 = \delta^2 - \varrho^2$$

Z těchto rovnic obdržíme, že $O_0T_0^2 + O_0U_0^2 = 2\,\delta^2 + \varrho^2$, takže $O_0R_0^2 = 2\,\delta^2 + \varrho^2$. (3).

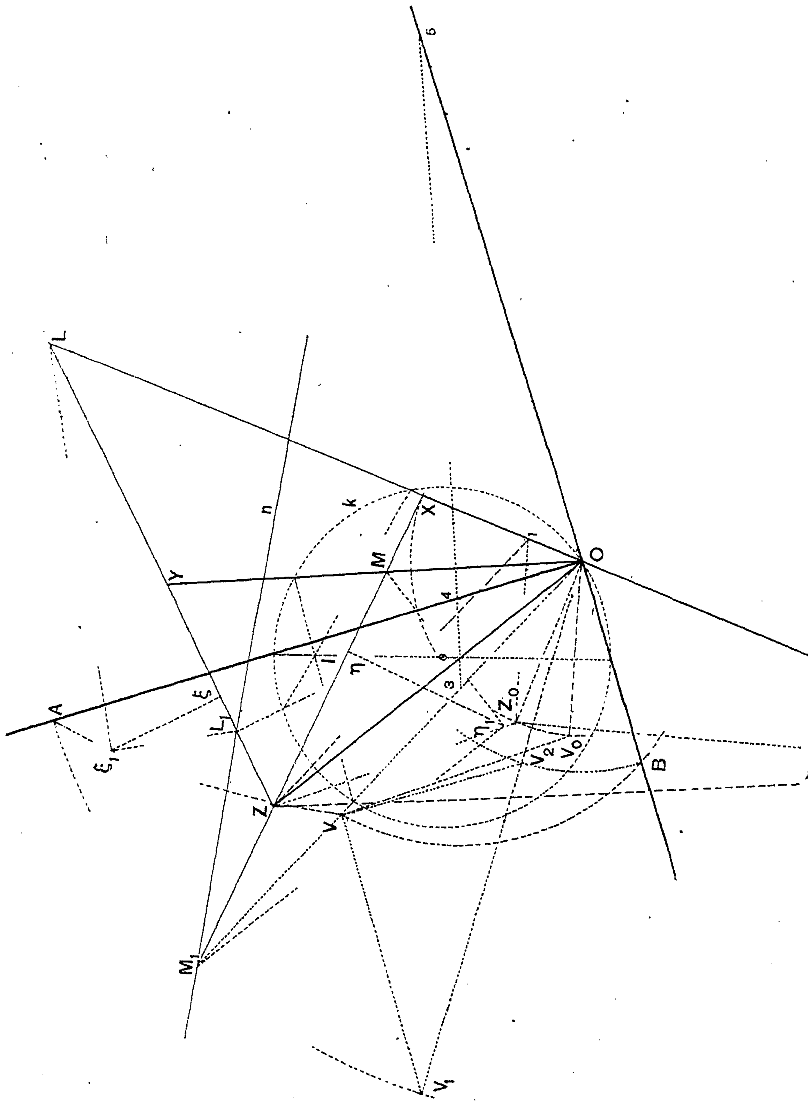
Z rovnic (2) a (3) plyne následující konstrukce bodů S_0 a R_0. V bodě ω_0 vztýčíme poloměr ω_0 I kružnice k_0 kolmý k $O_0\omega_0$ a v bodě I vztýčíme kolmici k O_0 I, která nechť protne $O_0\omega_0$ v bodě III, načež zvolíme jeden z bodů, v němž symetrála úsečky ω_0 III protíná k_0 za bod S_0, což jest se zřetelem na (2) dovoleno. Dále naneseme na přímku I III úsečku I II $= \delta$, pak se na základě rovnice (3) úsečka O_0 II rovná poloměru $O_0 R_0$ ellipsy h_0, jehož směr jest kolmý k $S_0\omega_0$. Tím jest poloměr ten stanoven.

II.

