Řešení úloh

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 3, 188--207

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109322

Řešení úloh.

Úloha 1.

Bodem p v půdici ab trojúhelníka abc vedeny příčky $pm \parallel bc$, $pn \parallel ac$. Je-li $\triangle apm = M$, $\triangle bpn = N$, který jest obsah rovnoběžníka $cmpn$ a trojúhelníka abc?

Řešení.

(Zaslal p. *Vladimír List*, stud. VII. tř. akad. g. v Praze.)

Označíme-li obsah trojúhelníka $abc = P$ a obsah rovnoběžníka $cmpn = R$, jest patrně

$$M : N : P = \overline{ap}^2 : \overline{bp}^2 : \overline{ab}^2$$

čili

$$\sqrt{M} : \sqrt{N} : \sqrt{P} = \overline{ap} : \overline{bp} : \overline{ab}.$$

Jelikož $\overline{ab} = \overline{ap} + \overline{bp}$, jest také

$$\sqrt{P} = \sqrt{M} + \sqrt{N},$$

tudíž

$$P = (\sqrt{M} + \sqrt{N})^2.$$

Odtud pak

$$R = P - (M + N) = 2\sqrt{MN}.$$

Úloha 2.

Do kružnice poloměru r vepsán pravidelný osmiúhelník a na každé jeho straně jakožto přeponě sestrojen trojúhelník pravoúhlý rovnoramenný a) vně, b) vnitř osmiúhelníka. Vypočítati obsah hvězdovitého úhelníka tak vzniklého.

Řešení.

(Zaslal p. *Josef Materna*, stud. VIII. tř. c. k. real. gymn. na Spálené ul. v Praze).

Je-li s strana pravidelného osmiúhelníka, a odvěsna rovnoramenného trojúhelníka pravoúhlého, jest

$$s = r\sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad a = r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

Obsah osmiúhelníka

$$P = 2r^2\sqrt{2}$$

a jelikož pravoúhlý trojúhelník rovnoramenný na přeponě s má obsah

$$\varDelta = \frac{s^2}{4} = \frac{r^2}{4}(2-\sqrt{2}),$$

jsou žádané obsahy mnohoúhelníků hvězdovitých

$$P_1 = P + 8\varDelta = 4r^2$$
$$P_2 = P - 8\varDelta = 4r^2(\sqrt{2}-1).$$

Úloha 3.

Řešiti rovnici

$$\sin^2 x - \cos^2 x \operatorname{tg}^2 54^0 = \frac{1}{2}.$$

Řešení.

(Zaslal p. *Václav Bubeník*, stud. VII. tř. české reálky v Praze,)

Rovnici danou lze přetvořiti na podobu

$$\cos^2 x\ (1 + \operatorname{tg}^2 54^0) = \cos^2 45^0;$$

odtud dostaneme rovnici

$$\cos x = \pm \cos 45^0 . \cos 54^0,$$

které vyhovuje kořen

$$x_1 = 65^0 26' 27''$$

a vůbec

$$x = 2n\mathrm{R} \pm x_1.$$

Úloha 4.

Které jsou úhly rovnoramenného lichoběžníka, jemuž lze vepsati kružnici a jehož úhlopříčky svírají spolu úhel 60^0.

Řešení.

(Zaslal p. *Josef Hájíček*, učitel v Grygově u Olomouce).

Jsou-li a, b rovnoběžné strany lichoběžníka, jest výška jeho

$$v = \frac{a}{2}\operatorname{cotg} 60^0 + \frac{b}{2}\operatorname{cotg} 60^0 = \frac{a+b}{2\sqrt{3}},$$

délka ramene

$$c = \frac{a+b}{2}$$

a proto, píšeme-li $\sphericalangle\, bad = \alpha$, jest

$$\sin\alpha = \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Z toho ustanovíme

$$\alpha = 35^0\, 15'\, 53''.$$

Úloha 5.

Sestrojíme-li ke kružnici středu o a poloměru r v bodě a tečnu a přeneseme-li na ni

$$\overline{am} = \frac{1}{2}\, r, \quad \overline{mn} = \frac{1}{7}\, r,$$

protíná spojnice $\overline{on}$ kružnici v bodě b tak, že $\overline{ab}$ rovná se přibližně straně pravidelného 11tiúhelníka kružnici vepsaného. S jakou přesností?

