František Fiala

Příspěvek k nomografickému řešení rovnic normálních o dvou neznámých

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 80--84

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109350

*quelques auteurs**). Les composantes d'un vecteur (axial ou polaire) changent de signe dans le nouveau système. On a les formules (2) pour les deux espèces de vecteurs.

La différence entre les deux espèces de vecteurs s'exprime, d'une facon précise, comme il suit: Les deux espaces $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ sont symétriques par rapport à l'origine. Le vecteur $\mathfrak{A}$ est symétrique au vecteur $-\mathfrak{A}$ par rapport à l'origine. Les deux vecteurs $\mathfrak{A}$ et $-\mathfrak{A}$ ont la même position relative dans les deux systèmes $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ et $-\mathfrak{i}, -\mathfrak{j}, -\mathfrak{k}$. *Pour obtenir un vecteur „analogue" dans le nouveau système, il faut changer le signe des composantes du vecteur polaire* $\mathfrak{A}$ et écrire les formules (12).

Il n'en est pas de même quand il s'agit des vecteurs axiaux. Les parallélogrammes ($\mathfrak{A}\mathfrak{B}$) et ($-\mathfrak{A}, -\mathfrak{B}$) sont symétriques par rapport à l'origine; mais les deux produits extérieurs (Plangrösse) doivent être représentés *par le même vecteur* — vecteur axial.

Donc, le vecteur $\mathfrak{A}$ axial a la même position relative dans les deux systèmes $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$, et pour obtenir un vecteur axial „analogue" dans le système inverse, on ne doit *point changer le signe* du vecteur axial. Il en est de même pour les „pseudoscalaires". Le pseudoscalaire $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$) n'est qu'une „partie de l'espace", c. à d. une quantité vectorielle du 3[e] degré dans un espace à quatre dimensions, qui doit être représenté par un vecteur dans cette espace. Ce vecteur sera polaire, puisque

$$\mathfrak{A}\,[\mathfrak{B},\mathfrak{C}] = -\,(-\,\mathfrak{A}\,[-\,\mathfrak{B}, -\,\mathfrak{C}]).$$

2. Le système positif se transforme en un système negatif par une symétrie par rapport à un plan des coordonnées. Cela s'exprime p. ex. par la transformation $\mathfrak{i} = -\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}'$. On a, dans ce cas, les dernières formules de l'article. Les vecteurs polaires changent *une* composante, les vecteurs axiaux en *changent deux*.

Příspěvek k nomografickému řešení rovnic normálních o dvou neznámých.

