Matyáš Lerch

Krátký důkaz Borchardtovy věty determinantní

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 2, 76--78

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109316`

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} i,$$
$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} i,$$

což se i potvrzuje spůsobem řešení obyčejným.

Ještě jednodušší illustraci poskytuje tu řešení rovnice

$$x^2 \pm 1 = 0.$$

Zároveň při tom poznáváme, jak odpovídá znázornění čísel soujemných body kružnicovými obdobné znázornění čísel kvaternionových body plochy kulové.

Krátký důkaz Borchardtovy věty determinantní.

Napsal

M. Lerch,

docent v Praze.

Pro Borchardtův vztah $D = \Delta T$ podali důkazy pp. Cayley*) a Řehořovský**); oba spočívají na vzorci t. zv. interpolačním, dosti složitém. Následující důkaz má za účel nahraditi zdlouhavé výpočty jednoduchou úvahou a tím začátečníku usnadniti studium této partie algebry.

Znamenejme

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1 - x_1}, & \frac{1}{t_2 - x_1}, \ldots & \frac{1}{t_n - x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{t_1 - x_n}, & \frac{1}{t_2 - x_n}, \ldots & \frac{1}{t_n - x_n} \end{vmatrix},$$

---

*) Faà de Bruno, Théorie des formes binaires, p. 39.

**) Časopis, XI. ročník, str. 111; Základové vyšší algebry, str. 92.

$$\mathrm{D}_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{(t_1 - x_1)^2}, & \frac{1}{(t_2 - x_1)^2}, & \cdots & \frac{1}{(t_n - x_1)^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{(t_1 - x_n)^2}, & \frac{1}{(t_2 - x_n)^2}, & \cdots & \frac{1}{(t_n - x_n)^2} \end{vmatrix},$$

a položme

$$\mathrm{T}_n = \sum_{(i)} \frac{1}{(t_1 - x_{i_1})(t_2 - x_{i_2}) \dots (t_n - x_{i_n})},$$

kde součet se vztahuje ke všem přestavám $i_1 i_2 \dots i_n$ čísel $1, 2, \dots n$.

Symboly Δ_{n-1}, D_{n-1}, T_{n-1} nechť značí podobné veličiny utvořené na základě liter $t_2, t_3, \dots, t_n$; $x_2, x_3, \dots, x_n$. Budeme předpokládati, že platí vztah $\mathrm{D}_{n-1} = \Delta_{n-1}\mathrm{T}_{n-1}$ a odvodíme z něho vztah $\mathrm{D}_n = \Delta_n \mathrm{T}_n$; poněvadž věta platí pro $n = 1, 2$, bude platnou též pro $n = 3, 4, \dots$ a bude tak dokázána obecně.

Determinanty D_n, Δ_n jsou racionalné funkce ryze lomené proměnné t_1; jmenovatel prvé funkce jest

$$(t_1 - x_1)^2 (t_1 - x_2)^2 \dots (t_1 - x_n)^2,$$

jmenovatel Δ_n pak zní

$$(t_1 - x_1)(t_1 - x_2) \dots (t_1 - x_n).$$

Čitatel funkce D_n je pak dělitelný čitatelem funkce Δ_n, poněvadž Δ_n zmizí jenom na místech $t_1 = t_2, t_3, \dots t_n$, a na těchto zmizí také D_n.

Podíl $\frac{\mathrm{D}_n}{\Delta_n}$ bude tedy racionalnou funkcí t_1 o jmenovateli $(t_1 - x_1)(t_1 - x_2) \dots (t_1 - x_n)$; funkce ta je ryze lomená, poněvadž zmizí pro $t_1 = \infty$.

Z napsaných determinantů máme rozvinutím dle prvků v prvním sloupci

$$\mathrm{D}_n = \frac{\mathrm{D}_{n-1}}{(t_1 - x_1)^2} + \varepsilon, \quad \Delta_n = \frac{\Delta_{n-1}}{t_1 - x_1} + \varepsilon',$$

při čemž ε, ε' jsou racionalné funkce t_1, konečné pro $t_1 = x_1$.

Odtud plyne

$$(\alpha) \qquad \frac{D_n}{\Delta_n} = \frac{D_{n-1}}{\Delta_{n-1}} \cdot \frac{1}{t_1 - x_1} + \varepsilon'',$$

kde ε'' je rovněž konečné pro $t_1 = x_1$.

Dále jest

$$T_n = \frac{1}{t_1 - x_1} \sum_{(i')} \frac{1}{(t_2 - x_{i'_1})(t_3 - x_{i'_2}) \dots (t_n - x_{i'_n})} + \varepsilon''',$$

kde ε''' je konečné pro $t_1 = x_1$ a součet se vztahuje ke všem permutacím $i'_2 i'_3 \dots . i'_n$ čísel $2, 3, \dots, n$; součet ten je tedy dle definice právě výraz T_{n-1}; máme tudíž

$$(\beta) \qquad T_n = T_{n-1} \frac{1}{t_1 - x_1} + \varepsilon''';$$

ježto předpokládáme $T_{n-1} = \frac{D_{n-1}}{\Delta_{n-1}}$, plyne z rovnic ($\alpha$) a ($\beta$)

$$\frac{D_n}{\Delta_n} - T_n = \varepsilon'' - \varepsilon'''.$$

Tím dokázáno, že racionalná ryze lomená fnnkce proměnné t_1

$$\frac{D_n}{\Delta_n} - T_n = \psi(t_1)$$

je konečná na místě $t_1 = x_1$. Funkce ta se však nemění při jakékoli záměně liter $x_1, x_2, \dots x_n$ a tedy funkce ta je konečnou na místech $x_1, x_2, \dots x_n$. Ježto $\psi(t_1)$ nemůže na jiných místech státi se nekonečnou, an jmenovatel její jest právě $(t_1 - x_1) \dots (t_1 - x_n)$, plyne z toho, že funkce $\psi(t_1)$ je celistvou; jsouc ale zároveň ryze lomenou, musí býti rovna nulle.

Máme tedy $\frac{D_n}{\Delta_n} - T_n = 0$ čili $D_n = \Delta_n T_n$, jakmile $D_{n-1} = \Delta_{n-1} T_{n-1}$; tato poslední rovnice je však splněna pro $n = 2$, a tedy věta dokázána.