Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O kvaternionech. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 3, 145--151

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109324

O kvaternionech.

Sepsal

Dr. F. J. Studnička.

(Pokračování.)

Již v V. ročníku tohoto časopisu podal jsem stručnou arithmetiku kvaternionů, k níž jsem slíbil dodati pojednání o pouhých složkách jejich ideálních, zakončuje na str. 151. slovy: „Poněvadž tu ideální části kvaternionů hlavní hrají úlohu, nutno se blíže s nimi seznámiti, a zvláštní zákony, jež se u nich jeví, vyšetřiti a vytknouti".

Od té doby (1876) nebylo mi možná svému slibu, slovem (Pokračování) tam danému, vyhověti; neb povinnosti druhu nejrozmanitějšího mne zaměstnávaly všelijak s dostatek, takže jsem nemohl i v tomto moderním oboru mathematickém býti činným, jak bych si byl přál. Teprva r. 1893, když hodlal jsem 16. října oslaviti památku dne, kde před 50 lety *William Roman Hamilton* poprvé vystoupil s ovocem desítiletého badání svého do veřejnosti, vykládaje ve schůzi kr. irské akademie v Dublíně o podstatě kvaternionů, bylo mi aspoň tolik možná provésti, že jsem téhož dne zahájil historickým úvodem zvláštní přednášky o tomto předmětu na universitě naší, z jichž obsahu lze „pokračování" i dokončení mého pojednání tuto podati.

O součinu.

Přihlížíme-li k jakosti čtyř složek, z nichž se skládá čtyřčlenný výraz kvaternion zvaný, vyjádří se kratčeji tvarem binomickým, píše-li se

$$u_1 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 = \mathrm{R}_1 + \mathrm{I}_1, \qquad (1)$$

takže tu značí

$$R_1 = a_0$$

část jeho reální, *reale* stupně *prvého*, a

$$I_1 = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 \qquad (2)$$

část jeho ideální, *ideale* taktéž stupně *prvého*.

Zavedeme-li pak obdobné označení

$$\left.\begin{array}{l} I_2 = b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3, \\ I_3 = c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ I_n = n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3, \end{array}\right. \qquad (3)$$

obdržíme tu n ideálí stupně prvého, s jichž součinem tu především jest nám se zanášeti, anto algebraický jich součet neposkytujo zvlášť pozoruhodných momentů.

Především tu obdržíme, jakož z předcházejícího zjevno,

$$\begin{array}{l} I_1 . I_2 = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ + i_1 (a_2 b_3) + i_2 (a_3 b_1) + i_3 (a_1 b_2), \end{array}$$

z čehož patrno, že součin dvou ideálí skládá se z části reální, *reale* stupně *druhého*, symbolem R_{12} označeného, takže

$$R_{12} = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3), \qquad (4)$$

a z části ideální, *ideale* stupně *druhého*, symbolem obdobným I_{12} označeného, takže

$$I_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

načež tu možná krátce psáti

$$I_1 . I_2 = R_{12} + I_{12}. \qquad (6)$$

Z těchto vzorců jde pak na jevo, že pro

$$a_k = b_k \quad \text{i} \quad I_1 = I_2,$$

a tedy platí

$$I_1^2 = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = R_{1^2}, \qquad (7)$$

kdež symbolem R_{1^2} značeno reale stupně druhého při *stejných* činitelích, kdežto při označení obdobném platí

$$\mathrm{I}_{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Zároveň se tu poznává, že

$$\mathrm{R}_{12} = - {}^{i_k}|^{b_k}\mathrm{I}_1, \tag{9}$$

zavedeme-li *Sarrus-ovo* substituční znamení $|$, jímž zde naznačeno, že ve vzorci (2) klásti se má místo i_k veličina b_k. Mimo to patrně jest

$$\mathrm{I}^2_{12} = - [(a_1 b_2)^2 + (a_2 b_3)^2 + (a_3 b_1)^2]. \tag{10}$$

Abychom vyšetřili význam a složení součinu tří ideálí, položme

$$\mathrm{I}_1 \,.\, \mathrm{I}_2 \,.\, \mathrm{I}_3 = (\mathrm{R}_{12} + \mathrm{I}_{12})\, \mathrm{I}_3,$$

načež bude, zavedeme-li obdobné symboly $\mathrm{R}_{1.3}$ a $\mathrm{I}_{1.3}$ *reale* a *ideale* stupně *třetího* vyjadřující,

$$\mathrm{I}_{12} \,.\, \mathrm{I}_3 = \mathrm{R}_{1.3} + \mathrm{I}_{1.3}, \tag{11}$$

