Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch
Z geometrie kuželoseček. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 3, 151–159

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109328

vedlé toho buď samostatně

$$I_{34} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{vmatrix} = -(i_1 - 2i_2 + i_3)$$

anebo s připojením se k předcházejícímu determinantu, což vede k témuž výsledku; konečně dle schematu

$$I_{I.4} = 62\ (i_1 - 2i_2 + i_3);$$

takže sestavíme-li tyto výsledky dohromady, zjednáme si přímo pro hledaný součin uvedených čtyř ideálí výraz normální

$$\begin{aligned} I_1\, I_2\, I_3\, I_4 &= -20 \,.\, -62 - 6 + (20 + 62)\,(i_1 - 2i_2 + i_3) \\ &= 1234 + 82i_1 - 164i_2 + 82i_3. \end{aligned}$$

(Dokončení).

Z geometrie kuželoseček.*)

Píše

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

Budeme se zabývati čarami, jichž rovnice v pravoúhlé soustavě souřadnic znějí

$$K(x,\ y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Jedná se především o to, zdali rovnice taková definuje realnou křivku. K otázce té odpovídají známé algebraické transformace výrazu K v součet čtverců; my však sledujíce pouze vlastnosti projektivní, omezíme se na to, že budeme předpokládati, že rovnici vyhovuje soustava realných hodnot $x = \xi$, $y = \eta$. Bodem (ξ, η) vedeme libovolnou přímku P, jejíž body mají pak souřadnice tvaru

$$x = \xi + a\lambda,\ \ y = \eta + b\lambda,$$

kde a, b stanoví polohu přímky a λ jest parametr obecného

---

*) Přednášky konané na čes. vys. škole technické.

bodu na přímce. Pro parametry průseků přímky s čarou $K = 0$ máme rovnici

$$K(\xi + a\lambda, \eta + b\lambda) \equiv A + B\lambda + C\lambda^2 = 0.$$

Ježto bod (ξ, η) leží na čáře $K = 0$, máme

$$K(\xi, \eta) = A = 0,$$

a rovnice naše zní

$$(\alpha) \qquad \lambda(B + C\lambda) = 0.$$

Výraz C má hodnotu

$$C = a_{11}a^2 + 2a_{12}ab + a_{22}b^2$$

a je tedy od nully různý, nemá-li přímka P polohu zvláštní. Rovnice (α) podává pro parametry průseků dvě hodnoty $\lambda = 0$ a $\lambda' = -\frac{B}{C}$; prvý přísluší bodu (ξ, η), druhý parametr definuje bod na přímce P, jenž je vždy realný, ježto veličiny B a C jsou realné pro realné přímky P.

Bod λ' bude od bodu $\lambda = 0$ různý, je-li $B \gtrless 0$. Avšak případ $B = 0$ při libovolných a, b nastane jen tehdy, rozpadá-li se čára K ve dvě přímky, jež se protínají v bodě (ξ, η). Neboť z identity

$$K(\xi + a\lambda, \eta + b\lambda) \equiv C\lambda^2 \equiv a_{11}a^2\lambda^2 + 2a_{12}ab\lambda^2 + a_{22}b^2\lambda^2$$

plyne po dosazení hodnot $a\lambda = x - \xi$, $b\lambda = y - \eta$

$$K(x, y) \equiv a_{11}(x - \xi)^2 + 2a_{12}(x - \xi)(y - \eta) + a_{22}(y - \eta)^2$$

z čehož plyne, že K je součinem dvou veličin tvaru

$$A(x - \xi) + B(y - \eta)$$

a rovnice $K = 0$ značí dvě přímky, realné neb pomyslné, vedené bodem (ξ, η).

Vyjímaje tento zvrhlý případ bude obecně B od nully různo, a přímka P protíná čáru K mimo (ξ, η) ještě v pohyblivém a vždy realném bodě (ξ', η'), čímž dokázána věta následující.

Čára K jest realnou, má-li jeden realný bod a není-li zvrhlou (složenou ze dvou přímek).

