Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

B. Šalamon

Grafické methody v kartografii. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 212--217

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109346

la fig. 1, tandis que l'autre se trouve dans la position que montre la fig. 3. L'un est placé en face de la partie orientale, l'autre en face de la partie occidentale de l'objectif. Si les deux miroirs ont le même azimut, l'erreur ε dans la perpendicularité des miroirs se manifeste par l'image doublée de l'étoile en sens vertical. On peut mesurer la distance des deux images $4\,\varepsilon$ au moyen du micromètre et, par cela même, constater l'erreur provenant de la focusation imparfaite de la lunette auxiliaire. Les rayons de l'étoile septentrionale (S_s) passent ensuite par l'espace laissé entre les deux miroirs.

Grafické metody v kartografii.

Napsal *Bedřich Šalamon.*

II.

V stejnojmenném článku, který jsem uveřejnil v lonském ročníku (1922) tohoto časopisu na str. 156. a násl., jest popsána grafická metoda matematická, které se dá užíti k řešení některých úloh z kartografické praxe. Jako příklad byla tam uvedena aplikace této metody při transformaci mapy nějaké v jinou. Budeme se nyní zabývati ještě několika dalšími otázkami kartografickými, u nichž se dá rovněž onoho způsobu s výhodou upotřebiti. Půjde při tom zejména o to, aby bylo rozhodnuto o nějaké hotové již mapě, zdali jest úhlojevná (konformní), či plochojevná, po případě kterého druhu jest zobrazovací metoda v ní užitá, nebo dokonce o určité definování této metody. Současně bude třeba dotknouti se otázek, jak zhustiti síť takové mapy, jak určiti její měřítko a jak poznati, byla-li její síť geografická sítí konstrukční.

Předpokládejme zatím, že jest měřítko mapy známé a to $1:n$. Globus, jejž přiřazujeme k mapě, má tudíž poloměr $r=\frac{R}{n}$, při tom R značí poloměr redukční koule geodetické. Ten se při velkých n klade rovným 6370 *km*, kdežto při menších n volí se rovný geometrickému průměru z obou hlavních poloměrů zakřivení pro bod opovídající na redukčním elipsoidu, na př.: Besselovu středu zobrazovaného území. Představme si na globu ony poledníky a rovnoběžky, které jsou zobrazeny v dané mapě. Rozviňme je všechny i s jednotlivými díly, které na nich vytínají ostatní čáry sítě, do přímek jakkoli navzájem položených. Poledníky stačí rozvinouti společně v jedinou přímku. Měřme při tom všechny oblouky poledníkové od téže rovnoběžky a stejně všechny oblouky na každé rovnoběžce od téhož poledníku. Přiřaďme potom k těmto rozvinutým obloukům jakožto úsečkám příslušné k nim oblouky na obrazech poledníků a rovnoběžek v mapě a to jako pravoúhlé pořadnice. Získáme tak body pro pomocné křivky (grafy), které znázorňují vztahy mezi oběma hodnotami oblouků — v mapě a na globu — čímž také zachytíme graficky zobrazovací metodu užitou při studované mapě. Grafy odvozené z poledníkových oblouků mají při tom společnou osu úseček a jejich body ležící vždy na téže kolmici k této ose odpovídají bodům jedné rovnoběžky. Grafy vyjadřující vztahy mezi rovnoběžkovými oblouky musí býti sestrojovány odděleně. Měniti je s pomocí podobnosti za tím účelem, aby se docílilo i pro ně jednotné základny, se nedoporučuje. Číslují-li se u jednotlivých grafů rovnoběžkových úsečky hodnotami rovnými zeměp. délkám, náležejí body jejich se stejně očíslovanou úsečkou vždy jednomu poledníku.

Zvláštní případy u grafů poledníkových jsou ty, kdy buď všechny splynou v jedinou křivku, anebo kdy některý, po případě všechny nabudou přímkového tvaru. První případ nastává, jsou-li poledníkové obrazy v mapě navzájem shodné. Druhý se vyskytne tehdy, jestliže jsou měrná čísla zkreslení délkových prvků poledníkových ve všech bodech téhož poledníku, po případě ve všech bodech všech poledníků stejná. Měrným číslem zkreslení rozumíme při tom podíl z délkového elementu v mapě a z jeho skutečné délky na globu. Jsou totiž tato měrná čísla rovna směrnicím tečen ke grafům. Měrné číslo zkreslení platí, je-li konstantní, i pro konečně dlouhé oblouky. Ze zvláštních případů u grafů rovnoběžkových jest zajímavý ten, při kterém nabývají přímkového tvaru. Příčina k tomu jest stejná jako u poledníků a rovněž i důsledek pro poměry konečně dlouhých oblouků. Vlastnost takovou mají všechny grafy rovnoběžkové, jestliže poledníkové grafy splynuly v jedinou čáru, a naopak. Shodnost poledníkových obrazů v mapě vyvolává tudíž vždy délkově rovnoměrné rozdělení na jednotlivých obrazech rovnoběžkových a naopak. V takovém případě dále každý obraz rovnoběžkový protíná všechny obrazy poledníkové pod stejným úhlem. Tento úhel se však může měniti od rovnoběžky k rovnoběžce.

