diče elektriky zavěšených, a toto pozorování bylo východištěm novému odboru nauky o elektřině, totiž *galvaničnosti.*

(Pokračování.)

O lichoběžníku opsaném kružnici.

Pojednává

Vavřinec Jelínek,

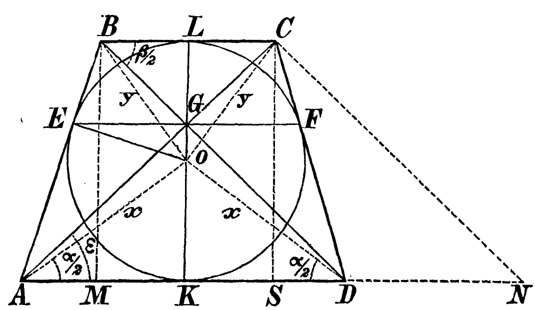
professor v Novém Městě u Vídně.

V učebných knihách geometrie setkáváme se jen s nemnohými vlastnostmi čtyrúhelníka o kružnici opsaného. Často přestává se na větě, že součet dvou protějších stran rovná se součtu druhých dvou stran. Příčinou-li skrovného tohoto povšimnutí snad, že nemá čtyrúhelník ten do sebe dosti zajímavosti, seznáme, přihlédneme-li na tomto místě alespoň k lichoběžníku opsanému kružnici.

I. 1. Dle věty o čtyrúhelníku opsaném kružnici platí pro *rovnoramenný lichoběžník*, jehož půdice slují a a b a ramena $c_1 = c_2 = c$, že

$$c = \frac{1}{2}(a + b);$$

jest tedy jeho *rameno arithmetickou úměrnou půdic,* čili rovno přímce, půlící ramena, střední příčce lichoběžníka.



Obr. 1.

Spojíme-li mezní body A a B ramene AB $= c$ lichoběžníka tohoto ABCD (obr. 1.) přímkami AO a BO se středem O vepsané kružnice, budou úhly α a β, sevřené tímto ramenem a půdicemi AD $= a$ a BC $= b$ rozpůleny, a poněvadž $\alpha + \beta = 180^\circ$, stojí AO $\perp$ BO. V pravoúhlém trojúhelníku ABO jest OE $= r$ výškou na přeponu c, i jest tedy

$$r = \sqrt{\mathrm{AE}\,.\,\mathrm{BE}} = \sqrt{\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

Jest tudíž *průměr* $2r = d = \sqrt{ab}$ *měřicky úměrnou obou půdic.*

2. Tětiva $t =$ EF, spojující dotýčné body ramen, stojí kolmo na průměru KL, spojujícím dotýčné body půdic a jest jím rozpůlena v bodě G.

Z trojúhelníků OEG $\sim$ ABM vychází úměra

$$\mathrm{EG} : \mathrm{EO} = \mathrm{BM} : \mathrm{AB}$$

čili

$$\frac{t}{2} : \frac{d}{2} = d : c,$$

tedy $d = \sqrt{ct}$. *Průměr* jest také *měřicky úměrnou mezi ramenem a tětivou.* Z úměry té také následuje, že

$$t = \frac{d^2}{c},$$

a vyjádříme-li tu d a c rovnoběžkami a a b, nabudeme

$$t = \frac{2ab}{a + b}.$$

Jest tedy *tětiva tato harmonicky úměrnou mezi oběma půdicemi.*

3. Úhlopříčny $u =$ AC $=$ BD jsou si rovny, a sice, jak vychází z trojúhelníka BDM, jest

$$u = \sqrt{d^2 + c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4ab + (a + b)^2}.$$

Přímka, vedená průsečíkem G_1*) úhlopříčen rovnoběžně

*) Body E_1, F_1, G_1 mysleme si prozatím na blízku bodů E, F, G.

s půdicemi, jest průsečíkem tím rozpůlena. Polovice G_1F_1 její délky nabýti lze z trojúhelníků $G_1F_1D \sim BCD$ dle úměry

$$G_1F_1 : BC = DG_1 : BD$$

čili

$$G_1F_1 : b = a : (a + b),$$

tudíž

$$G_1F_1 = \frac{ab}{a+b}.$$

Jest tedy *rovnoběžka tato totožná s předešlou tětivou t.*

4. Plocha p lichoběžníka jest

$$p = 2cr = \frac{1}{2}(a+b)\sqrt{ab}.$$

Spojnice $AO = x$ pak $BO = y$ najdeme z příslušných pravoúhlých trojúhelníkův AOK a BOL:

$$x^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{ab}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a(a+b)}{4},$$