Tyto čáry o rovnicích tvaru $K = 0$ nazveme druhého stupně neb kuželosečkami. K těm počítáme též (jako zvrhlou čáru) soustavu dvou přímek $PP' = 0$ a též přímku dvojnásobnou $P^2 = 0$.

2. Za příčinou zjednodušení výpočtů přidružíme k výrazu

$$K(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

ještě výraz

$$K[\xi, \eta, \zeta] = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{12}\xi\eta + 2a_{13}\xi\zeta + 2a_{23}\eta\zeta,$$

takže

$$K[\xi, \eta, \zeta] \equiv \zeta^2 K\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}\right).$$

Mějme nyní dva body M_0, M_1 o souřadnicích (x_0, y_0), (x_1, y_1); libovolný bod M přímky $M_0\ M_1$ pak má souřadnice

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda},$$

kde λ značí t. zv. dělící poměr bodu M vůči základní dvojině M_0M_1, t. j. $\lambda = \frac{M_0M}{M_1M} = (M_0M_1M)$, při čemž λ béře se kladně pro body ležící uvnitř úseku M_0M_1, a záporně pro body ležící zevně.

Hledejme nyní průseky přímky M_0M_1 s čarou $K = 0$. Jejich dělící poloměry λ musí vyhovovati rovnici

$$K\left(\frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}\right) = 0$$

či násobíme-li $(1+\lambda)^2$, rovnici

$$K[x_0 + \lambda x_1, y_0 + \lambda y_1, 1 + \lambda] = 0.$$

Rozvinutím dle mocností λ obdržíme rovnici

$$(\alpha) \qquad A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0,$$

kde

$$C = K[x_0, y_0, 1] = K(x_0, y_0),$$
$$A = K[x_1, y_1, 1] = K(x_1, y_1).$$

Rovnice (α) má dva kořeny λ', λ'', o nichž platí

$$\lambda'\lambda'' = \frac{C}{A} = \frac{K(x_0, y_0)}{K(x_1, y_1)}.$$

Přímka M_0M_1 protíná tedy kuželosečku $K(x, y) = 0$ ve dvou bodech $M'M''$, pro jichž dělící poměry platí vztah

$$\frac{M_0M'}{M_1M'} \cdot \frac{M_0M''}{M_1M''} = \frac{K(x_0, y_0)}{K(x_1, y_1)}. \tag{1}$$

Mějme nyní trojúhelník 012, jehož strany protínají kuželosečku $K = 0$ ve třech párech bodů a sice

strana $\overline{01}$ v bodech c_1 c_2,
„ $\overline{12}$ „ a_1 a_2,
„ $\overline{20}$ „ b_1 b_2;

znamenáme-li K_0, K_1, K_2 hodnoty výrazu K, jež tento obdrží v bodech 0, 1, 2; dále značí-li $\gamma_1 = (01c_1)$, $\alpha_1 = (1\,2\,a_1)$, $\beta_1 = (20b_1)$ dělící poměry průsečíků c_1, a_1, b_1 vůči základním dvojinám bodů 01, 12, 20, a podobně γ_2, α_2, β_2, máme dle (1) vztahy

$$\gamma_1\gamma_2 = \frac{K_0}{K_1}, \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{K_1}{K_2}, \quad \beta_1\beta_2 = \frac{K_2}{K_0},$$

a odtud

$$\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 = 1. \tag{2}$$

Tím dokázána důležitá věta Carnotova:

Součin dělících poměrů, jež stanoví průsečíky libovolné kuželosečky se stranami trojúhelníka, a jež jsou vzaty vůči vrcholům tohoto v určitém pořádku cyklickém, rovná se 1.

Stejným způsobem bychom ukázali (věta Menelaova), že přímka protíná strany trojúhelníka v bodech majících za součin dělících poměrů -1.