Měrná čísla zkreslení délkových prvků ve směru poledníků a ve směru rovnoběžek rovnají se měrným číslům délek párů sdružených průměrů Tissotových indikatricí v příslušných bodech mapy. Tyto indikatriční elipsy jsou charakteristikami zobrazovací metody, jaké bylo užito při konstrukci mapy, poněvadž vznikly ze srovnání mapy s globem.

Než se budeme zabývati dále těmito charakteristikami, všimněme si toho, že křivkové tahy grafů mohou sloužiti nejen k určování směrnice tečen v bodech jejich, které odpovídají k vrcholům geografické sítě v mapě, nýbrž také ke vkládání obrazů nových poledníků a rovnoběžek do této sítě, jakož i k určování deformačních charakteristik v jejich bodech. Interpolace nových poledníků záleží v tom, že se nanášejí pořadnice poledníkových grafů, které leží v téže nové kolmici k ose úseček, jako oblouky na poledníky v mapě a to od rovnoběžky, jež byla již při konstrukci grafů zvolena za počáteční. Takto se získávají body pro nový poledník v mapě. Obdobně by se vkládala do mapy nová rovnoběžka. Konstrukce tečen k těmto novým čarám mohla by se díti metodou, jaká jest popsána na konci svrchu citovaného článku.

Tissotovy indikatrice jsou charakteristické pro zobrazovací metodu nejen délkami, nýbrž i polohou svých os. Jest proto třeba tyto osy vkresliti do mapy. Bude tudíž výhodné, provede-li se také odvozování jejich délek graficky. Vhodným prostředkem k tomu jsou první derivační čáry grafů, jejichž pořadnice vyjadřují graficky směrnice tečen grafů. Sestrojí-li se tyto křivky u všech grafů při stejné délce zvolené za délkovou jednotku, rovnají se jejich pořadnice délkám průměrů, nebo ve zvláštních případech délkám os hledaných indikatričních elips. Tento druhý případ nastane, jestliže jest geografická síť v mapě pravoúhlá. Potom leží osy indikatric v tečnách k čarám této sítě. Není-li však síť mapy pravoúhlá, leží v těchto tečnách pouze páry sdružených průměrů, jejichž délky jsou dány pořadnicemi derivačních křivek, a z nichž teprve třeba odvoditi osy.

Je-li síť mapy pravoúhlá, lze přímo z některých znaků (na př. obrazy poledníkové tvoří plný svazek přímkový, nebo osnovu přímek, nebo obrazy rovnoběžkové jsou soustředné kružnice, atd.), nebo podle kombinace několika takových znaků zařaditi metodu mapy do určité skupiny, ba možno někdy podle toho i metodu samu definovati. Tento postup se nedá ovšem vtěsnati do obecných pravidel. K úplnému jeho popisu by bylo třeba citovati soustavně vlastnosti všech zobrazovacích metod kartografických.

Rozhodování takové jest složitější v případech, kdy není geografická síť mapy pravoúhlá. Tehdy třeba rozeznávati dva případy. Dělidlem mezi nimi jest pomůcka vnesená teprve do novějších kartografických konstrukcí, t. zv. konstrukční síť. Bývá totiž při některých tvarech a polohách územních výhodné aplikovati zvolenou zobrazovací metodu nikoli na síť geografickou, nýbrž na síť poledníků a rovnoběžek pomocných, jejíž póly jsou položeny ve dvou obecných protilehlých bodech globu. Obraz této sítě v mapě nazýváme sítí konstrukční. Ta vyznačuje se nejjednoduššími charakteristickými vlastnostmi zvolené metody, kdežto obraz sítě geografické jest v takové mapě výsledkem teprve druhořadým a není proto jednoduše výrazný. Poněvadž konstrukční sítě bývají nejčastěji pravoúhlé a jsou obrazem rovněž pravoúhlé pomocné sítě na globu, prokáže se její existence z uspořádání os Tissotových indikatricí. Neukazují-li osy indikatriční na existenci pravoúhlé sítě konstrukční, jest buď síť geografická sama totožná s konstrukční sítí neortogonální, anebo může míti tato síť polohu obecnou.