Řešení.

(Zaslal p. *Frant. Miláček*, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě).

Má-li $\overline{ab}$ býti strana pravidelného 11tiúhelníka, musí býti

$$\sphericalangle\, aon = \alpha = \frac{360^0}{11} = 32^0\, 43'\, 38'',$$

tedy

$$\overline{an} = r \operatorname{tg}\alpha = 0{\cdot}64265 r.$$

Proměníme-li $\operatorname{tg}\alpha$ v řetězec, jest pátá jeho sblížená hodnota

$$\frac{9}{14}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$$

a proto

$$\overline{an} \doteq \frac{r}{2}+\frac{r}{7},$$

k čemuž sluší úhel

$$\alpha' = 32^0 44' 6''.$$

Značí-li s správnou hodnotu strany pravidelného 11tiúhelníka, jest

$$s = 2r \sin \frac{\alpha}{2} = 0{\cdot}56346\, r;$$

dle sestrojení jest však

$$\overline{ab} = 2r \sin \frac{\alpha'}{2} = 0{\cdot}56362\, r,$$

tudíž

$$\overline{ab} - s = 0{\cdot}00016\, r.$$

Úloha 6.

Řešiti trojúhelník, dána-li výška v, těžnice t a příčka u půlící úhel; všechny tři příčky vycházejí z téhož vrcholu.

Řešení.

a) (Zaslal p. *Josef Langr*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové).

Paty příček daných v, u, t, v půdici ab trojúhelníka abc buďtež d, e, f.

Označme $\overline{af} = \overline{fb} = x$, $\overline{df} = m$, $\overline{de} = n$.
Dosaďme příslušné veličiny do úměry

$$\overline{ac} : \overline{bc} = \overline{ae} : \overline{be};$$

tím obdržíme rovnici

$$\frac{\sqrt{(x-m)^2+v^2}}{\sqrt{(x+m)^2+v^2}} = \frac{x-m+n}{x+m-n},$$

z níž vypočítáme

$$x = \sqrt{\frac{m-n}{n}(v^2 + mn)}.$$

Ležto m, n, jsou veličiny známé, lze x dle výrazu tohoto sestrojiti.

b) **Řešení trigonometrické.** Je-li v trojúhelníku abc úhel $\alpha > \beta$ a tvoří-li těžnice t s půdicí c ostrý úhel φ, jest

$$\sin\varphi = \frac{v}{t}.$$

Mimo to jest

$$\sphericalangle(v\,u) = \frac{\gamma}{2} - (\mathrm{R} - \alpha) = \frac{\alpha - \beta}{2} = \delta,$$

pročež

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{v}{u}.$$

Poněvadž pak

$$\frac{c}{2} = \frac{t\sin(\varphi + \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{t\sin(\varphi - \beta)}{\sin\beta},$$

obdržíme odtud

$$2\cot\varphi = \cot\beta - \cot\alpha.$$

Známými obraty vypočítáme z toho

$$\cos\gamma = -\frac{\cos(2\delta + \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Jelikož úhly δ a φ jsou známy, ustanoven tímto úhel γ a zároveň

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \mathrm{R} - \frac{\gamma}{2} = \sigma;$$

tak nalezneme

$$\alpha = \sigma + \delta, \qquad \beta = \sigma - \delta.$$

Strany trojúhelníka jsou pak

$$a = \frac{v}{\sin\beta}, \qquad b = \frac{v}{\sin\alpha},$$

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

Úloha 7.

V pětiúhelníku *abcde* dány jsou strany

$$\overline{ab} = 33, \quad \overline{bc} = 56, \quad \overline{cd} = 25, \quad \overline{de} = 48, \quad \overline{ea} = 36$$

a úhly

$$\sphericalangle\, bac = 59^0 29' 25'', \quad \sphericalangle\, dae = 53^0 7' 49''.$$

Vypočítati úhly pětiúhelníka, jeho úhlopříčky a obsah.