kdež podlé složení vzorců (4) a (5) bude

$$\mathrm{R}_{1.2} = - [c_1 (a_2 b_3) + c_2 (a_3 b_1 + c_3 (a_1 b_2)] = - (a_1 b_2 c_3), \tag{12}$$

anebo kratčeji

$$\mathrm{R}_{1.3} = - {}^{i_k}|^{c_k}\mathrm{I}_{12}, \tag{13}$$

kdežto použitím subdeterminantů

$$\mathrm{C}_1 = (a_2 b_3),\ \mathrm{C}_2 = (a_3 b_1),\ \mathrm{C}_3 = (a_1 b_2), \tag{14}$$

se pro $\mathrm{I}_{1.3}$ obdrží opět determinant stupně třetího a sice

$$\mathrm{I}_{1.3} = \begin{vmatrix} \mathrm{C}_1 & \mathrm{C}_2 & \mathrm{C}_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Z těchto vzorců plyne pak, jsou-li faktory stejné a užijeme-li téhož označení symbolického, že

$$\mathrm{R}_{\frac{1}{3}} = 0,\ \mathrm{I}_{\frac{1}{3}} = 0, \tag{16}$$

kdežto

$$I^2_{1.3} = -[(c_1C_2)^2 + (c_2C_3)^2 + (c_3C_1)^2]. \qquad (17)$$

Podobně bychom obdrželi při součinu čtyř ideálí napřed

$$I_{1.3} \cdot I_4 = R_{1.4} + I_{1.4},$$

kdež značí

$$R_{1.4} = -{}^{i_k}|^{d_k} I_{1.3}, \qquad (18)$$

reale stupně *čtvrtého* a

$$I_{1.4} = \begin{vmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{vmatrix},$$

příslušné *ideale* stupně *čtvrtého*, platí-li obdobně

$$D_1 = (C_2c_3),\ D_2 = (C_3c_1),\ D_3 = (C_1c_2), \qquad (19)$$

takže zároveň jest

$$R_{\frac{1}{4}} = 0,\quad I_{\frac{1}{4}} = 0,$$

avšak o čtverci opět platí

$$I^2_{1.4} = -[(d_1D_2)^2 + (d_2D_3)^2 + (d_3D_1)^2].$$

Postupujeme-li takto dále, poznáme snadno, že zavedením n faktorů vznikne

$$I_{1.\overline{n-1}} \cdot I_n = R_{1.n} + I_{1.n}, \qquad (20)$$

kdež $R_{1.n}$ a $I_{1.n}$ značí *reale* a *ideale* stupně n-tého, jež stanoví se vzorci

$$R_{1.n} = -{}^{i_k}/^{n_k} I_{1.\overline{n-1}}, \qquad (21)$$

a se zřetelem ke vzorcům (3)

$$I_{1.n} = \begin{vmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{vmatrix}, \qquad (22)$$

kdež současně značí

$$N_1 = (M_2m_3),\ N_2 = (M_3m_1),\ N_3 = (M_1m_2), \qquad (23)$$

načež pak i tu jest

$$R_{\frac{1}{n}} = 0, \quad I_{\frac{1}{n}} = 0, \tag{24}$$

avšak obdobně se vzorci (7), (10), (17), platí

$$I^2_{1.n} = -[(n_1 N_2)^2 + (n_2 N_3)^2 + (n_3 N_1)^2], \tag{25}$$

což znamená, že *čtverec ideale kteréhokoli stupně jest negativní součet tří čtverců realních.* *)

Znajíce tyto vzorce, vyjádříme zcela pohodlně součin n ideálí jednoduchým kvaternionem podle vzorce

$$\prod_{k=1}^{n} I_k = R + I. \tag{26}$$

Užijeme-li totiž vzorce (6), obdržíme pro tři faktory takovéto

$$I_1 I_2 I_3 = (R_{12} + I_{12}) I_3 = R_{12} I_3 + I_{12} . I_3$$

a tedy pomocí vzorce (11) konečně

$$I_1 I_2 I_3 = R_{1.3} + R_{12} . I_3 + I_{1.3}. \tag{27}$$

A z tohoto vzorce plyne dále

$$\begin{aligned} I_1 I_2 I_3 I_4 &= (R_{1.3} + R_{12} . I_3 + I_{1.3}) I_4 \\ &= R_{1.3} . I_4 + R_{12} I_3 I_4 + I_{1.3} I_4, \end{aligned}$$

takže pomocí vzorce (6), stanovícího

$$I_3 . I_4 = R_{34} + I_{34}$$

a pomocí vzorce (20) pro $n = 4$ stanovícího

$$I_{1.3} . I_4 = R_{1.4} + I_{1.4}$$

konečně obdržíme pro součin čtyř ideálí vzorec

$$I_1 I_2 I_3 I_4 = R_{12} . R_{34} + R_{1.4} + R_{1.3} I_4 + R_{12} I_{34} + I_{1.4}, \tag{28}$$

z něhož patrno, že tu

$$R = R_{12} . R_{34} + R_{1.4},$$

$$I = R_{1.3} . I_4 + R_{12} . I_{34} + I_{1.4}.$$

*) U čísla soujemného $a + bi$ jest ideale bi a jeho čtverec $- b^2$.