V obou případech hodí se k dalšímu rozboru ekvideformáty. Jsou to křivky v mapě, v jejichž bodech má některý výraz charakterisující celkově elementární deformace v jeho okolí, na př. podíly $\frac{a}{b}, \frac{a-b}{a+b}$, atd., kdež značí a, b poloosy indikatrice, konstantní hodnoty.

Ekvideformáty charakterisují svým tvarem i polohou jednotlivé zobrazovací metody. Konstrukce jejich ve známé síti podle analytické rovnice bývá zvláště u nepravoúhlých sítí velice obtížná. Za to lze k nim dospěti grafickou cestou lehčeji, třebaže těžkopádně, ať jest metoda sítě známa, nebo neznáma. Sestrojí-li se totiž graficky z poloos jednotlivých indikatric hodnoty, kterých nabývá ve vrcholech geografické sítě mapy výraz položený ekvideformátám za základ, a přiřadí-li se tyto hodnoty opět jako pořadnice k rozvinutým poledníkům a rovnoběžkám globu, dostaneme body nových grafů. Jednoduchou interpolací v těchto čarách lze potom vyhledávati body na polednících a rovnoběžkách globu, v nichž mají výrazy pro ekvideformáty touž určitou hodnotu. Přenesou-li se tyto body s pomocí pořadnic poledníkových, nebo rovnoběžkových grafů do sítě mapy, dostanou se tam body hledaných ekvideformát. Podle vzájemného rozložení těchto křivek a podle číselných hodnot výrazu k nim příslušného dá se souditi na to, zdali v okolí jediného bodu v mapě, či podél nějaké křivky její nastává věrné zobrazení, anebo zda-li žádného z těchto případů v mapě není.

Rozhodnutí o tom, je-li mapa úhlojevná, nebo plochojevná, dá se provésti graficky takto. Při konformní mapě jsou v každém jejím bodě osy indikatrice navzájem stejné. Poněvadž v konformní mapě jest dále geografická síť vždycky pravoúhlá, dávají nám derivační křivky poledníkových a rovnoběžkových grafů přímo poloosy. Protože však každá grafická práce jest nadána chybami, zjistíme měřením nalezených poloos i při úhlojevné mapě spíše jejich nerovnost než rovnost. Aby hodnota chyb lépe vynikla a mohla býti po případě analysována, doporučuje se užíti opět grafického postupu. Hlavní poloosy jsou úsečkami a vedlejší pořadnicemi nového grafu. Při přesné práci má míti tento graf tvar přímky o směrnici 1. V praxi budou k této přímce jakožto k přímce vyrovnávací řaditi se body získané z poloos indikatričních jako souřadnic.

Zkouška plochojevnosti nějaké mapy zakládá se na té její vlastnosti, že součin poloos indikatričních ve všech bodech má býti roven čtverci nad délkovou jednotkou. Abychom dbali při zkoušce zase vlivu nezbytných chyb, užijeme podobného postupu jako prve. Body, jejichž souřadnice se rovnají indikatričním poloosám, kupí se potom podél hyperboly $x \cdot y = 1$ jako podle své čáry vyrovnávací.

Vyšetřování tohoto druhu budou zvláště výrazná pro body s okraje mapy a to tím výraznější, čím větší území jest zobrazeno. Pro území blízké k jeho středu, nebo ke střední čáře, v nichž nenastává (v praktických případech jest to skorem vždy) žádné zkreslení, jsou měrná čísla poloos indikatric blízká k *1* a tudíž body, které se z nich jako ze souřadnic vyhledávají, rozloží se blízko bodu (*1*, *1*). Při tom bývá těžko rozhodnouti, kupí-li se spíše k přímce $x = y$, anebo k hyperbole $x \cdot y = 1$. Jsou to ony případy kartografické — podmíněné rozlehlostí území i velikostí měřítka mapy — kdy jest lhostejné, jakou zobrazovací metodou jest mapa provedena.

Někdy vyžaduje metoda přiřazení dané mapy k rozvinutým křivkám globu kontroly. V takovém případě doporučuje se přiřaditi mapu k některé jednoduché úhlojevné, nebo plochojevné síti. Hodí se k tomu zvláště sítě válcové, tedy Mercatorova a Lambertova. Při nich obou mají nejen grafy poledníkové, nýbrž i rovnoběžkové společnou soustavu souřadnicových úseček. Jinak musí býti dále opakována práce s konstrukcí derivačních čar a os Tissotových indikatricí jako u případu popsaného. Úhlojevnost dané mapy projeví se shodným způsobem jako dříve, navazujeme-li mapu na síť Mercatorovu. Obdobné platí o mapě plochojevné a síti Lambertově.