5. Jiný důkaz a příslušnou konstrukci věty Pohlkeho možno založiti na následujících úvahách (obr. 2.). Mají-li OX, OY, OZ býti průměty tří k sobě navzájem kolmých a stejných úseček $OX^{\cdot}$, $OY^{\cdot}$, $OZ^{\cdot}$ pro směr promítání daný přímkou $s^{\cdot}$ procházející počátkem a je-li $n^{\cdot}$ přímka, v níž rovina bodem O kolmo k $s^{\cdot}$ položená protíná rovinu $\mathrm{P}^{\cdot} \equiv X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot}$, lze průmět n přímky této sestrojiti na základě tom, že trs přímek bodem O a trs rovin bodem tím k ním normálně položených protínají $\mathrm{P}^{\cdot}$ v soustavě polární, v níž vrcholům trojúhelníka příslušejí protilehlé strany jeho a těžišti jeho přísluší přímka v nekonečnu, libovolnému bodu $P^{\cdot}$ přísluší pak stopa $p^{\cdot}$ do $\mathrm{P}^{\cdot}$ roviny procházející bodem O a kolmé k přímce $OP^{\cdot}$. Průměty parallelní ve směru $s^{\cdot}$ každého bodu $P^{\cdot}$ a příslušné přímky $p^{\cdot}$ tvoří příslušné si prvky P a p polárního systému Π v průmětně. Systém ten jest úplně stanoven, poněvadž vrcholům trojúhelníka XYZ příslušejí protilehlé strany jeho a těžišti jeho přísluší nekonečně vzdálená přímka průmětny. Poněvadž průsečík přímky $s^{\cdot}$ s $P^{\cdot}$ se promítá do bodu O, jest n přímka, která v systému tomto přísluší bodu O.

Hledejme nyní bod L_1 příslušný přímce $l_1 \equiv OX$. Ježto přímka tato prochází bodem X, bude bod L_1 ležeti na přímce YZ. Svazek přímek kolem bodu X protíná YZ v řadě bodové, která jest v involuci s řadou bodů, která svazku tomu přísluší. V této involuci tvoří body Y, Z jeden pár, bod v nekonečnu na YZ a bod ξ, jenž půlí úsečku YZ druhý pár a bod L_1 s bodem L, v němž $l_1 = OX$ seče přímka YZ třetí pár. Známe takto pro involuci tuto jeden pár XY a střed ξ, můžeme tudíž k bodu L příslušný bod L_1 sestrojiti, třeba tak, že vztýčíme v ξ kolmici k přímce (YZ) a nanesme na ni úsečku $\xi\xi_1 = \xi Y$, pak kolmice v ξ_1 k $L\xi_1$ protne (YZ) v bodě L_1. Poněvadž $l_1 = OX$ prochází bodem O, leží L_1 na přímce n. Obdobně sestrojíme bod M_1, v němž přímka n protíná přímku (ZX) tím, že rozpůlíme úsečku ZX v bodě η, vedeme $\eta\eta_1 \perp ZX$ a učiníme úsečku $\eta\eta_1$ rovnou úsečce ηZ; seče-li OY přímku (ZX) v bodě M, pak kolmice k $M\eta_1$ v bodě η_1 vztýčená protíná (ZX) a bodě M_1. Tím jest přímka n stanovena.

Jelikož rovina $(s^{\cdot}L^{\cdot})$ dle předcházejícího jest kolmá k přímce $OL^{\cdot}_1$, jsou roviny $(s^{\cdot}L^{\cdot})$ a $(s^{\cdot}L^{\cdot}_1)$ k sobě kolmé a protínají tudíž rovinu $(On^{\cdot})$ ve dvou přímkách k sobě kolmých, a OL, OL_1 jsou průměty těchto přímek. Obdobně soudíme, že OM, OM_1 jsou průměty dvou kolmých k sobě přímek v rovině $(On^{\cdot})$. Pravoúhlá involuce v $(On^{\cdot})$ kolem bodu O promítá se tudíž ve směru



Obr. 2.