3. Chceme nyní ukázati, že k stanovení kuželosečky je potřebí i stačí pět bodů.

Je možno žádati, aby kuželosečka $K = 0$ procházela pěti danými body o souřadnicích (x_1, y_1); (x_2, y_2); ... (x_5, y_5). Tím se obdrží pro šest homogenních neznámých koefficientů a_{11}, a_{12}, ... a_{33} pět rovnic

$$\mathrm{K}_\iota(x_\iota, y_\iota) \equiv a_{11}x_\iota^2 + 2a_{12}x_\iota y_\iota + a_{22}y_\iota^2 + 2a_{13}x_\iota + 2a_{23}y_\iota + a_{33} = 0, \quad (\iota = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Řešením těchto a dosazením do $\mathrm{K} = 0$ plyne rovnice hledané čáry ve tvaru

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & y_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Zbývá dokázati, že řečených pět rovnic je vespolek neodvislo, t. j. že rovnice (3) není identickou.

Že existují soustavy pěti bodů, kterými kuželosečka úplně určena, t. j. že determinant (3) nemizí identicky vůči xy, $x_1y_1, \ldots x_5y_5$, dokáže se nejlépe příkladem číselným. Zbývá však ukázati, že pět bodů stačí v každém případě.

Předpokládejme nejprvé, že z daných pěti bodů leží tři na přímce; pak veškery body této přímky musí hověti rovnici hledané kuželosečky, která je tedy zvrhlou a druhá její část je přímka daná zbývajícíma dvěma body.

Jestliže však za druhé žádné tři z daných pěti bodů hledané kuželosečky, jež znamenejme a_1a_2, b_1b_2, c_1, neleží na přímce, můžeme kuželosečku K jimi definovanou takto sestrojiti: Bodem c_1 veďme libovolnou přímku, která protne kuželosečku v dalším bodě c_2, jejž obdržíme pomocí věty Carnotovy užité při trojúhelníku, jehož strany jsou přímky $\overline{a_1a_2}$, $\overline{b_1b_2}$, $\overline{c_1c_2}$. Otáčí-li se přímka kol c_1, probíhá c_2 kuželosečku zcela určitou.

Abychom však obdrželi konstrukci, přetvořme větu Carnotovu, která vyjadřuje vztah mezi šesti body kuželosečky, u větu Pascalovu.

Mějme na kuželosečce K libovolných šest bodů a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2; těmito veďme přímky $\overline{a_1a_2}$, $\overline{b_1b_2}$, $\overline{c_1c_2}$, a vrcholy trojúhelníka jimi stanoveného znamenejme 0, 1, 2.

Užijeme-li pro dělící poměry označení

$$(a_1) = (12a_1), \quad (b_1) = (20b_1), \quad (c_1) = (01c_1),$$

zní věta Carnotova takto

$$(\alpha) \qquad (a_1)(a_2)(b_1)(b_2)(c_1)(c_2) = 1.$$

Veďme nyní přímky $\overline{a_1 b_2}$, $\overline{b_1 c_2}$, $\overline{c_1 a_2}$, které nechť protnou zbývající strany trojúhelníka v bodech c, a, b. Dle věty Menelaovy bude pak

$$(a_1)(b_2)(c) = -1, \ (b_1)(c_2)(a) = -1, \ (c_1)(a_2)(b) = -1;$$

znásobíme-li tyto rovnice a máme zřetel k relaci Carnotově (α), obdržíme

$$(a)(b)(c) = -1,$$

z kteréžto rovnice plyne, že body a, c, b leží na přímce. Vyjádříme-li symbolickou rovnicí $k = (ab, cd)$ okolnost, že k je průsek přímek $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, jsou body a, c, b definovány takto

$$\begin{aligned} a &= (a_1 a_2, \ c_2 b_1), \\ b &= (a_2 c_1, \ b_1 b_2), \\ c &= (c_1 c_2, \ b_2 a_1); \end{aligned}$$

uvažujeme-li šestiúhelník 1 2 3 4 5 6, je přirozeno nazvati strany 1 2 a 4 5 protějšími, podobně jak o strany 2 3 a 5 6, pak 3 4 a 6 1.

V šestiúhelníku $a_1 a_2 c_1 c_2 b_1 b_2$ jsou pak strany, jež se protínají v bodech a, b, c, protějšími, takže máme větu *Pascalovu*:

V šestiúhelníku do kuželosečky vepsaném protínají se protější strany po dvou ve třech bodech tétéž přímky.