Řešení.

(Zaslal p. *Frant. Hýbl*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci).

Dle sinusové věty vypočítáme

$$\sphericalangle\, acb = 30^0\, 30'\, 35'';$$

pak zřejmo, že $\sphericalangle\, abc = 90^0$, trojúhelník *abc* tedy pravoúhlý a přepona jeho

$$\overline{ac} = 65.$$

Týmž spůsobem ustanovíme

$$\sphericalangle\, ade = 36^0\, 52'\, 11'',$$

pročež $\sphericalangle\, aed = 90^0$, trojúhelník *ade* pravoúhlý a jeho přepona

$$\overline{ad} = 60.$$

V trojúhelníku *acd* známy jsou všechny strany; úhly jeho nalezneme dle vzorců pro tangenty polovičních úhlů, a to

$$\sphericalangle\, dac = 22^0\, 37'\, 11'', \quad \sphericalangle\, acd = 67^0\, 22'\, 49'', \quad \sphericalangle\, adc = 90^0.$$

Jsou tedy úhly pětiúhelníka *abcde* tyto:

$$\sphericalangle\, a = 135^0\, 14'\, 25'', \quad \sphericalangle\, b = 90^0, \quad \sphericalangle\, c = 97^0\, 53'\, 24'',$$
$$\sphericalangle\, d = 126^0\, 52'\, 11'', \quad \sphericalangle\, e = 90^0.$$

Úhlopříčky mají délky:

$$ac = 65, \quad ad = 60, \quad bd = 64{\cdot}38\ldots,$$
$$be = 63{\cdot}81\ldots, \quad ce = 66{\cdot}1\ldots$$

Posléze obsah pětiúhelníka

$$abcde = abc + acd + ade = 924 + 750 + 864 = 2538.$$

Úloha 8.

Místo B leží 74·15 *km* východně od A, místo C 25·9 *km* severovýchodně od B, D pak 78·4 *km* na západoseverozápad od C. V kterou stranu a jak daleko leží D od A.

Řešení.

a) (Zaslal p. *Robert Burian*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze).

V trojúhelníku BCD známe strany $\overline{BC}, \overline{CD}$ a sevřený jimi úhel $\sphericalangle BCD = 67^0\ 30'$; větou tangentovou a sinusovou vypočítáme odtud

$$\sphericalangle CBD = 93^0\, 14'\, 32'', \ \sphericalangle CDB = 19^0\, 15'\, 28'',$$
$$\overline{BD} = 72{\cdot}55\ km.$$

V trojúhelníku ABD známy jsou strany $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ a úhel $\sphericalangle ABD = 135^0 - 93^0\, 14'\, 32'' = 41^0\, 45'\, 28''$. Týmž spůsobem jako dříve nalezneme

$$\overline{AD} = 52{\cdot}3\ km, \ \sphericalangle BAD = 67^0\, 29'\, 19''.$$

Místo D leží tedy 52·3 *km* na severoseverovýchod od A.

b) Označme strany čtyřúhelníka ABCD takto:

$$\overline{AB} = a, \ \overline{BC} = b, \ \overline{CD} = c. \ \overline{DC} = d;$$

mimo to klaďme $\sphericalangle BAD = \alpha$.

Promítneme-li čtyřúhelník jednou do osy rovnoběžné k $\overline{AB}$, po druhé do osy kolmé k $\overline{AB}$, nabudeme rovnic

$$d \cos \alpha = a + b \cos 45^0 - c \cos 22\tfrac{1}{2}^0$$
$$d \sin \alpha = \quad b \sin 45^0 + c \sin 22\tfrac{1}{2}^0.$$

Dosadivše hodnoty dané, obdržíme

$$d \cos\alpha = 20{\cdot}032, \quad d \sin \alpha = 48{\cdot}316,$$

z čehož přijdeme k témuž výsledku jako dle methody *a*).

Úloha 9.