$$x = \sqrt{\frac{ac}{2}}, \text{ podobně } y = \sqrt{\frac{bc}{2}}.$$

Následuje tedy, že

$$x : y = \sqrt{a} : \sqrt{b}.$$

Součin těchto spojnic jest

$$xy = \frac{1}{2}c\sqrt{ab} = \frac{1}{4}(a+b)\sqrt{ab}.$$

Jest tudíž plocha lichoběžníka rovnoramenného také dána těmito přímkami, a to

$$p = 2xy.$$

5. Úhel α, přilehlý k půdici a, najdeme z trojúhelníka ABO, kde jest

$$r = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad r = \frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2}\cot\frac{\alpha}{2},$$

tudíž

$$a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = b \cot \frac{\alpha}{2}$$

a

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

neb z trojúhelníka ABM

$$\sin \alpha = \frac{2r}{c} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \text{ a také } \cos \alpha = \frac{a-b}{a+b}.$$

Vedeme-li z vrcholu C přímku CN rovnoběžně s úhlopříčnou BD, až protne prodlouženou půdici AD v bodě N, povstane rovnoramenný trojúhelník o rameně u a půdici $a+b$. Výška jeho CS půlí tedy úhel ACN, rovný úhlu δ mezi úhlopříčnami. Z trojúhelníka toho vyplývá, že

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{CS}} = \frac{c}{2r} = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

Úhel δ mezi úhlopříčnami závisí tedy na úhlu α mezi delší půdicí a ramenem dle rovnice

$$\sin \alpha \,.\, \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = 1.$$

Porovnáme-li ještě úhel α s úhlem ε, který svírá úhlopříčna s půdicí a, najdeme, ježto z trojúhelníka ACS vychází

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2r}{c} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}, \text{ že } \sin \alpha = \operatorname{tg} \varepsilon.$$

6. Kolem každého rovnoramenného lichoběžníka lze opsati kružnici, jejímž poloměrem budiž R. Dle známé poučky obdržíme plochu p tohoto lichoběžníka jakožto součet ploch trojúhelníkův, na kteréž lichoběžník úhlopříčnou se rozděluje, takto:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{acu}{4\mathrm{R}} + \frac{bcu}{4\mathrm{R}} = \frac{uc(a+b)}{4\mathrm{R}},$$

tedy

$$R = \frac{uc\,(a+b)}{4p}.$$

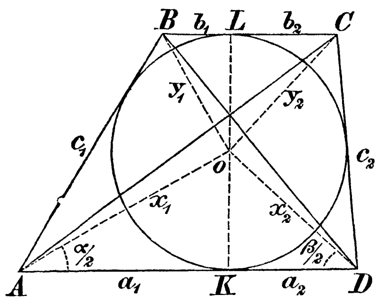
Dosadíme-li tuto $a+b=2c$, pak $p=2cr$, najdeme, že

$$R = \frac{2uc^2}{8\,cr} = \frac{uc}{4r};$$

jest tedy *mezi oběma poloměry vztah*

$$4\,Rr = uc.$$

II. 1. Půdice *různoramenného lichoběžníka* opsaného kružnici o poloměru r buďtež zase a a b, ramena c_1 a c_2; úhel



Obr. 2.

mezi a a c_1 sluj α, mezi a a c_2 buď β (obr. 2.). Úhly, přilehlé k druhé půdici, jsou tedy

$$\alpha_1 = 180^0 - \alpha,\quad \beta_1 = 180^0 - \beta.$$

Spojíme-li zase střed O vepsané kružnice s vrcholy lichoběžníka, bude trojúhelník, jehož stranou jest některé rameno (na př. c_1), pravoúhlý, ježto

$$\sphericalangle\,ABO = \frac{\alpha_1}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}.$$

Spojíme-li průměrem body K a L, v nichžto se dotýká kružnice půdic a jimiž tyto jsou rozděleny

$$a = a_1 + a_2,\quad b = b_1 + b_2,$$

obdržíme na každé straně průměru toho tři vzájemně podobné trojúhelníky. Vychází pak

z $\triangle$ AOK $\sim$ BOL, že $a_1 : r = r : b_1$,
z $\triangle$ DOK $\sim$ COL, že $a_2 : r = r : b_2$.

Tedy

$$a_1 a_2 = b_1 b_2 = r^2,$$

t. j. *součin úseků půdic na jedné straně průměru se rovná součinu úseků těchže půdic na druhé straně průměru a jest* pro všechny lichoběžníky opsané téže kružnici *stále roven* r^2.

2. Poznamenáme-li pro přehled přímky, spojující krajní body půdice a se středem O písmeny x_1, x_2 a pak y_1, y_2, pokud se týče půdice b, najdeme

z $\triangle$ AOK $\sim$ BOL, že $a_1 : x_1 = r : y_1$,
z $\triangle$ AOK $\sim$ AOB, že $r : x_1 = y_1 : c_1$.

