Václav Špaček

Rovnice volného pádu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 217--227

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109347

question sur l'orthomorphie ou sur l'authalité d'une carte donnée, puis l'interpolation dans un canevas cartographique donné et enfin la détermination de l'échelle de la carte, si celle-ci n'est pas connue.

Rovnice volného pádu.

Napsal Dr. *V. Špaček.*

Rovnice pohybu hmotného bodu m v pevných osách souřadnicových X_1, Y_1, Z_1

$$1) \qquad m\frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1 \qquad m\frac{d^2 y_1}{dt^2} = Y_1 \qquad m\frac{d^2 z_1}{dt^2} = Z_1$$

transformujme do soustavy souřadnicové spojené s povrchem otáčející se země. Abstrahujíce od postupného pohybu země, volme za počátek O_1 střed zemský, Z_1 v ose zemské směrem k severnímu polu. Poledníková rovina pozorovacího místa O stanovena je svislicí a přímkou vedenou bodem O rovnoběžně k ose zemské. Obsahuje zenit i pól nebeský P, neobsahuje však obecně rotační osu zemskou. Jest s ní ovšem rovnoběžna obsahujíc přímku OP rovnoběžnou se Z_1. Středem země O_1 veďme kolmici k rovině poledníkové směrem k východu a její polohu v okamžiku, od něhož začínáme čas t počítati, volme za nepohyblivou osu Y_1. Osa X_1 jde počátkem O_1 kolmo k rovině $Y_1 Z_1$ na tu stranu, kde leží O. V době $t = 0$ jest X_1 rovnoběžna s rovinou poledníku bodu O.

Bodem O_1 veďme k rovině poledníka druhou kolmici Y_2, jež jsouc pevně spojena se zemí otáčí se touž úhlovou rychlostí ω jako země. Průsečnice roviny poledníkové a rovníka budiž osou X_2, osa Z_2 jde rovnoběžně se Z_1. Počátek O_2 této soustavy otáčí se rovnoměrně kol O_1 v rovině rovníka rychlostí ω. Je-li $O_1 O_2 = \varrho$ a leží-li osa zemská západně od roviny poledníkové, jsou souřadnice bodu O_2 v době t

$$2) \qquad \xi = -\varrho \sin \omega t \qquad \eta = \varrho \cos \omega t \qquad \zeta = 0.$$

Současně otočí se též osy X_2, Y_2 o úhel ωt, tak že z všeobecných rovnic vyjadřujících závislost souřadnic téhož bodu v obou soustavách

$$3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \xi + x_2 \cos X_2 X_1 + y_2 \cos Y_2 X_1 + z_2 \cos Z_2 X_1 \\ y_1 &= \eta + x_2 \cos X_2 Y_1 + y_2 \cos Y_2 Y_1 + z_2 \cos Z_2 Y_1 \\ z_1 &= \zeta + x_2 \cos X_2 Z_1 + y_2 \cos Y_2 Z_1 + z_2 \cos Z_2 Z_1 \end{aligned}$$

obdržíme

$$4) \qquad \begin{aligned} x_1 &= -\varrho \sin \omega t + x_2 \cos \omega t - y_2 \sin \omega t \\ y_1 &= \varrho \cos \omega t + x_2 \sin \omega t + y_2 \cos \omega t \\ z_1 &= z_2. \end{aligned}$$

Dosaďme tyto hodnoty do rovnic 1), prvou z nich násobme $\cos \omega t$, druhou $\sin \omega t$ a sečtěme. I bude

$$5)\quad m\left(\frac{d^2 x_2}{dt^2} - 2\omega \frac{dy_2}{dt} - \omega^2 x_2\right) = X_1 \cos \omega t + Y_1 \sin \omega t = X_2$$

a podobně

$$m\left(\frac{d^2 y_2}{dt^2} + 2\omega \frac{dx_2}{dt} - \omega^2 \varrho - \omega^2 y_2\right) = Y_1 \cos \omega t - X_1 \sin \omega t = Y_2.$$

Na pravé straně stojí součet průmětů složek X_1, Y_1, Z_1 na osy X_2, Y_2, to jest složky síly ve směru těchto os. Rovnice 5) a třetí rovnice 1)

$$5')\qquad m\frac{d^2 z_2}{dt^2} = Z_1 = Z_2$$

vyjadřují pohyb bodu m v soustavě X_2, Y_2, Z_2.