Pozemek má podobu trojúhelníka abc, ve kterém $\overline{ab} = 156\ m$, $\overline{ac} = 99\ m$, $\sphericalangle acb = 126^0\,52'\,13''$. Příčkou mn má býti oddělen $\triangle\, mnc = \frac{4}{9} \triangle\, abc$. Je-li m v ac tak dáno, že $\overline{cm} = 50\ m$, kterou délku má $\overline{cn}$ a $\overline{mn}$? Který jest obsah trojúhelníka mnc?

Řešení.

(Zaslal p. *Jan Kroupa*, stud. VII. tř. č. g. v Opavě).

Vypočítejme nejprve $\sphericalangle\, abc = \beta$; dle věty sinusové najdeme z daných podmínek

$$\beta = 30^0\,30'\,40'',$$

i bude pak třetí úhel trojúhelníka abc

$$\alpha = 2R - (\beta + \gamma) = 22^0\,37'\,7''.$$

Užijeme-li opět věty sinusové, nalezneme stranu

$$\overline{bc} = 75.$$

Dle úlohy jest

$$\overline{cm}\,.\,\overline{cn} = \frac{4}{9}\,.\,\overline{ca}\,.\,\overline{cb}$$

čili

$$50\,.\,\overline{cn} = \frac{4}{9}\,.\,99\,.\,75$$

odkudž

$$cn = 66.$$

Trojúhelníky abc, cmn jsou si podobny, shodujíce se v úhlu γ a v poměru stran

$$ca : cb = cn : cm.$$

čili

$$99 : 75 = 66 : 50.$$

Poměr podobnosti jest $3 : 2$, proto bude

$$\overline{ab} : \overline{mn} = 3 : 2,$$

tudíž

$$\overline{mn} = 104.$$

Znajíce strany trojúhelníka *cmn*, najdeme dle vzorce Heronova obsah jeho

$$\Delta = 1320\ m^2.$$

Úloha 10.

Dány jsou mimoběžky A, B a rovina R; stanoviti přímku, která jsouc rovnoběžná s rovinou R, protíná obě mimoběžky v stejných úhlech.

Řešení.

(Zaslal p. *Hugo Kröhn*, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové).

Libovolným bodem roviny R veďme přímky $A' \| A$, $B' \| B$ a sestrojme rovinu S, která kolmo stojíc na rovině $(A'B')$, půlí úhel těchto přímek. Roviny R a S protínejtež se v přímce C'; přímka tato tvoří v A' i B' úhly stejné. Sestrojíme-li tedy známým způsobem příčku C, která protíná A i B a jest rovnoběžna s C', vyhoví přímka C všem podmínkám úlohy. Obdržíme vlastně takové přímky dvě, C_1, C_2, ježto úhel různoběžek $A'B'$ taktéž dvěma rovinami S_1, S_2 rozpůliti lze.

Úloha 11.

Trojbokému hranolu kolmému lze vepsati kouli, dotýkající se obou základen i všech stěn pobočných. Jsou-li strany základny $a = 10$, $b = 17$, $c = 21$, který jest poloměr koule vepsané a který poloměr má koule opsaná? Jak jsou vzdáleny od sebe středy obou koulí?

Řešení.

(Zaslal p. *Josef Hájíček*, učitel v Grygově u Olomouce).

Základna hranolu daného má obsah $\Delta = 84$; jest tedy poloměr kružnice jí vepsané

$$\varrho = \frac{\Delta}{s} = 3\cdot 5.$$

Poloměr ten jest zároveň poloměrem koule hranolu vepsané; výška hranolu toho $v = 2\varrho = 7$. Poloměr kružnice opsané trojúhelníku danému stanovíme vzorcem

$$r = \frac{abc}{4\Delta} = 10\frac{5}{8};$$

poloměr koule opsané hranolu jest pak

$$R = \sqrt{\varrho^2 + r^2} = \frac{1}{8}\sqrt{8009}.$$

Vzdálenost x středů obou koulí jest táž jako vzdálenost středů kružnic, které jsou základně vepsány a opsány; bude proto

$$x^2 = \left(\varrho - \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}\right)^2 + \left(\frac{a + b - 2c}{2}\right)^2,$$

z čehož dosazením hodnot vychází

$$x = \frac{1}{8}\sqrt{2465}.$$

Úloha 12.