Tedy

$$a_1 : x_1^2 = 1 : c_1,$$

tak že $x_1^2 = a_1 c_1$ a podobně $x_2^2 = a_2 c_2$ atd., t. j. *vzdálenost středu kružnice od některého vrcholu lichoběžníka jest měřicky úměrnou mezi ramenem a přilehlým k ní úsekem půdice.*

Z pravoúhlého trojúhelníka

ABO obdržíme $r^2 = \dfrac{x_1^2 y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}$,

COD „ $r^2 = \dfrac{x_2^2 y_2^2}{x_2^2 + y_2^2}$,

tedy

$$\frac{x_1^2 y_1^2}{x_1^2 + y_1^2} = \frac{x_2^2 y_2^2}{x_2^2 + y_2^2} = r^2$$

aneb

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{y_1^2} = \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{y_2^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Jest tedy *součet převratných dvojmocí vzdáleností středu kružnice od vrcholů lichoběžníka na téže straně průměru* pro všechny lichoběžníky opsané téže kružnici *stálý.*

3. Plochy středových trojúhelníků nad stranami lichoběžníka jsou:

$$p_1 = \frac{ar}{2},\quad p_2 = \frac{br}{2},\ \text{tedy}\ p_1 + p_2 = \frac{a+b}{2}.r = \frac{c_1+c_2}{2}.r,$$

pak

$$p_3 = \frac{c_1 r}{2},\quad p_4 = \frac{c_2 r}{2},$$

tedy

$$p_3 + p_4 = \frac{c_1+c_2}{2}.r = \frac{1}{2}(x_1y_1 + x_2y_2),$$

tudíž celá *plocha lichoběžníka*

$$p = x_1y_1 + x_2y_2.$$

4. Ježto lichoběžník opsaný kružnici již dvěma podmínkám musí vyhovovati, postačí, aby byl určen, udati ještě toliko tři jeho prvky, z nichžto alespoň jeden by byl délkou. Rozřešíme v těchto řádkách některé čelnější případy.

a) Dána jest půdice a *a přilehlé k ní úhly* α a β.

Dle obr. 2. obdržíme

$$a_1 = r\cot\frac{\alpha}{2},\quad a_2 = r\cot\frac{\beta}{2},$$

tedy

$$a = a_1 + a_2 = r\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right) = \frac{r\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}};$$

tudíž

$$r = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Druhou půdici b pak obdržíme z poloměru r

$$b = r\left(\cot\frac{\alpha_1}{2} + \cot\frac{\beta_1}{2}\right) = r\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) = \frac{r\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Dosadíme-li zde hodnotu pro r, nabudeme

$$b = a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Z rovnic mezi různoběžkami a poloměrem:

$$2r = c_1 \sin\alpha \text{ a } 2r = c_2 \sin\beta$$

vychází, že

$$c_1 : c_2 = \sin\beta : \sin\alpha.$$

Dáme-li do některé této rovnice hodnotu pro r, najdeme

$$c_1 = \frac{2r}{\sin\alpha} = \frac{a \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

a podobně

$$c_2 = \frac{a \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Plocha $p = (a + b)r$ jest dle horních hodnot

$$p = a\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

$$p = a^2\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

konečně

$$p = a^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

čili přehledně

$$p = ab\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

b) Dán jest poloměr r a *úhly α* a *β*.

Použijeme-li horních vzorců, najdeme:

$$c_1 = \frac{2r}{\sin\alpha}, \quad c_2 = \frac{2r}{\sin\beta};$$

$$a = \frac{r\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}, \quad b = \frac{r\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}};$$

$$p = \frac{r^2\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$= 4r^2\,\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

(Dokončení.)

O mocnění některých čísel.

Pro žáky středních škol napsal

Fr. Hromádko,

professor v Praze.

V jednom ročníku tohoto Časopisu podáno a odůvodněno jest pravidlo, kterak lze rychle zdvojmocňovati čísla celistvá, zvláště dvouciferná, mající na místě jednotek číslici 5. Pravidlo toto zní: Násob první číslici (desítky) daného čísla číslem o 1 větším a připiš k součinu tomu v pravo 25 na př.:

$$75^2 = (7 \times 8) \,.\, 100 + 25 = 5625.$$

Výhodné toto pravidlo doplňuji jiným pobočným případem, když totiž *číslo počíná pětkou*, kterak je rychle můžeme povýšiti na mocnost druhou.

Pravidlo: Povyš 5^2 a přičti ku 25 číslici na druhém místě stojící (jednotky); k součtu tomu připiš čtverec jednotek. Na př. 57^2 čtěme: $25 + 7 = 32$, $7^2 = 49$ a pišme hned souvisle $57^2 = 3249$.