V bodě O volme za osu X tečnu poledníka směrem k severu, za Z směr svislý dolů, osu Y kolmo k rovině poledníka k východu. Jest tedy $Y // Y_2$ a osy tvoří spolu tyto úhly: $ZX_2 = \pi - \psi_0$, je-li ψ_0 zeměpisná šířka bodu O, $ZZ_2 = \pi/2 + \psi_0$; $XZ_2 = \psi_0$, $XX_2 = \pi/2 + \psi_0$. Je-li $OO_2 = R_0$, φ_0 úhel, jejž tvoří R_0 s osou X_2, jsou souřadnice bodu O v soustavě X_2, Y_2, Z_2

$$6)\qquad x_0 = R_0 \cos \varphi_0 \quad y_0 = O \quad z_0 = R_0 \sin \varphi_0.$$

Souřadnice bodu A (x, y, z) budou souviseti s x_2, y_2, z_2 rovnicemi tvaru 3), totiž

$$7)\qquad \begin{aligned} x_2 &= R_0 \cos \varphi_0 - x \sin \psi_0 - z \cos \psi_0 \\ y_2 &= y \\ z_2 &= R_0 \sin \varphi_0 + x \cos \psi_0 - z \sin \psi_0. \end{aligned}$$

Složky síly ve směrech X, Y, Z jsou

$$8)\qquad \begin{aligned} X &= X_2 \cos XX_2 + Y_2 \cos XY_2 + Z_2 \cos XZ_2 = -X_2 \sin \psi_0 + \\ &\qquad + Z_2 \cos \psi_0 \\ Y &= Y_2 \\ Z &= -X_2 \cos \psi_0 - Z_2 \sin \psi_0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do rovnic 5, 5′ hodnoty 7) a násobíme-li jednu z nich, jež obsahuje X_2 a Z_2, činitelem $\cos \psi_0$, druhou $\sin \psi_0$, obdržíme sečtením resp. odečtením obou rovnice pohybu bodu A vzhledem k osám X, Y, Z

$$9)\qquad \begin{aligned} & m\left(\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\omega \frac{dy}{dt} \sin \psi_0 + \omega^2 (R_0 \cos \varphi_0 - x \sin \psi_0 - z \cos \psi_0) \sin \psi_0\right) = \\ &\qquad = Z_2 \cos \psi_0 - X_2 \sin \psi_0 = X \\ & m\left(\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\omega \frac{dy}{dt} \cos \psi_0 + \omega^2 (R_0 \cos \varphi_0 - x \sin \psi_0 - z \cos \psi_0) \cos \psi_0\right) = \\ &\qquad = -X_2 \cos \psi_0 - Z_2 \sin \psi_0 = Z \\ & m\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - 2\omega \frac{dx}{dt} \sin \psi_0 - 2\omega \frac{dz}{dt} \cos \psi_0 - \omega^2 \varrho - \omega^2 y\right) = Y_2 = Y. \end{aligned}$$

Je-li $U=$ konst. rovnice hladinové plochy jdoucí počátkem, jsou směrové cosinusy normály této plochy λ, μ, ν dány úměrou

$$10)\qquad \lambda : \mu : \nu = \frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y} : \frac{\partial U}{\partial z}.$$

V počátku samém splývá normála s osou Z, jest tedy

$$(\partial U/\partial x)_0 = U_1 = \theta\ ,\ U_2 = 0\ ,\ U_3 = (\partial U/\partial z)_0 = g_0$$

jest urychlení tíže v počátku. Rozvineme-li derivace U dle řady Taylorovy, bude v blízkosti O

$$11)\qquad \begin{aligned} \partial U/\partial x &= x U_{11} + y U_{12} + z U_{13} \\ \partial U/\partial y &= x U_{12} + y U_{22} + z U_{23} \\ \partial U/\partial z &= g_0 + x U_{13} + y U_{23} + z U_{33}, \end{aligned}$$

kdež U_{11}, U_{12} atd. jsou hodnoty druhých derivací příslušné počátku. Derivace $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$ značí současně složky tíže ve směru os X, Y, Z. Označíme-li je krátce F_1, F_2, F_3, bude výsledné g dáno rovnicí $g^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$, z čehož

$$12)\qquad g = F_3\left(1 + \frac{F_1^2 + F_2^2}{2F_3^2}\right).$$

Směr g spadá na všech místech do směru normály N. Směřuje-li tato na vnější stranu hladinové plochy, jest dle 10)

$$13)\qquad \lambda = -\frac{F_1}{g} \qquad \mu = -\frac{F_2}{g} \qquad \nu = -\frac{F_3}{g}.$$