$s^{\cdot}$ v involuci OL, OL_1. OM. OM_1. V involuci této sestrojme pravoúhlý pár OA, OB pomocí libovolné kružnice k bodem O procházející. Přímka $s^{\cdot}$ není kolmá k průmětně, poněvadž kdyby byla k ní kolmá, musely by přímky OL, OL_1 jakož i OM, OM_1 býti k sobě kolmy, kterýžto případ vylučujeme. Následkem toho musí jedna z přímek OA, OB býti orthogonálným průmětem paprsku $s^{\cdot}$, kdežto druhá jest stopou roviny $(On^{\cdot})$ do průmětny. V rovině $(On^{\cdot})$ opišme dále kružnici $k^{\cdot}$ kolem bodu O jakožto středu, jejíž poloměr se rovná úsečkám $OX^{\cdot}$, $OY^{\cdot}$, $OZ^{\cdot}$; budiž $V^{\cdot}$ jeden průsečík přímky $(OM^{\cdot}_1)$ s $k^{\cdot}$. Poněvadž tato přímka leží též v rovině $OX^{\cdot}Z^{\cdot}$, proto leží $V^{\cdot}$ též na kružnici $u^{\cdot}$ mající úsečky $OX^{\cdot}$, $OZ^{\cdot}$ za poloměry. Průmět V jest tudíž jeden koncový bod průměru OM_1 ellipsy u mající v OX a OZ dva poloměry sdružené. Vztahujme u affinní polohou ke kružnici u_0 poloměru OX, pro přímku (OX) jakožto osu a (Z_0Z) jakožto směr affinity, je-li $(OZ_0) \perp (OX)$ a $\overline{OZ}_0 = OX$. Vedeme-li bodem Z rovnoběžku k (OM_1) až protne osu affinity v bodě 1, a je-li OV_0 poloměr kružnice u_0 rovnoběžný k $(Z_0 1)$, pak bodu V_0 na u_0 odpovídá affinně hledaný bod V na u. Známe pro průmět h kružnice $h^{\cdot}$ polohy os OA, OB, jeden bod V a průměr (OY) sdružený k (OV), tím jest ellipsa h úplně určena. Můžeme sestrojiti její vrcholy použitím některé ze známých konstrukcí.

Rozpůlíme ku př. poloměr OV v bodě 3 a spustíme s bodu tohoto kolmici k průměru (OY), jež protíná osy ellipsy h v bodech 4 a 5. Opišme pak dvě kružnice bodem V z nichž jedna má svůj střed v bodě 4, druhá v bodě 5. První protne osu $O5$ ve dvou vrcholech, druhá osu $(O4)$ v ostatních dvou vrcholech ellipsy $h^{\cdot}$ Tím docházíme k vrcholu hlavnímu A v našem označení na $(O4)$ a k vrcholu vedlejšímu B na $(O5)$. Délka úsečky OB ležící v průmětně rovná se délce úseček $OX^{\cdot}$, $OY^{\cdot}$, $OZ^{\cdot}$ a OA jest průmět úsečky $OA^{\cdot}$ ležící v rovině $(As^{\cdot})$ a kolmé k $s^{\cdot}$ Tím jest také přímka $s^{\cdot}$ stanovena jako v případě důkazu předcházejícího.

Když tedy předpokládáme, že jsou OX, OY, OZ průměty parallelní tří k sobě kolmých, stejných úseček $OX^{\cdot}$, $OY^{\cdot}$, $OZ^{\cdot}$, pak vede tato konstrukce k sestrojení délky jejich a k příslušnému směru promítání obdobným způsobem, jako v případu předcházejícím. Kdyby bod 5 nebyl přístupný, opsali bychom kolem O kružnici poloměru OA, a jeden její bod průsečný V_1 s kolmicí k OA bodem V vedenou spojili s O; seče-li rovnoběžka k OA bodem V vedená OV_1 v bodě V_2, jest $OB = OV_2$. Je-li $q^{\cdot}$ průměr kružnice $u^{\cdot}$ kolmý k $OV^{\cdot}$, pak jsou přímky $s^{\cdot}$, $q^{\cdot}$, $OY^{\cdot}$ kolmy k $OV^{\cdot}$, leží tudíž v jedné rovině, pročež průměty q a OY splývají. Obdrželi bychom tedy (OM_1) také z affinní polohy ellipsy u s kružnicí u_0, kdybychom bodem Z vedli rovnoběžku k OY protínající OX v bodě 2; kolmice v Z_0 k $(Z_0 2)$ protne OX v bodě 1, a přímka (OM_1) jest rovnoběžná k $(Z\,1)$. Obdobně bychom mohli sestrojiti přímku OL_1, čím dospějeme jiným způsobem než prve opět k involuci OL, OL_1. OM, OM_1. Jest tedy (OV), (OY) pár sdružených průměrů ellipsy mající OX, OZ za sdružené poloměry, obdobně (OL), (OL_1) jest pár sdružených průměrů ellipsy mající OY, OZ za sdružené poloměry a konečně bychom obdrželi třetí pár zmíněné involuce v přímce (OZ) a v průměru k ní sdruženému ellipsy, jež má OX, OY za sdružené poloměry.