Dány jsou dvě koule poloměrů r_1, r_2; vzdálenost jejich středů $d > r_1 + r_2$. *a)* Které jest geometrické místo bodu svítícího, z něhož osvětlena jest $\frac{1}{m}$ povrchu koule první a $\frac{1}{n}$ povrchu koule druhé? *b)* Které jest geometrické místo bodu svítícího, z něhož osvětlena jest poměrně stejná část povrchu na obou kulích?

Řešení.

(Zaslal p. *Aug. Haas*, stud. VIII. tř. č. g. v Opavě).

Má-li svítící bod od středu koule poloměru r vzdálenost u, osvětluje vrchlík výšky

$$v = \frac{r(u - r)}{u}.$$

a) Budiž u_1 vzdálenost bodu svítícího od středu s_1 první koule, u_2 od středu s_2 koule druhé. Výšky příslušných vrchlíků nechť jsou v_1, v_2. Pak známe podmínky

$$2\pi r_1 v_1 = \frac{1}{m} . 4\pi r_1^2, \quad 2\pi r_2 v_2 = \frac{1}{n} . 4\pi r_2^2,$$

které, hledíce ku vzorci hořejšímu, přetvoříme v tyto:

$$u_1 = \frac{m r_1}{m - 2}, \quad u_2 = \frac{n r_2}{n - 2}.$$

Odtud patrno, že hledané geom. místo jest kružnice, ve které se protíná plocha kulová středu s_1 a poloměru u_1 s plochou kulovou středu s_2 a poloměru u_2.

Poloměr této kružnice jest

$$\varrho = \frac{1}{2d}\sqrt{(u_1 + u_2 + d)(u_1 + u_2 - d)(u_1 - u_2 + d)(u_2 - u_1 + d)}.$$

b) Je-li $m = n$, jest

$$u_1 : u_2 = r_1 : r_2.$$

Položíme-li středy s_1, s_2 jakoukoli rovinu, jest geom. místo bodů v této rovině, které dané podmínce vyhovují, krnžnice; krajní body jejího průměru dělí úsečku $\overline{s_1 s_2}$ v poměru $\pm \frac{r_1}{r_2}$. Žádané geom. místo v prostoru jest plocha kulová, která vytvoří se otočením této kružnice kolem osy $\overline{s_1 s_2}$; vnitřní a vnější střed podobnosti obou koulí daných jsou krajními body jejího průměru. Podstatnou částí tohoto geom. místa jest vlastně jen vrchlík, obsažený vně plochy kuželové opsané oběma koulím z vnitřního jich středu podobnosti.

Úloha 13.

Do krychle o hraně *a* vepsány jsou dva pravidelné čtyrstěny, jichž hrany jsou úhlopříčky stěn na krychli. Ustanoviti obsah tělesa složeného z těchto čtyrstěnů se prostupujících.

Řešení.

(Zaslal p. *Rudolf Germář*, stud. VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi.)

Pronikem obou čtyrstěnů krychli vepsaných vzniká těleso složené z pravidelného osmistěnu a z osmi pravidelných čtyrstěnů; hrana těchto těles jest $\frac{d}{2}$, značí-li $d = a\sqrt{2}$ úhlopříčku jedné stěny krychle. Jest tedy obsah žádaný

$$O = O_8 + 8O_4$$

a jelikož

$$O_8 = \frac{1}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \sqrt{2} = \frac{a^3}{6},$$

$$O_4 = \frac{1}{12}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \sqrt{2} = \frac{a^3}{24},$$

jest posléze

$$O = \frac{a^3}{2},$$

t. j. mnohostěn daný rovná se obsahem polovici krychle.

Úloha 14.

Komolý kužel rovná se obsahem válci, jehož základna má poloměr r; výška obou těles jest stejná $v = \frac{12}{7} r$. Osový řez kužele má se k osovému řezu válce jako $13 : 14$. V kterém poměru jsou povrchy obou těles?

Řešení.

(Zaslal p. *Ant. Vyhlídal*, stud. VI. tř. g. v Přerově).

Poloměry základen kužele buďtež x, y.