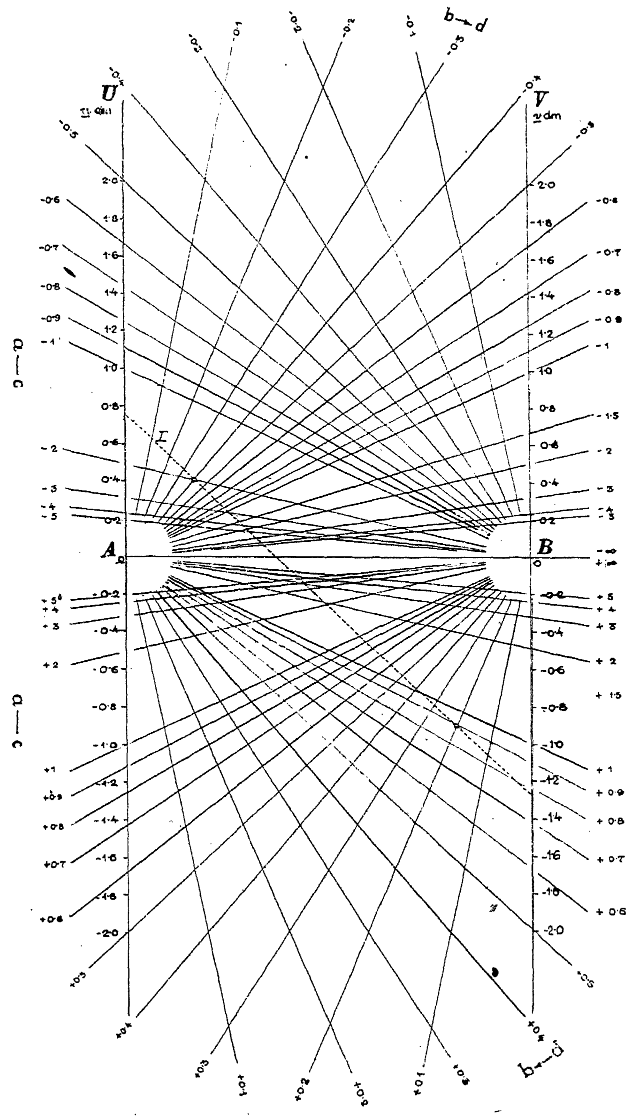
Napsal Dr. *Frant. Fiala.*

Jedná-li se o hodnoty přibližné, buď že možno se při výpočtu spokojiti s menší přesností, nebo že chceme kontrolovati výpočet, v němž dopustili jsme se chyby, je výhodno užíti při řešení metody nomografické. Chci poukázati na nomografické řešení rovnic normálních o dvou neznámých, jež zhusta v praktické geodesii přicházejí v úvahu; lze pro ně sestrojiti nomogram velmi snadno, jehož upotřebení je nadmíru jednoduché.

*) Ignatowsky, Jahnke, Encyclopédie des sc. math. t. IV. etc.

Uvažovati budeme rovnice tvaru

$$\begin{aligned} a\,u+b\,v+1&=0 \\ c\,u+d\,v+1&=0 \end{aligned} \quad \ldots \; 1)$$



Obr. 1.

ačkoliv prakticky přicházejí ve tvaru obecnějším

$$\begin{aligned} Au+Bv+C&=0 \\ A_1\,u+B_1\,v+C_1&=0, \end{aligned}$$

jež však se dají snadno na tvar 1) převésti užitím nomogramu multiplikačního, na němž stanovíme pomocí nomografické přímky rychle hodnoty

$$\frac{A}{C} = a, \frac{B}{C} = b, \frac{A_1}{C_1} = c, \frac{B_1}{C_1} = d.$$

Mějme pravoúhlou soustavu os X, Y (obr. 1) a v této soustavě tři přímky jdoucí jedním bodem M

$$p \equiv \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0 \quad (\alpha = O_u A,\ \beta = O_u B)$$

$$p_1 \equiv \frac{x}{\delta} + \frac{y}{\beta_1} - 1 = 0 \quad (\delta = O_u O_v,\ \beta_1 = O_u C)$$

$$p_2 \equiv \alpha_2 x - y = 0.$$

Zvolme osu Y za nomografickou osu U a položme na ní proměnlivý úsek $\beta = u$, dále bodem O_v veďme nomografickou osu V paralelně s osou U; přímka p vytíná na ní úsek v. Je pak

$$v : u = (\alpha - \delta) : \alpha$$

$$\alpha = \frac{u\,\delta}{u - v}$$

a rovnice přímek uvažovaných budou míti tvar

$$p \equiv (u - v)\,x + \delta y - u\,\delta = 0$$

$$p_1 \equiv \beta_1 x + \delta y - \beta_1 \delta = 0$$

$$p_2 \equiv \alpha_2 x - y = 0.$$

Mají-li procházeti bodem M, musí

$$\begin{vmatrix} u - v & \delta & u\,\delta \\ \beta_1 & \delta & \beta_1 \delta \\ \alpha_2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$\alpha_2 \delta u + \beta_1 v - \alpha_2 \beta_1 \delta = 0.$$

Srovnáme-li rovnici poslední s rovnicí

$$a u + b v + 1 = 0,$$

jest

$$\beta_1 = -\frac{1}{a},\ \alpha_2 = -\frac{1}{b\,\delta}.$$

Ze známých a, b a δ možno najíti β_1 a α_2 a konstruovati přímky p_1 a p_2. Je-li dána pak ku př. hodnota v, možno najíti hodnotu u předložené rovnice přímkou p, procházející průsečíkem přímek p_1 a p_2. Při proměnném a a b odpovídá rovnici