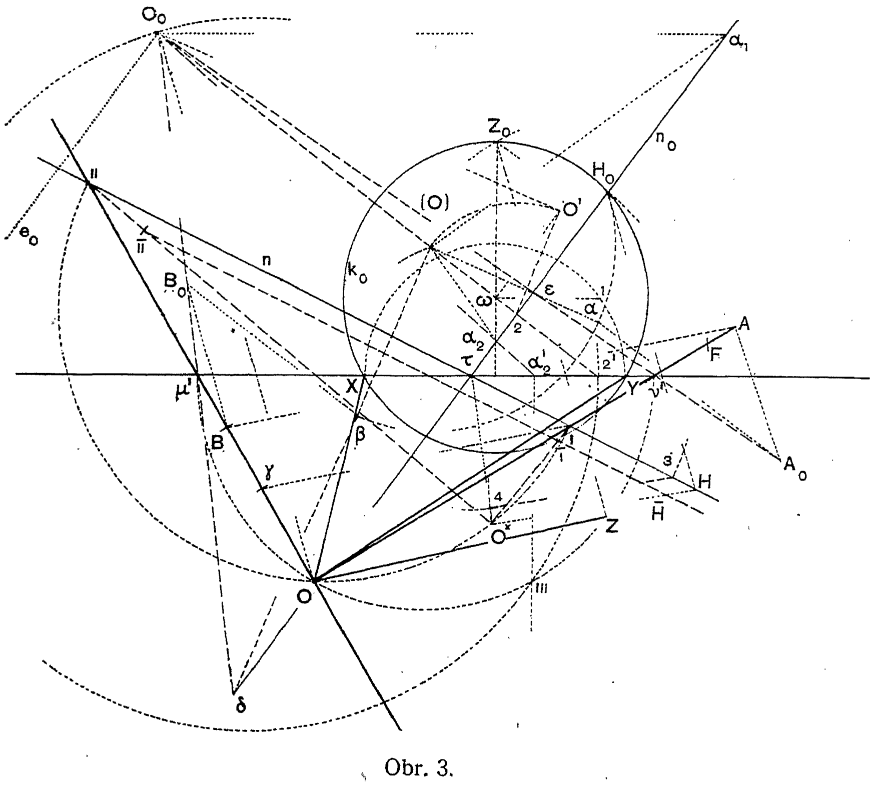
6. Vycházíme-li naopak od ellipsy h a směru $s^{\cdot}$, seznáváme, že h jest průmětem ve směru $s^{\cdot}$ kružnice $h^{\cdot}$ v rovině bodem O normálně k $s^{\cdot}$ položené a OV průmětem jednoho poloměru $OV^{\cdot}$ kružnice $h^{\cdot}$, který leží na průsečné přímce rovin $(On^{\cdot})$, $(OZ^{\cdot}Y^{\cdot})$, a OL_1 jest průmětem přímky, v níž rovina $OZ^{\cdot}Y^{\cdot}$ protíná rovinu $(On^{\cdot})$, když značí $n^{\cdot}$ přímku promítající se do n a ležící v rovině trojúhelníka, jehož průmět jest XYZ. Přímky bodem O a roviny bodem O k nim normálné protínají rovinu $X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot}$ v polárním poli, jehož průmět parallelní jest rovněž pole polární. V tomto poli jest trojúhelník utvořený přímkami OM_1, OY, n jedním trojúhelníkem polárním. Přiřadíme-li ještě bodu X přímku YZ, jest tím a uvedeným trojúhelníkem jistá polarita v uvažovaném poli stanovena. Tato polarita jest totožná s polaritou, z níž jsme v předcházejícím článku vycházeli. Z toho plyne, že můžeme předpokládat, že OX jest průmětem úsečky $OX^{\cdot}$ kolmé k rovině $(OY^{\cdot}Z^{\cdot})$, takže musí pak býti $OX^{\cdot} \perp OZ^{\cdot}$. Body V, Z, X, leží dle konstrukce provedené na ellipse u, která má OX, OZ za sdružené poloměry. Ellipsa ta má dle provedené konstrukce (OV), (OM) za průměry sdružené. Rovina $OM^{\cdot}Y^{\cdot}$ jest normálná k (OM_1) a protíná $(X^{\cdot}Z^{\cdot})$ v bodě $M^{\cdot}$; musí tudíž býti $(OM^{\cdot}) \perp (OM^{\cdot}_1)$. Ellipsa u jest průmětem parallelním ellipsy $u^{\cdot}$ pro níž přímky ve dvou párech sdružených průměrů $(OX^{\cdot})$; $(OZ^{\cdot})$ a $(QM^{\cdot})$, $(OM^{\cdot}_1)$ jsou k sobě kolmy. Musí tudíž $u^{\cdot}$ býti kružnicí, následkem čehož $\overline{OX^{\cdot}} = \overline{OZ^{\cdot}}$. Poněvadž v polárním poli posledně uvažovaném bodu Y přísluší přímka (XZ), proto jest $(OY^{\cdot}) \perp (OX^{\cdot}Z^{\cdot})$ a následkem toho jsou OX, OY, OZ průměty parallelní tří k sobě navzájem kolmých úseček $OX^{\cdot}$, $OY^{\cdot}$, $OZ^{\cdot}$. V poli tom přísluší těžišti ω trojúhelníka XYZ přímka v nekonečnu, z čehož plyne, že přímka, která spojuje O s těžištěm $\omega^{\cdot}$ trojúhelníka $X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot}$ jest k jeho rovině kolmá. Máme tedy na kolmých navzájem přímkách úsečky $\overline{OX^{\cdot}} = \overline{OZ^{\cdot}}$ a úsečku $\overline{OY^{\cdot}}$ takovou, že průmět orthogonálný bodu O do roviny trojúhelníka $X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot}$ jest těžištěm jeho. Jelikož však bod tento musí býti bodem výšek trojúhelníka $X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot}$, proto musí tento býti rovnostranný, a musí tudíž býti $OY^{\cdot} = OX^{\cdot} = OZ^{\cdot}$.