Věty té užívá se ke konstrukci bodů kuželosečky dané pěti body.*)

4. Mimo Pascalovu větu je pro theorii kuželoseček důležita interessantní věta *Désarguesova*, která je také bezprostředním důsledkem věty Carnotovy.

Čtyřmi body $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ prochází nekonečně mnoho kuželoseček, jich souhrn slove svazek kuželoseček, ony pevné čtyři body jeho vrcholy.

Mějme libovolný svazek kuželoseček (a_1, a_2, b_1, b_2) a libovolnou přímku P, jež neprochází žádným jeho vrcholem.

Každá kuželosečka svazku protne přímku P ve dvou bodech

---

*) Odkazujeme tu čtenáře k 2. svazku znamenitého spisu pp. bratří Weyrů „Základové vyšší geometrie“.

$c_1\, c_2$, a tím obdržíme na P řadu párů $c_1\, c_2$. Jde o souvisiost těchto dvojin průsečíků.

Přímky P, $\overline{a_1\, a_1}$, $\overline{b_1\, b_2}$ tvoří trojúhelník Carnotův; libovolná kuželosečka K protni přímku P v bodech $c_1\, c_2$; pak znamenejme vrcholy našeho trojúhelníka opětně 0, 1, 2, a pišme $(01c) = (c)$, $(12a) = (a)$, $(20b) = (b)$, pak máme z Carnotovy věty

$$(a_1)\,(a_2)\,(b_1)\,(b_2)\,(c_1)\,(c_2) = 1$$

hledaný vztah

$$(c_1)\,(c_2) = k,$$

kde k značí stálou (na kuželosečce K nezávislou) hodnotu

$$\frac{1}{(a_1)\,(a_2)\,(b_1)\,(b_2)}.$$

Naše řada párů tudíž má tu vlastnost, že pro všechny páry $c_1\, c_2$ součin dělících poměrů $\frac{0c_1}{1c_1} \cdot \frac{0c_2}{1c_2}$ má stálou hodnotu k. *Takováto řada dvojin bodových $c_1\, c_2$ nazývá se (kvadratickou) involucí.*

Náš výsledek tedy zní:

Svazek kuželoseček protíná libovolnou přímku, jež neprochází žádným jeho vrcholem, v (kvadratické) *involuci.*

To jest věta Désarguesova.

Jedná se nyní o konstrukci involuce, či dříve o její vlastnosti.

Involuce naše byla definována rovnicí

$$(01x_1)\,.\,(01x_2) = k,$$

značí-li $x_1\, x_2$ obecný pár involuce na přímce P, 0 a 1 dva pevné body této přímky. Blíží-li se bod x_1 bodu 0 (neb 1) blíží se x_2 bodu 1 (neb 0); body 0, 1 tvoří tedy také pár naší involuce.

Polohu bodu x na přímce P stanovme pomocí jeho vzdálenosti ξ, algebraicky vzaté, od jistého pevného bodu O na přímce ležícího: veličinu ξ nazveme souřadnicí bodu x. Jsou-li α, β souřadnice bodů 0 a 1, zní rovnice naší involuce

$$\frac{\xi_1 - \alpha}{\xi_1 - \beta} \cdot \frac{\xi_2 - \alpha}{\xi_2 - \beta} = k,$$

čili

$$(\alpha)\quad (1-k)\,.\,\xi_1\,\xi_2+(k\beta-\alpha)\,(\xi_1+\xi_2)+(\alpha^2-k\beta^2)=0.$$

Rovnice ta je tvaru

$$(4)\qquad A\,\xi_1\,\xi_2+B\,(\xi_1+\xi_2)+C=0.$$

Každá rovnice tvaru (4) definuje involuci.