A podobně by se postupovalo dále, při čemž by patrně i realní složka součinu R i složka ideální I stávala se vždy složitější.

Nežli dále postoupíme, budiž tu též ukázáno, jak se v praksi takovéto násobení četnějších ideálí provádí; volme tedy př.

$$\mathrm{I}_k = ki_1 + (k+1)\,i_2 + (k+2)\,i_3,\ (k = 1, 2, 3, 4)$$

takže nám jest stanoviti součin

$$(i_1 + 2i_2 + 3i_3)\,(2i_1 + 3i_2 + 4i_3)(3i_1 + 4i_2 + 5i_3)(4i_1 + 5i_2 + 6i_3).$$

A tu sestavme si početní schema toto:

$$\begin{array}{l|llllllll}
a_k & 1 & 2 & \times & 3, & \times & 1 & \times & 2 \\
b_k & 2 & 3 & & 4, & & 2 & & 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|llllllll}
\mathrm{C}_k & -1 & 2 & \times & -1, & \times & -1 & \times & 2 \\
c_k & 3 & 4 & & 5, & & 3 & & 4
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|llllllll}
\mathrm{D}_k & 14 & 2 & \times & -10, & \times & 14 & \times & 2 \\
d_k & 4 & 5 & & 6, & & 4 & & 5
\end{array}$$

$$\mathrm{I}_{1.4}\left|\begin{array}{lll}
62, & -124, & 62 \\
i_1, & i_2, & i_3,
\end{array}\right.$$

načež obdržíme podle vzorce (28), poněvadž v tomto případě

$$\mathrm{R}_{1.3} = 0\text{*)}$$

se zřetelem ke vzorcům (4), (5), (15), (18) a (19)

$$\mathrm{R}_{12} = -(1.2 + 2.3 + 3.4) = -20,$$
$$\mathrm{R}_{34} = -(3.4 + 4.5 + 5.6) = -62;$$

pak se zřetelem k předcházejícímu schematu

$$\mathrm{R}_{1.4} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

---

*) Podle poučky, že hodnota determinantu stupně n-tého rovná se identicky nulle, představují-li prvky rovnoběžných řad, tedy buď řádků neb sloupců o sobě arithmetické řady stupně $(n-2)$ho; zde jest $n = 3$, a prvky řádků 1, 2, 3 jakož i 2, 3, 4 a 3, 4, 5 představují arithmetické řady stupně prvého. Viz *Studnička* Beitrag zur Theorie der Determinanten" Sitzungsber. der kön. b. Ges. d. Wiss. 1872.

vedlé toho buď samostatně

$$I_{34} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{vmatrix} = -(i_1 - 2i_2 + i_3)$$

anebo s připojením se k předcházejícímu determinantu, což vede k témuž výsledku; konečně dle schematu

$$I_{I.4} = 62\,(i_1 - 2i_2 + i_3);$$

takže sestavíme-li tyto výsledky dohromady, zjednáme si přímo pro hledaný součin uvedených čtyř ideálí výraz normální

$$\begin{aligned} I_1 I_2 I_3 I_4 &= -20 . -62 - 6 + (20 + 62)(i_1 - 2i_2 + i_3) \\ &= 1234 + 82i_1 - 164i_2 + 82i_3. \end{aligned}$$

(Dokončení).

Z geometrie kuželoseček.*)

Píše

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

Budeme se zabývati čarami, jichž rovnice v pravoúhlé soustavě souřadnic znějí

$$K(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Jedná se především o to, zdali rovnice taková definuje realnou křivku. K otázce té odpovídají známé algebraické transformace výrazu K v součet čtverců; my však sledujíce pouze vlastnosti projektivní, omezíme se na to, že budeme předpokládati, že rovnici vyhovuje soustava realných hodnot $x = \xi$, $y = \eta$. Bodem (ξ, η) vedeme libovolnou přímku P, jejíž body mají pak souřadnice tvaru

$$x = \xi + a\lambda, \quad y = \eta + b\lambda,$$

kde a, b stanoví polohu přímky a λ jest parametr obecného

*) Přednášky konané na čes. vys. škole technické.