Tím jest důkaz věty Pohlke-ho proveden.

III.

7. Vycházeli jsme v posledních úvahách od involuce rovin k sobě kolmých ve svazku přímkou promítající $s^{\cdot}$, vedenou bodem O. Můžeme ale na základě téhož východiska provésti konstrukci věty Pohlke-ho také následovně: Promítejme (obr. 3.) útvary nejprv do roviny $(X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot})$ ve směru $s^{\cdot}$ a odtud zpět do průmětny axonometrické M. Průměty útvarů v. prostoru jsou totožny s průměty jejich průmětů do roviny $(X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot})$. Průměty útvarů prostorových do roviny $P^{\cdot} = (X^{\cdot}Y^{\cdot}Z)$ a do roviny M ve směru $s^{\cdot}$ jsou dvě pole affinní. Sestrojíme k poli $P^{\cdot}$ pole podobné P_0 v M položené zvětšením

tak, aby bylo s polem M v poloze affinní pro jednu stranu trojúhelníka XYZ na př. (XY) jakožto osu affinity. Poněvadž $X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot}$ má býti trojúhelník rovnostranný, proto mu musí odpovídati v P_0 trojúhelník rovnostranný XYZ_0. Affinní polohou jest pak bodu Z v M přiřaděn bod Z_0 v P_0, čímž poloha ta jest stanovena; v ní přísluší bodu O bod O_0. Nyní zpodobněme prostor tak, aby bodům



Obr. 3.

