Jan Krejčí

Úvod do mathematické krystallografie. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 2, 68--80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109310

Úvod do mathematické krystallografie.

Pro začátečníky vykládá

prof. dr. Jan Krejčí.

Úloha mathematické krystallografie záleží v ustanovování polohy ploch krystallových k danému prvotvaru. Aby se tato úloha jednodušše rozřešila, vyvolí se na daném krystallu šest ploch podvojně spolu rovnoběžných, kteréž na tom krystallu buď skutečně jsou, nebo do něho se vnesou, a z těch šesti ploch sestrojí se šestistěn čili hexaid, jenž slove prvotvar.

Takových prvotvarů jest sedmero: krychlový, stejnoklonný, čtverečný, pravoúhlý, jedno-, dvou- a trojklonný prvotvar.

Prvotvarem ustanovuje se *soustava krystallová.*

Tvary z prvotvaru odvozené jsou obmezeny plochami, utínajícími na hranách prvotvaru úseky, které jsou k sobě v racionálném poměru. Tato *racionálnosť vytčených poměrů jest hlavní vlastností ploch krystallových,* a tím se právě rozeznávají krystally od polyëdrů uměle sestrojených.

K poznamenání polohy ploch užívá se symbolů, jež naznačují poměr úseků na hranách prvotvaru a sice v pořadí hran x, y, z. Je-li pro tu kterou plochu tento poměr $\frac{1}{m}:\frac{1}{n}:\frac{1}{r}$ jest mnr symbolem této plochy. Značka toho symbolu příslušná k levému, spodnímu nebo zadnímu oktantu naznačuje se známkou zápornou. Tak znamená $\bar{m}\ n\ \bar{r}$ plochu, která leží v levém, dolejším oktantu.

Jeden z poměrů $\frac{1}{m}:\frac{1}{n}:\frac{1}{r}$ vyvolí se za měřídko všech ostatních, a symboly druhých ploch jsou pak racionálná multipla základního poměru.

Jak ustanoví se poloha ploch krystallových, obsaženo jest v následujících statích.

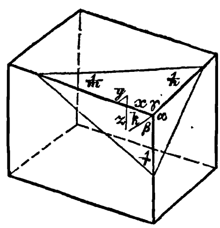
I. Rovnice plochy krystallové.

Budiž dán prvotvar trojklonný, jehož hrany v jednom rohu se sbíhající svírají úhly α, β, γ (obr. 1.), a odtínějž na něm plocha mnr hrany v poměru $\frac{1}{m}:\frac{1}{n}:\frac{1}{r}$. Je-li k kolmice z rohu prvotvaru na tu plochu spuštěná, úhel

$$\left(k, \frac{1}{m}\right) = \mu, \quad \left(k, \frac{1}{n}\right) = \nu, \quad \left(k, \frac{1}{r}\right) = \varrho$$

a označí-li se písmeny x, y, z souřadnice libovolného bodu plochy mnr, jest průmět lomené čáry xyz na kolmici k roven této kolmici, to jest

$$(1') \qquad x \cos \mu + y \cos \nu + z \cos \varrho = k.$$



Obr. 1.

Jelikož však

$$\cos \mu = k : \frac{1}{m} = mk, \quad \cos \nu = k : \frac{1}{n} = nk, \quad \cos \varrho = k : \frac{1}{r} = rk,$$

jest

$$(1) \qquad mx + ny + rz = 1$$

rovnicí plochy mnr.

Přeloží-li se plocha mnr do začátečného bodu, jest $k = 0$ a rovnice oné roviny nabude tvaru

$$x \cos \mu + y \cos \nu + z \cos \varrho = 0$$

čili, poněvadž

$$\cos \mu : \cos \nu : \cos \varrho = m : n : r,$$

$$(2) \qquad mx + ny + rz = 0.$$

II. Délka kolmice k ke krystallové ploše.

Průměty xyz na k, kyz na x, kxz na y, kyx na z dají se následujícími rovnicemi vyjádřiti:

$$
\begin{aligned}
x \cos \mu + y \cos \nu + z \cos r &= k, \\
k \cos \mu - z \cos \beta - y \cos \gamma &= x, \\
k \cos \nu - x \cos \gamma - z \cos \alpha &= y, \\
k \cos \varrho - y \cos \alpha - x \cos \beta &= z.
\end{aligned}
$$

Násobí-li se první z těch rovnic veličinou k, druhá veličinou $-x$, třetí veličinou $-y$, čtvrtá veličinou $-z$, a sečtou-li se pak tyto rovnice, jest

$$k = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2\,(yz \cos \alpha + xz \cos \beta + xy \cos \gamma)} \tag{3}$$

jakožto délka normály ke krystallové ploše vedené.