Dosaďme do vzorce

$$\cos NZ_2 = \cos NX \cos Z_2X + \cos NY \cos Z_2Y + \cos NZ \cos Z_2Z$$

na pravo $NX = \lambda \ldots$ dle 13) i hodnoty Z_2X, $Z_2Y = Z_2Y_2 = \pi/2 \ldots$ nahoře odvozené a na levo pišme $NZ_2 = \pi/2 - \psi$, neboť tento vztah platí přesně i když roviny poledníkové neprocházejí osou zemskou. Tak obdržíme

$$14)\qquad \sin\psi = \sin(\psi_0 + \Delta\psi) = \frac{F_3}{g}\sin\psi_0 - \frac{F_1}{g}\cos\psi_0.$$

Rozvedeme-li na levé straně, obdržíme odtud vzhledem k tomu, že až na veličiny řádu F_1^2/g jest $F_3 = g$,

$$15)\qquad \Delta\psi = -F_1/g.$$

Poledníková rovina bodu blízkého počátku jest určena normálou N a směrem osy Z_1. Kolmice Y_3 vztýčená na rovinu tohoto poledníka tvoří s osou Y úhel β', jehož

$$\cos\beta' = \frac{\cos Z_1Z \cos NX - \cos Z_1X \cos NZ}{\sin NZ_1} = \frac{F_1 \sin\psi_0 + F_3\cos\psi_0}{g\cos\psi}.$$

Odtud

$$\sin^2\beta' = 1 - \cos^2\beta' = \frac{g^2 - g^2\sin^2\psi - (F_1\sin\psi_0 + F_3\cos\psi_0)^2}{g^2\cos^2\psi}$$

a dosadíme-li sem hodnotu g sin ψ ze (14), jest

$$\sin^2 \beta' = \frac{g^2 - (F_1^2 + F_3^2)}{g^2 \cos^2 \psi} = \frac{F_2^2}{g^2 \cos^2 \psi}.$$

Týž úhel jako kolmice Y, Y_3 tvoří i roviny obou poledníků, jest tedy β' rovno změně zeměpisné délky $\varDelta\lambda$, takže

$$\varDelta\lambda = -\frac{F_2}{g \cos \psi}. \tag{16}$$

O správnosti záporného znaménka snadno se přesvědčíme. Je-li O na rovníku ($\psi = 0$) a postoupíme od něho ve směru vodorovném na východ, změní vertikála (klidně visící olovnice) svůj směr o úhel $\varDelta\lambda$, jehož sin $\varDelta\lambda$ rovná se poměru složky tíže ve směru západním (t. j. $-\partial U/\partial y$) k celému g.

V rovnicích pohybu 1) třeba bráti v počet složky přitažlivosti zemské, nikoliv tíži, jež jest výslednicí přitažlivosti a síly odstředivé. Pak také X_2, Y_2, Z_2, X, Y, Z jsou složky přitažlivosti zemské. Abychom obdrželi složky přitažlivosti zemské, třeba k tíži připojiti složky, jimiž se bude síla odstředivá rušiti. Síla tato jest dána výrazem $\omega^2 r$, je-li r vzdálenost od osy rotační. V soustavě X_2, Y_2, Z_2 má střed S kruhu, jejž opisuje bod A (x_2, y_2, z_2), na ose Z_1 souřadnice (0, $-\varrho$, z_2) a tudíž

$$r^2 = SA^2 = x_2^2 + (y_2 + \varrho)^2$$

a vzhledem k 7)

$$r^2 = R_0^2 \cos^2 \varphi_0 - 2 R_0 \cos \varphi_0 \ (x \sin \psi_0 + z \cos \psi_0) \\ + x^2 \sin^2 \psi_0 + z^2 \cos^2 \psi_0 + (y + \varrho)^2.$$

Odmocníme-li, bude

$$r = R_0 \cos \varphi_0 - x \sin \psi_0 - z \cos \psi_0, \tag{17}$$

při čemž jsou vypuštěny vedle $R_0 \cos \varphi_0$, t. j. vzdálenosti od osy, členy řádu

$$\frac{x}{R_0 \cos \varphi_0}.$$

Směr r tvoří s osami X_2, Y_2, Z_2 úhly, jichž cosinusy jsou

$$\cos x_2 r = \frac{x_2}{r} \qquad \cos y_2 r = \frac{y_2 + \varrho}{r} \qquad \cos z_2 r = 0.$$