$X^{\cdot}$, $Y^{\cdot}$, $Z^{\cdot}$ příslušely body X, Y, Z_0, pak bude bodu O příslušeti bod $\overline{O}$ tak, že $\overline{O}X = \overline{O}Y = \overline{O}Z_0$ a paprsku $s^{\cdot}$ bude příslušeti paprsek $\overline{O}O_0$. Průmět orthogonálný ω bodu $\overline{O}$ do roviny XYZ_0 jest těžištěm trojúhelníka XYZ_0. Opíšeme-li tedy v průmětně M nad průměrem XY kružnici, udává její polotětiva $\omega 1$ kolmá k $Z_0\omega$ vzdálenost bodu $\overline{O}$ od roviny M; $(O_0\omega)$ jest tedy průmět orthogonálný přímky $\overline{O}O_0$. Sklopíme-li rovinu $O_0\overline{O}\omega$ do průmětny, bude bod O', pro nějž $\omega O' \perp O_0\omega$ a $\omega O' = \overline{\omega 1}$, sklopením bodu $\overline{O}$ a vztýčíme-li v O' kolmici k $O'O_0$, jež protne $(O_0\omega)$ v bodě 2, pak jest přímka n_0 kolmá k $(O_0\omega)$ a bodem 2 vedená stopou do M roviny $(\overline{O}n_0)$ kolmé k paprsku $\overline{OO_0}$. Sklopme tuto rovinu do průmětny, čímž přejde bod $\overline{O}$ do polohy (O).

Involuce rovin k sobě kolmých ve svazku přímkou $O_0\overline{O}$ protíná (On_0) v involuci pravých úhlů, které přísluší ve sklopení roviny této opět involuce pravých úhlů. Rovina svazku $\overline{OO_0}$ rovnoběžná s (XY) nechť protne n_0 v bodě α_4, a kolmice v (O) k přímce $(O)\ \alpha_4$ ležící v průmětně nechť protne n_0 v α_2, pak jsou $O_0\alpha_2$, $O_0\alpha_4$ stopy dvou rovin ve svazku $\overline{OO_0}$, jež jsou k sobě kolmy.

Přímka $O_0 2$ a přímka e_0 k ní kolmá bodem O_0 jsou taktéž stopy dvou k sobě kolmých rovin ve svazku O_0O. Ve vytčené poloze affinní odpovídají tudíž přímkám $(O_0\alpha_4)$, $(O\alpha_2)$; $(O^0 2)$, e_0 pole P_0 přímky jež jsou průměty ve směru $s^{\cdot}$ dvou párů k sobě kolmých rovin. Nechť přímky $(O\alpha_2)$, $(O2)$, e_0 protínají osu affinity v bodech α'_2, $2'$, ε'. Involuce pravoúhlá rovin ve svazku $s^{\cdot}$ protíná tudíž (XY) v involuci bodové dané párem $2'\varepsilon'$ a mající α'_2 za bod centrálný. Protneme-li tedy přímku kolmou v α'_2 k (XY) kružnicí průměru $\overline{2'\ \varepsilon'}$ v bodě III, pak protne kružnice procházející body III a O, která má svůj střed na ose affinity tuto osu v bodech μ', ν' a $O\mu'$, $O\nu'$ jsou k sobě kolmé průměty dvou kolmých rovin procházejících přímkou $s^{\cdot}$. Rovinám těm příslušejí dvě k sobě kolmé roviny přímkou $O_0\ O$, jejichž stopy do M v P_0 jsou přímky $(O_0\mu')$, $(O_0\nu')$. Roviny ty protínají $\overline{(On_0)}$ v přímkách, jež jsou ve sklopení $[(O)\ n_0]$ vyjádřeny přímkami $(O)\ \delta$, $(O)\ \varepsilon$, značíme-li ε a δ průsečíky přímky n_0 s přímkami $(O_0\nu')$ a $(O_0\mu')$. Naneseme-li od bodu (O) ve smyslu k přímce n_0 na $\overline{O\varepsilon}$ a $\overline{O\delta}$ příslušně délky $(O)\alpha = (O)\beta = OH_0 = OX$, kde H_0 jest jeden z průsečíků přímky n_0 s kružnicí k_0 trojúhelníku XYZ_0 opsanou, pak protíná kolmice na n_0 s bodů α přímku $(O_0\nu')$ v bodě A_0, s bodu β přímku $(O_0\mu')$ v bodě B_0, a úsečky $\overline{O_0A_0}$, $\overline{O_0B_0}$ jsou průměty ve směru $\overline{OO_0}$ do roviny XYZ^0 dvou k sobě a k $(\overline{OO_0})$ kolmých úseček majících s $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ_0}$ stejné délky. V uvažované affinní poloze přísluší bodu A_0 bod A na $(O\nu')$ a bodu B_0 bod B na $(O\mu')$, a jsou tedy OA, OB parallelní průměty dvou úseček k sobě a k přímce $s^{\cdot}$ kolmých majících délku rovnou délce úseček $OX^{\cdot}$, $OY^{\cdot}$, $OZ^{\cdot}$. Jelikož průměty OA, OB jsou rovněž k sobě kolmé, proto jest jedna z nich stopou a druhá orthogonálným průmětem přímky spádové pro rovinu $H^{\cdot}$ procházející bodem O a kolmou k $s^{\cdot}$ V obrazci jest $OA > OB$, proto jest zde (OB) stopa roviny $H^{\cdot}$ a $\overline{OB}$ udává pravou délku úseček $OX^{\cdot}$, $OY^{\cdot}$, $OZ^{\cdot}$.

