Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 2, 141--144

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109317

Důvod: $(5 \,.\, 10 + a)^2 = 2500 + 100a + a^2$
$= (25 + a) \,.\, 100 + a^2.$

Ježto stem se násobí, když k číslu dvě nully připíšeme, můžeme na místě těchto null psáti hned čtverec jednotek; není-li tento čtverec dvouciferný, vyplní se druhé místo nullou.

Na př. $53^2 = (25 + 3) \,.\, 100 + 9 = 2809.$

Úlohy.

Úloha 22.

Rozdíl čtverců kterýchkoli dvou čísel trojúhelníkových 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ... rovná se součtu trojmocí vycházejících z rozdílů jednotlivých po sobě jdoucích mezičlenů, na př. $36^2 - 10^2 = 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3$. Podati obecný důkaz.

Prof. *Fr. Hromádko.*

Úloha 23.

Kterak lze ku každému celému číslu rychle udati dvě jiná čísla tak, aby čtverec jednoho z nich rovnal se součtu čtverců obou ostatních?

Týž.

Úloha 24.

Řešiti soustavu rovnic

$$\sqrt{\frac{x+y}{2a}} - \sqrt{\frac{x-y}{2b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{x+y}{2b}} + \sqrt{\frac{x-y}{2b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}$$

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 25.

Řešiti soustavu rovnic

$$x\,(2x^2 + 3) + y\,(2y^2 + 3) = 287$$
$$x\,(3x^2 - 2) + y\,(3y^2 - 2) = 385.$$

Týž.

Úloha 26.

Které úhly v mezích od 0 do 360° vyhovují rovnici

$$\sin x + 2 \sin 2x + \sin 3x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}.$$

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Úloha 27.

V trojúhelníku ABC jsou spuštěny s vrcholů A, B na protilehlé půdice výšky AD, BE. Dokázati jest, že trojúhelník ABC jest rovnoramenný, je-li

$$AE \,.\, EC = BD \,.\, DC.$$

Prof. *V. Jeřábek.*

Úloha 28.

V trojúhelníku pravoúhlém buďtež dány na přeponě AB body M, N, které jsou souměrně sdruženy dle středu přepony

$$(AM = BN = m, \; AN = BM = n).$$

Tvoří-li příčky CM a CN s odvěsnou úhly φ_1 a φ_2 jest

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \,.\, \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{n^2}{b^2}.$$

Týž.

Úloha 29.

Do trojúhelníka *abc* vypsán jest lichoběžník *mnpq*, jehož půdice *np*, *mq* jsou rovnoběžny s těžnicí *cc'*, a jehož vrcholy *m*, *n* leží v půdici *ab* tohoto trojúhelníka. Průsečíkem *u* úhlopříček *mp*, *nq* vedená rovnoběžka s těžnicí *cc'* protíná půdici *ab* v bodu *v*. Je-li $\overline{mn} = \frac{ab}{2}$, jest dokázati, že

$$am = mv, \quad bn = nv.$$

Týž.

Úloha 30.

V trojúhelníku *abc* buďtež dány ve straně *ab* dva isotomické body a_1, b_1 ($ab_1 = a_1 b = b'$, $aa_1 = b_1 b = a'$). Znamenáme-li strany a úhly trojúhelníka *abc* obvyklým spůsobem, a je-li $ca_1 = a_1$, $cb_1 = b_1$, $\sphericalangle a_1 c b_1 = \gamma_1$, dokažte, že

$$a_1^2 + b_1^2 = a'^2 + b'^2 + a^2 + b^2 - c^2,$$
$$a_1 b_1 \cos \gamma_1 = a'b' + ab \cos \gamma.$$

Týž.

Úloha 31.

Jsou-li a, b, c strany trojúhelníka, γ úhel stranami a, b sevřený, v výška slušící ku straně c a m, n úseky, ve které výška ta stranu c rozděluje, jest

$$v^2 = mn + ab \cos \gamma,$$
$$a^2 = mc + ab \cos \gamma, \quad b^2 = nc + ab \cos \gamma.$$

Dokázati tyto relace. Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Úloha 32.

Otáčeje se kolem svých stran a, b, c vytvořuje trojúhelník tři tělesa, jichž obsah jest po řadě

$$A = 3142\, cm^3,\ B = 2356\, cm^3,\ C = 1885\, cm^3.$$

Vypočítati délky stran a, b, c.

Prof. A. Strnad.

Úloha 33.

V jaké vzdálenosti působí na sebe dva hmotné body o hmotě 1 kg, působí-li na sebe silou, která se rovná váze 1 kg? (Hmota země $M = 6{\cdot}03 \times 10^{27}\, g$, poloměr země $r = 6{\cdot}37 \times 10^8\, cm$, urychlení $g = 981\, cm$ za 1 sekundu).

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Úloha 34.

Jak velkou jednotku času musili bychom voliti, aby konstanta gravitační rovnala se 1, volíme-li za jednotku hmoty 1 g a za jednotku délky 1 cm? *Týž.*

Úloha 35.

V nádobě nacházejí se dvě kapaliny; těžší o specifické váze s_1 a lehčí o specifické váze s_2. Jak velká musí býti specifická váha s koule, aby do polovice poloměru byla ponořena v těžší kapalině a ostatní část v kapalině druhé? *Týž.*

Úloha 36.

V rovnici $x^2 - mx + (m - a)^2 = 0$ určiti m tak, aby součet zdvojmocněných kořenů $x_1^2 + x_2^2$ byl maximum.

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 37.

Určiti rovnice tečen společných kružnici $x^2 + y^2 = 16$ a ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$. Stanoviti obsah rovnoběžníka jimi omezeného.

Prof. dr. *A. Pleskot.*

Úloha 38.

Body $m(7, 6)$, $n(11, -2)$ stanoviti jest kružnici, která v pravém úhlu seče kružnici $x^2 + y^2 = 25$.

Prof. *A. Strnad*

Úloha 39.

Je-lí v trojúhelníku ABC půdice a pevna, jest geom. místem protilehlého vrcholu A ellipsa, platí-li podmínka

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma.$$

Prof. *V. Jeřábek.*

Úloha 40.

V pravoúhlé soustavě souřadnic $(X \perp Y)$ jsou vedeny bodem m dvě přímky $P \perp P_1$. Přímka P protíná osy X a Y v bodech a, b a přímka P_1 v bodech a_1, b_1. Spojnice ab_1, a_1b protínají se v bodu n. Hledejte geometrická místa bodů m, n, je-li $ab = a_1b_1 = c$, kdež c značí veličinu stálou.

Týž.

Úloha 41.

Kterákoliv tečna seče vrcholové tečny s malou osou ellipsy rovnoběžné v bodech a, b. Dokázati jest analyticky, že kruh, mající ab za průměr, prochází ohnisky.

Prof. *Ant Kvítek.*