Dle podmínek úlohy jest

$$\frac{1}{3}\pi v (x^2 + xy + y^2) = \pi r^2 v,$$

$$(x + y)\, v : 2rv = 13 : 14,$$

čili ve tvaru jednodušším

$$x^2 + xy + y^2 = 3r^2,$$
$$x + y = \frac{13}{7} r.$$

Z rovnic těchto ustanovíme

$$x = \frac{11}{7} r, \qquad y = \frac{2}{7} r.$$

Jest tedy povrch kužele, jehož strana

$$s = \sqrt{v^2 + (x - y)^2} = \frac{15}{7} r,$$

$$P_1 = \pi \left[x^2 + y^2 + s(x + y)\right] = \frac{320}{49} \pi r^2$$

a povrch válce

$$P_2 = 2\pi r (r + v) = \frac{38}{7} \pi r^2;$$

protož

$$P_1 : P_2 = 160 : 133.$$

Úloha 15.

Pravidelný mnohostěn měj stěny n-úhelné a rohy m-hranné, ω buď úhel dvou sousedních stěn; jest dokázati, že

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{\cos \frac{2R}{m}}{\sqrt{-\cos\left(\frac{2R}{n} + \frac{2R}{m}\right) \cos\left(\frac{2R}{n} - \frac{2R}{m}\right)}}.$$

Řešení.

(Zaslal p. *Alois Greipel*, stud. VII. tř. r. v Prostějově).

Ze sferické trigonometrie známo, že

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{\cos \frac{2R}{m}}{\sin \frac{2R}{m}}.$$

Bude proto

$$\cos\frac{\omega}{2} = \frac{1}{\sin\frac{2R}{n}}\sqrt{\sin^2\frac{2R}{n} - \cos^2\frac{2R}{m}}.$$

Výraz $\sin^2\alpha - \cos^2\beta$ lze přetvořiti takto:

$$\sin^2\alpha - \cos^2\beta = \sin^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) - \cos^2\beta(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$
$$= \sin^2\alpha\sin^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta = -\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

Dle toho jest

$$\sin^2\frac{2R}{n} - \cos^2\frac{2R}{m} = -\cos\left(\frac{2R}{n} + \frac{2R}{m}\right)\cos\left(\frac{2R}{n} - \frac{2R}{m}\right).$$

Dosazením do vzorce

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}}$$

vychází pak vztah svrchu řečený.

Poznámka. Aby výraz ve jmenovateli byl realný, jest nutnou i dostatečnou podmínka

$$\cos\left(\frac{2R}{n} + \frac{2R}{m}\right) < 0$$

čili

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}.$$

Nerovnice tato, majíc pouze 5 řešení čísly celými kladnými, stvrzuje, že existuje toliko 5 pravidelných mnohostěnů vypuklých.

Úloha 16.

V čtyřstěnu *abcd* jest

$$ad = bc = 13,\quad bd = ac = 20,\quad cd = ab = 21.$$

Vypočítati povrch i obsah čtyřstěnu, jakož i poloměr koule vepsané a opsané.

Řešení.

a) (Zaslal p. *Aug. Haas*, stud. VIII. tř. g. v Opavě).

Čtyřstěn daný omezen jest čtyrmi shodnými trojúhelníky; jelikož obsah jednoho z nich $\varDelta = 126$, jest povrch čtyřstěnu

$$P = 4\varDelta = 504.$$

Budiž v výška čtyřstěnu jdoucí vrcholem d kolmo na základnu abc, w výška v trojúhelníku abd spuštěná s d, α odchylka stěny abd od základny abc.