Poloha paprsku $s^{\cdot}$ k průmětně jest pomocí ellipsy, jež má A za vrchol hlavní, B za vrchol vedlejší stanovena tak jako v dřívějších úvahách.

Odvodíme-li tedy k soustavě $\bar{O}$ (X, Y, Z_0) soustavu podobně položenou $\bar{O}$ $(\bar{X}\ \bar{Y}\ \bar{Z})$ pro $\bar{O}$ jakožto střed podobnosti tak, aby úsečka $O\bar{X}$ rovnala se úsečce OB, při čemž body X a $\bar{X}$ mohou ležeti po téže straně neb na různých stranách bodu $\bar{O}$, lze přemístiti soustavu $\bar{O}(\bar{X}\ \bar{Y}\ \bar{Z})$ do polohy $O\,(X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot})$ tak, a to dvojím způsobem, že se promítá ve směru $s^{\cdot}$ do něhož přechází přímka $\ddot{O}O_0$ v soustavu $O\,(XYZ)$. Tím jest věta Pohlke-ho znovu dokázána.

IV.

8. Posledně podané odvození souvisí úzce s důkazem Schwarzovým a podává jednoduchou konstrukci délky OB a směru $s^{\cdot}$ v téže poloze $\bar{O}(XYZ_0)$ ke průmětně jako prve. (obr. 3.). Paprsek $s^{\cdot}$ protne rovinu $(X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot})$ v bodě $O^{\cdot}_\sigma$, promítajícím se ovšem do O. V soustavě $\bar{O}\,(XYZ_0)$ podobné k $O\,(X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot})$ bodu $O^{\cdot}_\sigma$ přísluší bod O_0 odpovídající bodu O v affinitě, v níž bodům X, Y, Z přísluší body X, Y, Z_0 a která jest tedy prve uvažovanou polohou affinní. Stopa n_0 roviny $(\bar{O}n_0) \perp (O_0\,\bar{O})$ přísluší v affinní poloze v M přímka n; která prochází průsečíkem τ přímek n_0, (XY) a jest rovnoběžná k prve vytčené přímce $O\varepsilon'$.