Abychom to dokázali, znamenejme α, β jeden pár hodnot $\xi_1\ \xi_2$, a položme

$$\frac{\xi_1-\alpha}{\xi_1-\beta}=\eta_1,\qquad \frac{\xi_2-\alpha}{\xi_2-\beta}=\eta_2,$$

čímž rovnice (4) obdrží tvar podobný

$$(\beta)\qquad A'\,\eta_1\,\eta_2+B'\,(\eta_1+\eta_2)+C'=0.$$

Pro $\eta_1=0$ jest $\xi_1=\alpha$, $\xi_2=\beta$, tedy $\eta_2=\infty$;

Z rovnice (β) však máme

$$\eta_2=-\frac{C'+B'\eta_1}{B'+A'\eta_1},$$

a tento výraz pro $\eta_1=0$ je nekonečný jen když $B'=0$.

Tudíž zní rovnice (β)

$$A'\eta_1\eta_2+C'=0,$$

t. j.

$$\eta_1\eta_2=-\frac{C'}{A'}=k,$$

čili

$$\frac{\xi_1-\alpha}{\xi_1-\beta}\cdot\frac{\xi_2-\alpha}{\xi_2-\beta}=k$$

a to jest právě původní definice involuce.

Z rovnice (4) soudíme, že involuce jest úplně ustanovena dvěma páry; buďtež to páry o souřadnicích α_1, α_2; β_1, β_2.

Z rovnic

$$\begin{aligned}A\xi_1\xi_2+B\,(\xi_1+\xi_2)+C&=0,\\ A\alpha_1\alpha_2+B\,(\beta_1+\beta_2)+C&=0,\\ A\beta_1\beta_2+C\,(\gamma_1+\gamma_2)+C&=0,\end{aligned}$$

plyne vyloučením neznámých koefficientů A, B, C hledaná rovnice involuce ve tvaru

$$(4^a)\qquad \begin{vmatrix}\xi_1\xi_2 & \xi_1+\xi_2 & 1\\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_2 & 1\\ \beta_1\beta_2 & \beta_1+\beta_2 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Považujme nyní páry ξ_1, ξ_2 za kořeny kvadratické rovnice

$$\xi^2 - (\xi_1 + \xi_2)\,\xi + \xi_1\xi_2 = 0,$$

mezi jejímiž koefficienty platí vztah linearný

$$A\xi_1\xi_2 + B(\xi_1 + \xi_2) + C = 0;$$

involuce je tedy souhrn kořenů kvadratických rovnic

$$\xi^2 - f\xi + g = 0,$$

jež obdržíme, podrobíce koefficienty f, g libovolné linearné podmínce

$$Af + Bg + C = 0.$$

Řešíme-li tuto podmínku pomocí parametru λ ve tvaru

$$f = \frac{f_0 + \lambda f_1}{1+\lambda}, \quad g = \frac{g_0 + \lambda g_1}{1+\lambda},$$

obdržíme rovnici

$$(\xi^2 - f_0\xi + g_0) + \lambda(\xi^2 - f_1\xi + g_1) = 0.$$

Odtud soudíme, že *lze involuci považovati za souhrn párů, jež hoví rovnici*

$$(4^b) \qquad (\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma) + \lambda(\alpha'\xi^2 + \beta'\xi + \gamma') = 0,$$

kde α, β, γ, α', β', γ' jsou konstanty a λ *proměnný parametr*. Každému páru involuce $\xi_1\xi_2$ přísluší určitá hodnota parametru λ, jež jej úplně charakterisuje.

Uvažujme nyní dvě kuželosečky $K(x, y) = 0$, $K_1(x, y) = 0$, jež protínají se ve čtyř bodech; jimi prochází nekonečně mnoho kuželoseček, jichž rovnice jsou tvaru

$$(5) \qquad K(x, y) + \lambda K_1(x, y) = 0,$$

při čemž λ značí konstantu; každé hodnotě λ odpovídá jedna kuželosečka svazku.

Průseky kuželosečky (5) s přímkou P o rovnicích

$$x = a + a'\xi, \quad y = b + b'\xi,$$

(kde ξ značí parametr libovolného bodu na P) obdržíme řešení rovnice

$$K(a + a'\xi, b + b'\xi) + \lambda K_1(a + a'\xi, b + b'\xi) = 0,$$

jež jest tvaru (4^b). Tím na novo dokázána věta Désarguesova.

(Pokračování.)