Potom jest

$$w = \frac{2\varDelta}{\overline{ab}} = 12, \quad v = w \sin\alpha.$$

Úhel α určíme ze vzorce

$$\cos\alpha = \frac{\cos cad - \cos bac \,.\, \cos bad}{\sin bac \,.\, \sin bad},$$

ustanovivše ze známých stran

$$\cos cad = \frac{16}{65}, \quad \cos bac = \frac{4}{5}, \quad \cos bad = \frac{5}{13},$$

$$\sin bac = \frac{3}{5}, \quad \sin bad = \frac{12}{13};$$

dosadíme-li tyto hodnoty, vypočteme

$$\cos\alpha = -\frac{1}{9}, \quad \sin\alpha = \frac{4}{9}\sqrt{5}.$$

Bude tedy

$$v = 12 \,.\, \frac{4}{9}\sqrt{5} = \frac{16}{3}\sqrt{5}$$

a obsah čtyřstěnu

$$O = \frac{1}{3}\varDelta v = 224\sqrt{5}.$$

Poloměr ϱ koule vepsané ustanovíme ze vztahu

$$O = \frac{1}{3} P\varrho,$$

tedy

$$\varrho = \frac{4}{3}\sqrt{5}.$$

Poloměr r koule opsané plyne z rovnice

$$r^2 = \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2,$$

z čehož

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{505}.$$

b) Jiné řešení.

Znamenejme strany i úhly trojúhelníka abc obvyklým způsobem. Potom jest

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac},$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Obsah čtyřstěnu jest dle známého vzorce*)

$$O = \frac{1}{6}\,abc\sqrt{\sin\sigma \,.\, \sin(\sigma - \alpha)\sin(\sigma - \beta)\sin(\sigma - \alpha)},$$

kdež

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma.$$

V našem případě jest $\sigma = R$ a tedy

$$O = \frac{1}{6}\,abc\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}\,;$$

dosazením hodnot obdržíme týž výsledek jako dříve.

Poloměr koule opsané lze ustanoviti též takto: Daný čtyřstěn lze rozložiti ve 4 shodné jehlany, jichž společným vrcholem jest střed koule opsané.

---

*) Viz ku př.: *Strnad,* Geometrie pro vyšší školy realné, str. 249.

Jelikož bod ten má od všech stěn čtyřstěnu (základen jehlanů) stejnou vzdálenost, jest zároveň středem koule čtyřstěnu vepsané.

Je-li tedy r' poloměr kružnice opsané trojúhelníku abc, jest

$$r^2 = \varrho^2 + r'^2;$$

kdež

$$r' = \frac{abc}{4\triangle}.$$

Správné řešení úloh zaslali pp.:

Ladislav Baimler, stud. VII. tř. č. r. v Praze, úl. 2.
Václ. Bubeník, stud. VII. tř. č. r. v Praze, úl. 2., 3., 7., 8.
Robert Burian, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 2., 3., 5., 8.
Rudolf Germář, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi úl. 2., 3., 5., 8., 13.
Alois Greipel, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 2. až 5., 8., 9., 13., 15.
Josef Hájíček, učitel v Grygově u Olomouce úl. 1. až 16.
Aug. Haas, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 16.
František Hýbl, stud. VIII. tř. g. v Olomouce, úl. 1. až 5., 7. až 9., 11., 13.
Josef Kincl, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1. až 5., 7., 9., 13.
Hugo Kröhn, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1. až 5., 7. až 11., 13. až 16.
Jan Kroupa, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 5., 9.
Petr Krupař, stud. VII. tř. g. v Jičíně, úl. 7., 9.
Tobiáš Kudela, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 5., 13.
Josef Langr, stud. VII. tř. r. v Král. Hradci, úl. 1. až 16.
Karel Laštovka, stud. VII. tř. g. v Táboře, úl. 3., 9.
Vladimír List, stud. VII. tř. akad. g. v Praze, úl. 1. až 4., 7. až 9.
Josef Materna, stud. VIII. tř. g. ve Spálené ul. v Praze, úl. 1. až 3., 5., 7. až 9.
Josef Matoušek, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 1. až 5., 7.
Stanislav Mikyska, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 1. až 3., 7. až 9.
Frant. Miláček, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 1. až 3., 5., 7., 9., 13., 14.
Adolf Ottis, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 2.