V 7) bylo již použito hodnot cos $x x_2$ atd., i nalezneme pomocí rovnice

$$\cos rx = \cos xx_2 \cos rx_2 + \cos xy_2 \cos ry_2 + \cos xz_2 \cos rz_2$$

a obdobných pro cos yr, cos zr

$$18)\quad \cos xr = -\frac{x_2}{r}\sin\psi_0 \quad \cos yr = \frac{y_2+\varrho}{r} \quad \cos zr = -\frac{x_2}{r}\cos\psi_0 .$$

Složky urychlení síly odstředivé ve směru os X, Y, Z jsou pak

$$X_c = \omega^2 r \cos xr = -\omega^2 (R_0 \cos\varphi_0 - x\sin\psi_0 - z\cos\psi_0)\sin\psi_0$$
$$Z_c = \omega^2 r \cos zr = -\omega^2 (R_0 \cos\varphi_0 - x\sin\psi_0 - z\cos\psi_0)\cos\psi_0$$
$$Y_c = \omega^2 r \cos yr = \omega^2 (y+\varrho).$$

Připojíme-li tedy ke složkám tíže s opačným znamením složky odstředivé síly právě uvedené, budou složky urychlení přitažlivosti zemské

$$19)\quad \begin{aligned} X &= F_1 + \omega^2 (R_0 \cos\varphi_0 - x\sin\psi_0 - z\cos\psi_0)\sin\psi_0 \\ Y &= F_2 - \omega^2 (y+\varrho) \\ Z &= F_3 + \omega^2 (R_0 \cos\varphi_0 - x\sin\psi_0 - z\cos\psi_0)\sin\psi_0 \end{aligned}$$

jež třeba dosaditi do rovnic pohybu 9). V těchto však značila X, Y, Z složky síly, kdežto v 19) značí složky urychlení, proto třeba v 9) na pravo připojiti ještě činitele m, jímž pak lze rovnice ty krátiti. Na obou stranách odpadnou též členy*) obsahující ω^2 a máme tedy rovnice pohybu volného pádu

$$20)\quad \begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega\frac{dy}{dt}\sin\psi_0 = xU_{11} + yU_{12} + zU_{13} \\ &\frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega\frac{dx}{dt}\sin\psi_0 - 2\omega\frac{dz}{dt}\cos\psi_0 = xU_{12} + yU_{22} + zU_{23} \\ &\frac{d^2z}{dt^2} + 2\omega\frac{dy}{dt}\cos\psi_0 = g_0 + xU_{13} + yU_{23} + zU_{33}. \end{aligned}$$

Eliminujeme-li z nich x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, obdržíme pro z differenciální rovnici šestého řádu s konstantními koefficienty. Jest zřejmo, že pro eliminování čtyř uvedených veličin třeba míti 5 rovnic, takže třetí rovnici 20) bude třeba čtyřikrát differencovati, čímž dospějeme k derivaci $\frac{d^6z}{dt^6}$.

---

*) V pojednání „Pohyb kyvadla se zřetelem ke křivosti země a změnám urychlení“ (Věstník král. čes. společnosti nauk 1920. Tř. II.) ukázal jsem, že z rovnic kyvadla Foucaultova odpadají členy obsahující ω^2 zavedené Denizotem, béře-li se zřetel ke sbíhavosti vertikál. Odvození zde podané jest přesnější, nepředpokládajíc ani rotačního tvaru země. Denizot opomenul ve složkách X, Y, Z, 19) připojiti členy, jež rovněž ω^2 obsahují.

Hledaný integrál bude míti tvar

$$21)\qquad z = \sum_{n=0}^{6} C_n e^{a_n t}, \qquad \text{kdež } a_0 = 0.$$

Konstanty určíme později.

Dosadíme-li x plynoucí ze třetí rovnice 20) do rovnice druhé, nabude tato vzhledem ke známému z 21) tvaru

$$22)\qquad P_2 \frac{d^2y}{dt^2} + P_1 \frac{dy}{dt} + P_0 y = \sum_0^6 Q_n e^{a_n t}$$

a její částečný integrál jest $y = \sum_0^6 B_n e^{a_n t}$. Položíme-li na pravé straně 22) nulu, obdržíme jako funkci komplementární opět dva členy tvaru $B e^{a_n t}$, takže obecné řešení bude míti osm členů tohoto tvaru. Rovněž osm členů plyne pak ze třetí rovnice pro x, takže

$$23)\qquad x = \sum_0^8 A_n e^{a_n t} \qquad y = \sum_0^8 B_n e^{a_n t} \qquad z = \sum_0^6 C_n e^{a_n t}.$$

