Avšak

$$AM = AN \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4^\beta)$$

Z rovnic (4^α) a (4^β), plyne:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Snadno můžeme z předloženého výkresu i známou větu tangentovou odůvodniti.

$$\triangle BMN \sim \triangle BM_1N_1,$$

z čehož plyne:

$$BN_1 : BN = M_1N_1 : MN;$$

$$BN_1 = a + b \quad BN = a - b.$$

Z relace (1^β) a (3^β) dosaďme hodnoty za M_1N_1 a MN do předcházející srovnalosti, čímž nabudeme

$$(a+b) : (a-b) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

čili

$$(a+b) : (a-b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Sestrojení strany pravidelného desítiúhelníka do kružnice vepsaného.

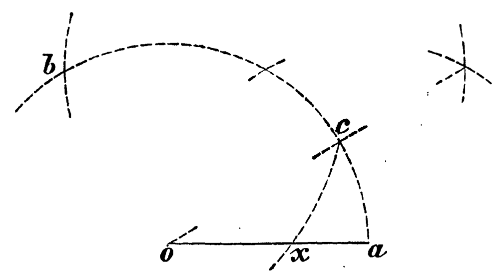
Žákům středních škol podává

V. Jeřábek,

c. k. professor v Brně.

Řešení: Budiž dána kružnice středu o a poloměru $\overline{oa} = r$. Sestrojme $\widehat{ab} = 120^0$, $\widehat{ac} = 30^0$; potom ze středu b poloměrem $\overline{bc} = r\sqrt{2}$ narýsovaná kružnice protne poloměr oa v bodu x a jeho prodloužení v bodu x'. Prosté hodnoty úseček $\overline{ox} = x$,

$\overline{ox'} = x'$ značí strany pravidelných desítiúhelníků prvního a třetího řádu do kružnice vepsaných.



Důkaz: V trojúhelníku obx jest $\overline{ob} = r$, $\overline{bx} = \overline{bc} = r\sqrt{2}$, $\sphericalangle box = 120^0$. Položíme-li $\overline{ox} = x$, jest dle věty Carnotovy

$$2r^2 = x^2 + r^2 + 2rx \cos 60^0$$

čili

$$x^2 + rx - r^2 = 0,\text{*})$$

odkudž

$$x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$x' = -\frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1), \quad c.b.d.$$

Délku strany s_5 pravidelného pětiúhelníka do kružnice vepsaného lze sestrojiti na základě známé relace

$$s_5^2 = x^2 + r^2$$

Poznámka. Konstrukci uvedenou lze si snadno zapamatovati, neboť určovací částky trojúhelníka obx jsou dvě strany a úhel proti větší straně, a to délky stran pravidelného 4 a 6-úhelníka do kruhu vepsaného a úhel 120^0; třetí strana udává délku strany pravidelného $4 + 6 = 10$-úhelníka.

---

*) K témuž vzorci lze dospěti cestou planimetrickou.