Otakar Podhajský, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze, úl. 1. až 4., 8.
Václav Posejpal, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 3.
Josef Půček, stud. VI. tř. g. v Olomouci, úl. 2., 13.
Antonín Sedláček, stud. VII. tř. g. v Klatovech, úl. 1. až 3., 7.
Vinc. Šura, stud. VII. tř. r. v Král. Hradci, úl. 1. až 5., 7. až 11., 13., 14.
Slč. *Marie Šmelíkova*, chov. II. roč. učit. ústavu v Olomouci, úl. 1., 2.
Vladimír Vlček, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 1. až 3., 5., 7. až 9.
Václav Vraný, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 1. až 3., 5. až 9.
Antonín Vyhlídal, stud. VI. tř. g. v Přerově, úl. 1. až 14.
Josef Znojemský, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 1. až 3., 5.
Nepodepsaný z Olomouce, úl. 1. až 5., 7., 9., 13.

Úloha 42.

Dokázati, že čtverec součtu n čtverců možná na n způsobů vyjádřiti součtem n čtverců. Prof. Dr. *F. J. Studnička.*

Úloha 43.

Dokázati, že

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2+c_k^2+d_k^2)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2.$$

Na př.

$$(1^2+2^2+3^2)(2^2+3^2+4^2)(3^2+4^2+5^2)(4^2+5^2+6^2)$$
$$=82^2+82^2+164^2+1234^2.$$

Týž.

Úloha 44.

Dokázati, že

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^n=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2.$$

Na př.

$$(1^2+2^2+3^2+4^2)^5=1112^2+1668^2+2224^2+3916^2.$$

Týž.

Úloha 45.

V pravoúhlé soustavě znázorniti komplexní kořeny rovnice

$$\frac{x^8+1}{2ax^2}=x^4-ax^2+1,$$

je-li

$$a=\cos\alpha+\sin\alpha.$$

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 46.

Ustanoviti celistvé hodnoty y a z tak, aby výrazy

$$\mathrm{A}=2x^2+x+y,\quad \mathrm{B}=2x^2-7x+z$$

měly společného činitele lineárného dle x. *Týž.*

Úloha 47.

Řešiti soustavu rovnic

$$x\sin\alpha+y\sin2\alpha=\sin3\alpha$$
$$x\sin\beta+y\sin2\beta=\sin3\beta$$

a kořeny uvésti na podobu co nejjednodušší. *Týž.*

Úloha 48.

Do dané kružnice vepsati trojúhelník, aby průsečík v jeho výšek byl vzdálen od jedné strany o v_1 a od protějšího vrcholu o v_2.

Prof. *Vavř. Jelínek.*

Úloha 49.

Kolem čtyřúhelníka, jehož úhlopříčny m a n společným svým průsečíkem jsou rozděleny na m_1 a m_2, vztažně na n_1 a n_2, lze opsati kružnici, je-li

$$\sqrt{\frac{m_1n_1}{m_2n_2}}=\frac{m_1+n_1}{m_2+n_2}.$$

Týž.

Úloha 50.

Sestrojiti mezikruží o šířce a a o ploše daného mezikruží.

Prof. *V. Jelínek.*

Úloha 51.

Poměrem dvou úseček vyjádřiti poměr povrchů a poměr krychelných obsahů dvou koulí, jejichž poloměry se mají k sobě jako úsečky $m : n$. *Týž.*

Úloha 52.

Stanoviti kosý úhel pravoúhlého trojúhelníka, jehož strany tvoří geometrickou řadu, a sestrojiti takový trojúhelník, je-li dána jeho přepona. *Týž.*

Úloha 53.

Je-li a délka ramene, b půdice, α úhel při půdici rovnoramenného trojúhelníka, jest dokázati vztah

$$2a = b\left(1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 54.

Příčky dělící úhel při temeni rovnoramenného trojúhelníka na 3 stejné díly dělí půdici jeho v části $m = n = 37$, $p = 33$. Vypočítati onen úhel i délku ramene. *Týž.*

Úloha 55.

Kratší strana kosodélníka jest a, delší úhlopříčka $2a$, úhel úhlopříček 75^0. Vypočítati jeho obsah. *Týž.*

Úloha 56.

Vypočítati úhly sférického trojúhelníka, který ku svým trojúhelníkům vedlejším jest v poměru

$$\triangle : \triangle_1 : \triangle_2 : \triangle_3 = 6 : 7 : 8 : 9.$$

Týž.