Dosadíme-li tyto výsledky do 20), bude

$$\Sigma A_n (a_n^2 - U_{11}) e^{a_n t} + \Sigma B_n (2\omega a_n \sin \psi_0 - U_{12}) e^{a_n t} - $$
$$- U_{13} \Sigma C_n e^{a_n t} = 0$$

$$24)\qquad \Sigma A_n (2\omega a_n \sin \psi_0 + U_{12}) e^{a_n t} + \Sigma B_n (U_{22} - a_n^2) e^{a_n t} +$$
$$+ \Sigma C_n (2\omega a_n \cos \psi_0 + U_{23}) e^{a_n t} = 0$$

$$\Sigma A_n U_{13} e^{a_n t} + \Sigma B_n (U_{32} - 2\omega a_n \cos \psi_0) e^{a_n t} +$$
$$+ \Sigma C_n (U_{33} - a_n^2) e^{a_n t} + g_0 = 0$$

při čemž součty A, B jdou od 0 do 8, součet C od 0 do 6. Rovnicím těmto musí býti vyhověno pro jakékoliv t_1, proto musí součinitelé jednotlivých funkcí e^{at} býti rovny 0. Pro $n = 1$ obdržíme

$$A_1 (a_1^2 - U_{11}) + B_1 (2\omega a_1 \sin \psi_0 - U_{12}) - C_1 U_{13} = 0$$

$$25)\qquad A_1 (U_{12} + 2\omega a_1 \sin \psi_0) + B_1 (U_{22} - a_1^2) +$$
$$+ C_1 (2\omega a_1 \cos \psi_0 + U_{23}) = 0$$

$$A_1 U_{31} + B_1 (U_{32} - 2\omega a_1 \cos \psi_0) + C_1 (U_{33} - a_1^2) = 0.$$

Pro $n=2, 3, \ldots 6$ obdržíme rovnice téhož tvaru, v nichž místo A_1, B_1, C_1, a_1 stojí A_2, B_2, C_2, a_2 atd. Nemají-li býti všechna A, B, C rovna nule, jest

$$\text{26)}\quad \begin{vmatrix} a_1^2 - U_{11} & 2\omega a_1 \sin\psi_0 - U_{12} & -U_{13} \\ U_{12}+2\omega a_1 \sin\psi_0 & U_{22} - a_1^2 & 2\omega a_1 \cos\psi_0 + U_{23} \\ U_{13} & U_{32} - 2\omega a_1 \cos\psi_0 & U_{33} - a_1^2 \end{vmatrix} = 0$$

Rovnice tato jest šestého stupně a ježto pro a_2, $a_3 \ldots a_6$ obdržíme rovnici touž, stanoví všech šest kořenů a. Pro $n=7$ třeba ve 25) položiti B_7, C_7, a_7 místo B_6, C_6, a_6, kromě toho $A_7=0$. I jest zřejmo, že musí býti $B_7=0$, $C_7=0$ a podobně $B_8=0$, $C_8=0$, takže také y, z obsahují jen šest funkcí e^{at} stanovených rovnicí 26. Rozvedeme-li tento determinant, obdržíme se zřetelem ke vztahu

$$\text{27)}\qquad U_{11}+U_{22}+U_{23}=2\omega^2$$

rovnici třetího stupně vzhledem k a^2

$$\text{28)}\quad \begin{aligned} &a^6+2\omega^2 a^4+a^2 (U_{11} U_{22}+U_{11} U_{33}+U_{22} U_{33}-U^2_{12}- \\ &-U^2_{13}-U^2_{23}-4\omega^2 U_{11} \cos^2\psi_0-4\omega^2 U_{33} \sin^2\psi_0+ \\ &+8\omega^2 U_{13} \sin\psi_0 \cos\psi_0)+U^2_{12} U_{33}+U^2_{13} U_{22}+ \\ &+U^2_{23} U_{11}-U_{11} U_{22} U_{33}-2U_{12} U_{13} U_{32}=0. \end{aligned}$$

V dalším budeme hleděti jen k pravidelnému průběhu tíže považujíce zemi za ellipsoid, na němž urychlení tíže jest dáno vzorcem Helmertovým. Pak jest $U_{12}=0$, $U_{23}=0$. S tímto zjednodušením plyne ze 25)

$$\text{29)}\quad \begin{aligned} \frac{B_1}{A_1}&=\frac{-2\omega a_1 [(a_1^2-U_{11}) \cos\psi_0+U_{31} \sin\psi_0]}{(U_{22}-a_1^2) U_{31}+4\omega^2 a_1^2 \sin\psi_0 \cos\psi_0}=f(a_1) \\ \frac{C_1}{A_1}&=\frac{(a_1^2-U_{11})(U_{22}-a_1^2)-4\omega^2 a_1^2 \sin^2\psi_0}{(U_{22}-a_1^2) U_{31}+4\omega^2 a^2 \sin\psi_0 \cos\psi_0}=F(a_1) \end{aligned}$$

