Antonín Pleskot

Geometrické odvození vzorců pro součet goniometrických funkcí

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 3, 183--186

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109321

Geometrické odvození vzorců pro součet goniometrických funkcí.

Napsal

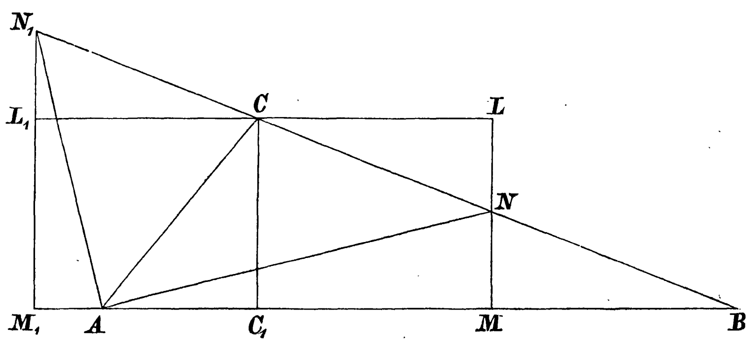
Dr. Ant. Pleskot,

s. professor v Praze.

Vzorce pro $\sin \alpha \pm \sin \beta$ a $\cos \alpha \pm \cos \beta$ vyvozují se obyčejně použitím známých relací $\sin(\alpha \pm \beta)$ a $\cos(\alpha \pm \beta)$.

Snadným spůsobem mohou se tyto relace, pokud jest $\alpha + \beta < 180^0$, odůvodniti následující geometrickou úvahou.

Budiž dán trojúhelník ABC. Strana $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Úhly tohoto trojúhelníka označme α, β, γ.



Od bodu C nanesme na přímku CB v obou směrech délku b, takže $CN = N_1C = b$. S bodů N a N_1 spusťme kolmice na stranu AB. Paty těchto kolmic označme M a M_1.

Jak z obrazce patrno vzniknou nám touto konstrukcí dva rovnoramenné trojúhelníky $\triangle ACN$ a $\triangle ACN_1$.

Snadno poznáme, že

$$\sphericalangle CAN = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ a } \sphericalangle NAM = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sphericalangle ACN_1 = \alpha + \beta \text{ a } \sphericalangle AN_1M_1 = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Spusťme dále s bodu C kolmici na základnu AB a patu této kolmice označme C_1; konečně bodem C veďme rovnoběžku s AB, která protne přímky M_1N_1 a MN v bodech L_1 a L.

Z obrazce jsou zřejmy následující relace:

$$M_1N_1 = C_1C + L_1N_1,$$

$$CC_1 = AC \sin\alpha = b \sin\alpha, \quad L_1N_1 = CN_1 \sin\beta = b \sin\beta,$$

tudíž:

$$M_1N_1 = b(\sin\alpha + \sin\beta). \tag{1$^\alpha$}$$

Délku M_1N_1 můžeme též určiti z trojúhelníka AN_1M_1

$$M_1N_1 = AN_1 \cos AN_1M_1 = AN_1 \cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

avšak v rovnoramenném trojúhelníku ACN_1 jest

$$AN_1 = 2AC \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 2b \sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

tudíž

$$M_1N_1 = 2b \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{1$^\beta$}$$

Srovnáme-li rovnice (1^α) a (1^β), nabudeme následující identity, platící pro jakékoliv α a β.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{1}$$

Z obrazce dále patrno:

$$M_1A = L_1C - AC_1$$

$$L_1C = CN_1 \cos\beta = b\cos\beta \quad AC_1 = AC\cos\alpha = b\cos\alpha$$

a proto

$$M_1A = b(\cos\beta - \cos\alpha) \tag{2$^\alpha$}$$

Avšak v trojúhelníku AN_1M_1 jest

$$M_1A = AN_1 \sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

v rovnoramenném trojúhelníku ACN_1 jest

$$AN_1 = 2b \sin \frac{\alpha + \beta}{2},$$

a proto

$$M_1A = 2b \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \qquad (2^\beta)$$

Srovnáme-li (2^α) a (2^β) nabudeme

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \qquad (2)$$

Docela stejným způsobem určíme ostatní dva vzorce, když v předešlých úvahách místo M_1 a N_1 píšeme M a N.

$$MN = C_1C - NL;$$

$$C_1C = b \sin \alpha, \quad NL = b \sin \beta,$$

tudíž

$$MN = b(\sin \alpha - \sin \beta); \qquad (3^\alpha)$$

avšak

$$MN = AN \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2b \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \qquad (3^\beta)$$

neboť v rovnoramenném trojúhelníku ANC jest

$$AN = 2AC \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 2b \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Srovnáme-li relaci (3^α) a (3^β), obdržíme:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \qquad (3)$$

Konečně jest

$$AM = AC_1 + CL,$$

$$AC_1 = b \cos \alpha, \quad CL = b \cos \beta;$$

a proto

$$AM = b(\cos \alpha + \cos \beta). \qquad (4^\alpha)$$

Avšak

$$AM = AN \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4^\beta)$$

Z rovnic (4^α) a (4^β), plyne:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Snadno můžeme z předloženého výkresu i známou větu tangentovou odůvodniti.

$$\triangle BMN \sim \triangle BM_1N_1,$$

z čehož plyne:

$$BN_1 : BN = M_1N_1 : MN;$$

$$BN_1 = a + b \quad BN = a - b.$$

Z relace (1^β) a (3^β) dosaďme hodnoty za M_1N_1 a MN do předcházející srovnalosti, čímž nabudeme

$$(a+b) : (a-b) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

čili

$$(a+b) : (a-b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Sestrojení strany pravidelného desítiúhelníka do kružnice vepsaného.

Žákům středních škol podává

V. Jeřábek,

c. k. professor v Brně.

Řešení: Budiž dána kružnice středu o a poloměru $\overline{oa} = r$. Sestrojme $\widehat{ab} = 120^0$, $\widehat{ac} = 30^0$; potom ze středu b poloměrem $\overline{bc} = r\sqrt{2}$ narýsovaná kružnice protne poloměr oa v bodu x a jeho prodloužení v bodu x'. Prosté hodnoty úseček $\overline{ox} = x$,