Vytkněme si v rovině $H_0 = (\ddot{O}n_0)$ trojúhelník $\tau\, H_0\,(O)$, kde má H_0 týž význam jako prve. Je-li H bod na n affinně příslušné bodu H_0, tu z podobnosti soustav $O\,(X^{\cdot}Y^{\cdot}Z^{\cdot})$, $\bar{O}$ (XYZ_0) plyne, že orthogonálný průmět trojúhelníka $O\tau H$ do roviny $H^{\cdot} \perp s^{\cdot}$ musí býti podobný trojúhelníku $\ddot{O}\tau H_0$. Dle konstrukce Guglerovy můžeme polohu roviny $H^{\cdot}$ stanoviti. Sestrojíme trojúhelník $\tau\,34$, jehož strana $(\tau\,3)$ leží na n a jenž jest shodný s trojúhelníkem $\tau\,(O)H_0$ a k $\tau\,34$ trojúhelník podobně položený τHO^*. Dále sestrojíme kružnici, která prochází body O, O^* a má svůj střed na n. Seče-li kružnice tato přímku n v bodech I a II, pak jest jedna z přímek OI, OII stopou roviny $H^{\cdot}$, druhá průmětem přímky spádové této roviny. Poněvadž jest trojúhelník τO^*H větší nežli podobný mu průmět orthogonálný trojúhelníka τOH do roviny $H^{\cdot}$ musí délka stopy její mezi O a n býti menší než délka příslušné úsečky v affinní poloze mající n za osu a O, O^* za pár sobě příslušných bodů. V obrazci zvoleném jest $\overline{\mathrm{II}O^*} > \mathrm{II}O$, a tedy $\overline{\mathrm{I}O^*} < \overline{\mathrm{I}O}$; proto jest OII stopou roviny $H^{\cdot}$. Sestrojíme na $(O^*\mathrm{II})$ délku $O^*\overline{\mathrm{II}} = O\mathrm{II}$ a vedeme bodem $\overline{\mathrm{II}}$ rovnoběžku k n, která nechť protne (O^*H) v bodě $\bar{H}$, tu jest z naší konstrukce patrno, že orthogonálný průmět trojúhelníka $O\,H$II do roviny $H^{\cdot}$ jest shodný s trojúhelníkem $O^*\bar{H}\overline{\mathrm{II}}$. Poněvadž $\overline{OX} = \overline{O}H_0$, proto jest $O^*\bar{H} = OX^{\cdot} = OY^{\cdot} = OZ^{\cdot} = OB$, kde B leží na OII a rovná se malé poloose ellipsy h, do níž se kružnice v rovině $H^{\cdot}$ středu O a poloměru $OX^{\cdot}$ parallelně promítá. Seče-li přímka $(\overline{\mathrm{II}}\ \bar{H})$

přímku (O^*I) v bodě I, má průmět orthogonálný úsečky OI do H· délku O^*I. Naneseme-li tudíž na OI délku $O\gamma = O^*I$ na jednu neb druhou stranu bodu O. Rovnoběžka bodem B k ($I\gamma$) vedená protíná (OI) ve vrcholu hlavním A ellipsy h. Je-li F jedno ohnisko její, rovná se $\sphericalangle OFB$ úhlu, jejž uzavírá přímka s' s průmětnou M.

*

Sur quelques démonstrations et constructions du théorème de Pohlke.

(Extrait de l'article précédent.)

Le mémoire contient, auf fond, quatre démonstrations élémentaires du théorème de Pohlke, et les constructions respectives que l'auteur a tâché de rendre aussi simples que possible. Soient OX, OY, OZ les segments donnés dans le plan de projection; la première démonstration repose sur ce fait que l'ellipse circonscrite au triangle XYZ, et dont le centre est le centre de gravité du triangle, doit être la projection d'une circonférence circonscrite au triangle dont XYZ est la projection. Les deux autres démonstrations s'appuient sur l'expression de l'involution des plan normaux d'un faisceau, dont l'axe est le rayon projetant; enfin la quatrième démonstration est basée sur le théorème bien connu de Gugler, appliqué aux figures en question de manière que la construction respective soit la plus simple.

Pokus o určení zeměpisné šířky bez libelly.

Napsal *Jindřich Svoboda.*

Nad rtuťovým horizontem H (obr. 1.) umístíme v rovině prvního vertikálu zrcátko Z. Proti rtuťovému horizontu namíříme v rovině meridiánu dalekohled D. Objektiv dalekohledu O jest postaven tak, že paprsky hvězdy vrcholící jižně zenitu (S_j) odrazivše se na zrcátku a rtuťovém horizontu vstupují do dalekohledu východní polovinou objektivu, kdežto paprsky hvězdy vrcholící severně zenitu (S_s) po jediném odrazu na rtuťovém horizontu vstupují do dalekohledu západní polovinou objektivu. Volíme-li hvězdy, které mají při vrcholení přibližně stejnou zenitovou vzdálenost (z_j, z_s) můžeme, aniž bychom pohnuli dalekohledem, měřiti mikrometricky jako při Talcottově methodě, rozdíl zenitových vzdáleností a pomocí

vzorce
$$\varphi = \frac{1}{2}(\delta_j + \delta_s) + \frac{1}{2}(z_j - z_s), \tag{1}$$

známe-li deklinaci hvězd (δ_j, δ_s), určiti výšku pólu φ.