Podobně určíme poměry B_2/A_2, $B_3/A_3 \ldots C_2/A_2 \ldots$, takže

$$\text{30)}\quad \begin{matrix} B_1=A_1\ f(a_1) & B_2=A_2\ f(a_2) & B_6=A_6\ f(a_6) \\ C_1=A_1\ F(a_1) & C_2=A_2\ F(a_2) & C_6=A_6\ F(a_6). \end{matrix}$$

Pro A_0, B_0, C_0 plyne ze 24) — jest totiž dle 21) $a_0=0$ —

$$A_0 U_{11}+C_0 U_{13}=0 \qquad B_0=0 \qquad A_0 U_{13}+C_0 U_{33}=-g_0,$$

z čehož

$$\text{31)}\quad A_0=\frac{g_0 U_{31}}{U_{11} U_{33}-U^2_{31}} \qquad C_0=-\frac{g_0 U_{11}}{U_{11} U_{33}-U^2_{31}} \qquad B_0=0.$$

Volíme-li počátek O v bodě, z něhož volný pád počíná, bude pro $t=0$ t. j. pro počátek pohybu $x=0$, $y=0$, $z=0$ a také všechny tři složky rychlosti

$$\frac{dx}{dt}=0, \quad \frac{dy}{dt}=0, \quad \frac{dz}{dt}=0.$$

Tak obdržíme z 21) a 23) šest rovnic

$$\begin{aligned}
A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 &= 0 \\
B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 &= 0 \\
C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 &= 0 \\
a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 + a_5 A_5 + a_6 A_6 &= 0 \\
a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 + a_5 B_5 + a_6 B_6 &= 0 \\
a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 + a_4 C_4 + a_5 B_6 + a_6 C_6 &= 0
\end{aligned} \tag{32}$$

jež obsahují šest neznámých $A_1 \ldots A_6$, nahradíme-li koefficienty B, C hodnotami 30).

Z 28) jest patrno, že

$$a_2 = -a_1 \qquad a_4 = -a_3 \qquad a_6 = -a_5$$

načež dle 29)

$$\begin{array}{lll}
f(a_2) = -f(a_1) & f(a_4) = -f(a_3) & f(a_6) = -f(a_5) \\
F(a_2) = F(a_1) & F(a_4) = F(a_3) & F(a_6) = F(a_5).
\end{array}$$

Druhá, čtvrtá a šestá rovnice 32) nabudou pak tvaru

$$\begin{aligned}
(A_1 - A_2)\, f(a_1) + (A_3 - A_4)\, f(a_3) + (A_5 - A_6)\, f(a_5) &= 0 \\
(A_1 - A_2)\, a_1 + (A_3 - A_4)\, a_3 + (A_5 - A_6)\, a_5 &= 0 \\
(A_1 - A_2)\, a_1 F(a_1) + (A_3 - A_4)\, a_3 F(a_3) + (A_5 - A_6)\, a_5 F(a_5) &= 0
\end{aligned}$$

z čehož

$$A_1 = A_2 \qquad A_3 = A_4 \qquad A_5 = A_6$$

a dle 30)

$$\begin{array}{lll}
B_2 = -B_1 & B_4 = -B_3 & B_6 = -B_5 \\
C_2 = C_1 & C_4 = C_3 & C_6 = C_5.
\end{array} \tag{33}$$

Z ostatních tří rovnic 32)

$$\begin{aligned}
2A_1 + 2A_3 + 2A_5 &= -A_0 \\
2A_1 F(a_1) + 2A_3 F(a_3) + 2A_5 F(a_5) &= -C_0 \\
2A_1 a_1 f(a_1) + 2A_3 a_3 f(a_3) + 2A_5 a_5 f(a_5) &= 0
\end{aligned} \tag{34}$$

nalezneme vzhledem k významu f, F koefficienty A_1, A_2, A_3

$$35)\quad \begin{aligned} A_1 J &= g_0\, a_3^2\, a_5^2\, (a_3^2 - a_5^2)\, J_1 \\ A_5 J &= g_0\, a_1^2\, a_3^2\, (a_1^2 - a_3^2)\, J_5, \\ A_3 J &= g_0\, a_1^2\, a_5^2\, (a_5^2 - a_1^2)\, J_3 \\ J &= 2 U_{22} (U_{11} U_{33} - U_{31}^2)(a_1^2 - a_3^2)(a_3^2 - a_5^2)(a_5^2 - a_1^2) \end{aligned}$$

kdež značí J_1, J_5, J_3 jmenovatele funkce $f(a_1)$, $f(a_5)$, $f(a_3)$.