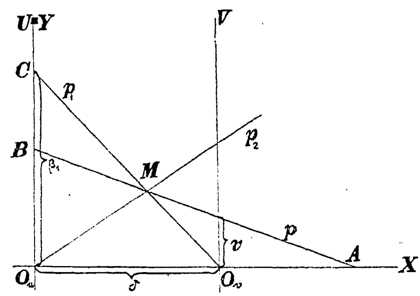
$$\beta_1 = -\frac{1}{a}$$

svazek přímek o vrcholu O_v a rovnici

$$\alpha_2 = -\frac{1}{b\,\delta}$$

svazek přímek o vrcholu O_u. Lze snadno tudíž z předloženého sestrojiti nomogram, který řeší rovnici $au+bv+1=0$, interpretujeme-li všechny veličiny jakožto proměnné. Proměnné u a v jsou znázorněny pravidelnou přímou řadou bodovou na osách U a V, proměnná a je zobrazena svazkem kotovaných přímek jdoucích bodem O_v, a proměnná b svazkem kotovaných přímek o vrcholu O_u.

Pro řešení rovnice druhé $cu+dv+1=0$ možno použíti téhož nomogramu, jen stačí místo a psáti c a místo b proměnnou d.



Obr. 2.

Při řešení první rovnice z (1) musí kotované body pro u a v, jakož i průsečík kotovaných přímek a, b ležeti na jedné přímce p' — přímce nomografické — a rovněž tak řešíme-li rovnici druhou z (1), musí kotované body pro u a v s průsečíkem kotovaných přímek c, d ležeti na přímce p''. Uvažujeme-li však současně obě rovnice (1), kdež u a v znamenají v obou rovnicích tytéž hodnoty, pak musí $p' \equiv p'' \equiv p$. Tato vlastnost poskytuje zcela jednoduché řešení předložených rovnic normálních. Najdeme průsek kotovaných přímek a, b, jakož i průsek kotovaných přímek c, d a spojnice těchto průseků vytíná na ose U a V žádané kořeny u a v rovnic (1)

Na obr. 2. je náčrt takového nomogramu, na němž předpokládáno, že a, b, c, d mají malé hodnoty, většinou menší než jednotku, jak prakticky v geodesii ponejvíce přicházejí a u a v nepřesahuje 2 dm. Pro rovnice

$$-2u - 0{\cdot}4v + 1 = 0$$
$$+0{\cdot}2u + 0{\cdot}9v + 1 = 0$$

podává nomografická přímka (v obraze čárkovaná) hodnoty

$$u = +0{\cdot}75\,dm,\quad v = -1{\cdot}28\,dm.$$

Řešení rovnice (1) dá se také ihned odvoditi z obecné rovnice pro tři systémy dvojkotovaných bodů uvedené v d'Ocagneově „Traité de Nomographie“ Paris 1899 na str. 323.

*

Contribution à la résolution des équations normales à deux inconnues par la méthode nomographique.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur applique les abaques à points alignés à la solution des équations

$$au + bv + 1 = 0$$
$$cu + dv + 1 = 0.$$

On résoud ces équations par un abaque qui se compose de deux échelles rectilignes papallèles et de deux faisceaux formés de radiantes issues des origines o_u et o_v. La droite nomographique résoud les èquations.

Numericko-grafická tabulka logaritmická.

Napsal Dr. *Vilém Havlík.*

Položme

$$X = x + x_0. \tag{1}$$

Pak jest

$$\log X = \log x + \log\left(1 + \frac{x_0}{x}\right).$$

Vykotujme si dvě přímky; první při koncových bodech délek

$$y = \log t$$

hodnotami t a druhou při koncových bodech délek

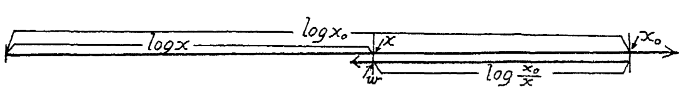
$$z = \log \tau$$

hodnotami

$$w = \log(1 + \tau).$$

Přiložíme-li přímku druhou k prvé tak, aby její počátek padl do bodu o kotě $t = x$, vytkne nám bod prvé přímky mající kotu $t = x_0$, na druhé bod s kotou $w = \log\left(1 + \frac{x_0}{x}\right)$. (Viz obr. 1.) Jest pak:

$$\log X = \log x + w. \tag{3}$$



Obr. 1.

Těchto relací užijeme k restrikci tabulky pětimístných logaritmů na numerickou tabulku A a grafické tabulky B a C. — Ježto při dosti malých požadavcích přesnosti musí býti modul obou