Předpokládali jsme dosud, že známe měřítko vyšetřované mapy. Není-li tomu tak, nepostačí mapa bez dalších nějakých údajů k tomu, aby bylo její měřítko nalezeno. Nejjednodušeji se měřítko její vyhledává, víme-li o některém oblouku globu, že jest zobrazen v mapě délkově věrně. Jinak pátráme po tom, zda-li v některém bodě, nebo podél některé čáry nenastává v mapě zobrazení věrné. Přiřadíme mapu ke globu v libovolném poloměru a provedeme takto celé, v předcházejícím popsané vyšetřování. Po té změníme pořadnice bodů příslušných na poledníkových, nebo rovnoběžkových grafech tak, aby směrnice tečen v nich staly se rovné *1*. Z poměru pořadnic původních a nových těchto bodů a ze zvoleného poloměru globu dá se úměrností vypočítati poloměr globu, který patří k mapě podle jejího měřítka. Z tohoto konečně určí se měřítko samo.

*

Les méthodes graphiques dans la cartographie.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur s'occupe, en se servant de la théorie expliquée dans ce Journal (t. LII., 1922, p. 156), des problèmes cartographiques suivants: étant donnée une carte géographique, trouver la méthode de projection dont on s'est servi, ou en déterminer, au moins, la classe. Les autres problèmes ont pour l'objet la résolution de la question sur l'orthomorphie ou sur l'authalité d'une carte donnée, puis l'interpolation dans un canevas cartographique donné et enfin la détermination de l'échelle de la carte, si celle-ci n'est pas connue.

Rovnice volného pádu.

Napsal Dr. *V. Špaček.*

Rovnice pohybu hmotného bodu m v pevných osách souřadnicových X_1, Y_1, Z_1

$$1) \qquad m\frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1 \qquad m\frac{d^2 y_1}{dt^2} = Y_1 \qquad m\frac{d^2 z_1}{dt^2} = Z_1$$

transformujme do soustavy souřadnicové spojené s povrchem otáčející se země. Abstrahujíce od postupného pohybu země, volme za počátek O_1 střed zemský, Z_1 v ose zemské směrem k severnímu polu. Poledníková rovina pozorovacího místa O stanovena je svislicí a přímkou vedenou bodem O rovnoběžně k ose zemské. Obsahuje zenit i pól nebeský P, neobsahuje však obecně rotační osu zemskou. Jest s ní ovšem rovnoběžna obsahujíc přímku OP rovnoběžnou se Z_1. Středem země O_1 veďme kolmici k rovině poledníkové směrem k východu a její polohu v okamžiku, od něhož začínáme čas t počítati, volme za nepohyblivou osu Y_1. Osa X_1 jde počátkem O_1 kolmo k rovině $Y_1 Z_1$ na tu stranu, kde leží O. V době $t = 0$ jest X_1 rovnoběžna s rovinou poledníku bodu O.

Bodem O_1 veďme k rovině poledníka druhou kolmici Y_2, jež jsouc pevně spojena se zemí otáčí se touž úhlovou rychlostí ω jako země. Průsečnice roviny poledníkové a rovníka budiž osou X_2, osa Z_2 jde rovnoběžně se Z_1. Počátek O_2 této soustavy otáčí se rovnoměrně kol O_1 v rovině rovníka rychlostí ω. Je-li $O_1 O_2 = \varrho$ a leží-li osa zemská západně od roviny poledníkové, jsou souřadnice bodu O_2 v době t

$$2) \qquad \xi = -\varrho \sin \omega t \qquad \eta = \varrho \cos \omega t \qquad \zeta = 0.$$

Současně otočí se též osy X_2, Y_2 o úhel ωt, tak že z všeobecných rovnic vyjadřujících závislost souřadnic téhož bodu v obou soustavách

$$3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \xi + x_2 \cos X_2 X_1 + y_2 \cos Y_2 X_1 + z_2 \cos Z_2 X_1 \\ y_1 &= \eta + x_2 \cos X_2 Y_1 + y_2 \cos Y_2 Y_1 + z_2 \cos Z_2 Y_1 \\ z_1 &= \zeta + x_2 \cos X_2 Z_1 + y_2 \cos Y_2 Z_1 + z_2 \cos Z_2 Z_1 \end{aligned}$$

obdržíme

$$4) \qquad \begin{aligned} x_1 &= -\varrho \sin \omega t + x_2 \cos \omega t - y_2 \sin \omega t \\ y_1 &= \varrho \cos \omega t + x_2 \sin \omega t + y_2 \cos \omega t \\ z_1 &= z_2. \end{aligned}$$