Bude tedy

$$36)\quad x = A_0 + A_1\,(e^{a_1 t} + e^{-a_1 t}) + A_3\,(e^{a_3 t} + e^{-a_3 t}) + \\ + A_5\,(e^{a_5 t} + e^{-a_5 t}).$$

Rozvineme-li exponenciální funkci v řadu

$$e^{\pm at} = 1 \pm at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 \pm \frac{1}{3!} a^3 t^3 + \frac{1}{4!} a^4 t^4 \ldots.$$

a uspořádáme dle mocnin t, bude se zřetelem ke 34)

$$37)\quad x = \frac{t^2}{2!}\,(2 A_1 a_1^2 + 2 A_3 a_3^2 + 2 A_5 a_5^2) + \\ + \frac{t^4}{4!}(2 A_1 a_1^4 + 2 A_3 a_3^4 + 2 A_5 a_5^4) \ldots.$$

Koefficient při t^2 jest roven 0, jak nalezneme pomocí 35),

$$\begin{aligned} 2 A_1 a_1^4 + 2 A_3 a_3^4 + 2 A_5 a_5^4 &= - g_0\,(4\omega^2 \sin\psi \cos\psi - U_{31}) \\ 2 A_1 a_1^6 + 2 A_3 a_3^6 + 2 A_5 a_5^6 &= - g_0\,\{U_{22} U_{31} \\ &\quad - 2\,(4\omega^2 \sin\psi \cos\psi - U_{31})\,\omega^2\}; \end{aligned}$$

při odvození třeba hleděti k tomu, že dle 28)

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = -2\omega^2 \qquad a_1^2 a_2^2 a_3^2 = U_{22}(U_{11} U_{33} - U_{31}^2).$$

Jest tedy

$$38)\quad x = -\frac{1}{4!} g_0\, t^4\, (4\omega^2 \sin\psi_0 \cos\psi_0 - U_{31}) - \\ - \frac{1}{6!} g_0\, t^6\, \{U_{22} U_{31} - 2\omega^2 (4\omega^2 \sin\psi_0 \cos\psi_0 - U_{31})\}.$$

Podobně nalezneme rozvinutím

$$39)\quad y = B_1\,(e^{a_1 t} - e^{-a_1 t}) + B_3\,(e^{a_3 t} - e^{-a_3 t}) + B_5\,(e^{a_5 t} - e^{-a_5 t})$$

řadu postupující dle mocnin t

$$y = 2t\,(B_1 a_1 + B_5 a_5 + B_3 a_3) + 2\,\frac{t^3}{3!}(B_1 a_1^3 + B_3 a_3^3 + B_5 a_5^3) + \ldots$$

a použijeme-li za B hodnot 30), 29), bude

40)
$$y = \frac{1}{3}\omega g_0 t^3 \cos\psi + \frac{2 g_0 \omega t^5}{5!}(U_{31}\sin\psi - U_{11}\cos\psi - 2\omega^2\cos\psi).$$

Pro z nalezneme posléze

$$2\,(C_1 a_1^2 + C_3 a_3^2 + C_5 a_5^2) = g_0$$
$$2\,(C_1 a_1^4 + C_3 a_3^4 + C_5 a_5^4) = g_0\,(-2\omega^2 - [U_{11} + U_{22} - 4\omega^2 \sin^2\psi])$$
$$= g_0\,(U_{33} - 4\omega^2 \cos^2\psi_0)$$

41) $$z = C_0 + C_1\,(e^{a_1 t} + e^{-a_1 t}) + C_3\,(e^{a_3 t} + e^{-a_3 t}) + C_5\,(e^{a_5 t} + e^{-a_5 t})$$

42) $$= \frac{1}{2} g_0 t^2 + \frac{1}{4!} g_0 t^4\,(U_{33} - 4\omega^2 \cos^2\psi_0).$$

Rovnice 36, 39, 41 vyjadřují x, y, z úplně, vyžadují však řešení rovnice 28), jež při obecných koefficientech vede k výrazům složitým a nepřehledným. Kořeny a_2, a_4, a_5, a_6 jsou imaginární, takže $e^{ia_3 t} + e^{-ia_3 t} = 2\cos a_3 t$, též poslední člen x má tvar $2 A_5 \cos a_5 t$. Rozvedením v řady 38), 40), 42) jeví sa zřetelně vliv jednotlivých derivací U, aniž bylo třeba rovnici 28) řešiti. Omezili jsme se na prvé dva členy každé řady, avšak i koefficienty dalších členů lze podobně jednoduše vyjádřiti. Jsou nepatrné.

Pokud se týče číselných hodnot, uvádí Eötvös*) pro ellipsoid Besselových rozměrů, na němž by tíže byla dána formulí Helmertovou, v zeměpisné šířce 50^0

43)
$$U_{11} = -1539{\cdot}57.10^{-9} \qquad U_{31} = 8{\cdot}0259.10^{-9}$$
$$U_{22} = -1535{\cdot}30.10^{-9} \qquad U_{33} = 3085{\cdot}43.10^{-9}$$
$$\omega^2 = 5{\cdot}3176.10^{-9}$$

absol. jednotek.

Prvý člen výrazu x 38) liší se od hodnoty odvozené Gaussem**) tím, že obsahuje U_{31}. Číselně jest vzhledem k hodnotám právě uvedeným dle Gausse $x = -{}^1/_{24}\,gt^4\,10{\cdot}473.10^{-9}\,cm$ kdežto dle 38) pouze $-{}^1/_{24}\,gt^4\,2{\cdot}447.10^{-9}$, to jest pouze čtvrtina hodnoty Gaussovy.***) Člen druhý závisí téměř jen na U_{22}, U_{31},

*) Eötvös, Verh. der Internationalen Erdmessung 1906, I. 352.

**) Werke, Bd. 5. str. 495.

***) Nesprávné je odvození Denizotovo, Das Foucaultsche Pendel und die Theorie der relativen Bewegung, str. 45, neboť v jeho rovnicích pohybu (str. 39) odpadnou členy s ω^2, dosadí-li se za X, Y, Z správné hodnoty (horní rovnice 19).

hodnota tohoto součinu činí $12{\cdot}356.10^{-15}$, kdežto druhý člen koefficientu obsahující ω činí 25.10^{-18}. Prvý člen výrazu y 40) opět souhlasí s Gaussovým. Při z 42) činí korrekční člen

$$\frac{1}{4} g_0 t^4 (U_{33} - 4\omega^2 \cos^2 \psi_0),$$

u Gausse, jenž nehledí ke změnám urychlení, U_{33} opět chybí, takže znamení členu toho je opačné. Jest totiž

$$U_{33} = 3085{\cdot}43.10^{-9}, \quad 4\omega^2 \cos^2 \psi_0 = 8{\cdot}79.10^{-9}.$$

Při tom značí g_0 urychlení tíže v počátku, z něhož volný pád počíná, g ve směru svislém roste a dráhy přibývá rychleji než se čtvercem času.

*

Les équations de la chute.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur établit les équations de la chute libre en tenant compte de la rotation de la terre, des variations de l'accélération et de la direction de la gravité le long du parcours du point matériel tombant, c. à d., en tenant compte des dérivées secondes de la gravité. On n'a rien supposé sur la figure de la terre, pas même que la figure soit de révolution. Les termes contenant le carré de la vitesse angulaire ω de la terre disparaissent complètement de l'équation du mouvement, 20. Les coordonées du point tombant peuvent être exprimées par six fonctions de la forme e^{at}, ou a est déterminé par l'équation 26, $U_{11}, U_{12}, \ldots$ signifiant les valeurs que prennent les dérivées secondes du potentiel de la gravité U au commencement de la chute. L'axe des x coïncide avec la tangente du méridien dirigée vers le nord; Z est vertical, Y est dirigé vers l'est. La solution complète est fournie par 36, 39, 41, où les coefficients A, B, C sont déterminés par 31, 35, 30. J_1, J_5, J_3 sont les dénominateurs des fonctions $f(a_1)$, $f(a_5)$, $f(a_3)$, 29. Si l'on développe e^{at} en séries de puissances de t, les résultats deviennent très simples, 38, 40, 42. L'influence de la vitesse angulaire ω et des dérivées de U est évidente. Les valeurs numériques montrent que la déviation vers le sud n'équivaut, dans des latitudes moyennes, qu'à un quart de la valeur de Gauss; les premiers termes des séries 38, 40, 42 diffèrent de ces résultats par suite du fait qu'ils contiennent $U_{31}, U_{33}, \ldots$