Je-li $\alpha = \beta = \gamma$, jest

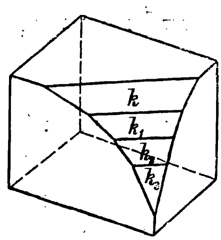
$$k = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2\,(yz + xz + xy) \cos \alpha}. \tag{4}$$

Je-li $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$, jest

$$k = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{5}$$

III. Rovnice průsečné přímky dvou krystallových ploch.

Protínají-li se dvě plochy $k = mnr$, $k_1 = m_1 n_1 r_1$ procházející počátkem soustavy souřadnic pod úhlem H (obr. 2.), nalezne se rovnice průsečné čáry h spojením rovnic obou ploch.



Obr. 2.

Rovnice obou těchto ploch jsou

$$
\begin{aligned}
mx + ny + rz &= 0 \\
m_1 x + n_1 y + r_1 z &= 0.
\end{aligned}
$$

Vyloučí-li se z obou rovnic x, nalezne se

$$\frac{y}{rm_1 - mr_1} = \frac{z}{mn_1 - nm_1}.$$

Vyloučí-li se taktéž y, nalezne se

$$\frac{x}{nr_1 - rn_1} = \frac{z}{mn_1 - nm_1},$$

a tudíž

$$(6) \qquad \frac{x}{nr_1 - rn_1} = \frac{y}{rm_1 - mr_1} = \frac{z}{mn_1 - nm_1}$$

jakožto rovnice průsečné přímky dvou ploch.

Z výsledku toho vyloučení lze poznati, že koëfficienty hodnot x, y, z dají se při tom v určitém pořádku vyjmouti, což následujícím vzorem se vyznačuje:

$$(7) \qquad \begin{matrix} m & & n & & r & & m & & n \\ & \times & & \times & & \times & & & \\ m_1 & & n_1 & & r_1 & & m_1 & & n_1 \end{matrix}.$$

Z tohoto vzorce lze čtením křížmo shora dolů vyjmouti kladné, a zdola nahoru záporné členy jmenovatelů výše uvedených rovnic.

IV. Rovnice pásmová.

Krystallové plochy, jež mají spolu rovnoběžné hrany, slovou *plochy jednoho pásma* (obr. 2.).

Podmínka, jíž vyhovují součinitelé rovnic tří ploch jednoho pásma, najde se způsobem následujícím: Jsou-li symboly oněch ploch mnr, $m_1n_1r_1$, $m_2n_2r_2$ a tudíž rovnice rovin počátkem souřadnic s nimi rovnoběžně vedených

$$\begin{aligned} mx + ny + rz &= 0 \\ m_1x + n_1y + r_1z &= 0 \\ m_2x + n_2y + r_2z &= 0, \end{aligned}$$

procházejí tyto tři roviny jedinou přímkou. Podmínku pro to obdržíme, vyloučíce z posledních tří rovnic x, y a z v podobě

$$(8) \quad m_2(nr_1 - rn_1) + n_2(rm_1 - mr_1) + r_2(mn_1 - nm_1) = 0$$

čili

$$(9) \qquad mn_1r_2 + nr_1m_2 + rm_1n_2 = m_2n_1r + n_2r_1m + r_2m_1n.$$

Rovnici (8), jíž vyhovují součinitelé m, n, r, m_1, n_1, r_1, m_2, n_2, r_2 tří ploch jednoho pásma, píšeme kratčeji ve tvaru

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} m & n & r \\ m_1 & n_1 & r_1 \\ m_2 & n_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

a nazýváme její levou stranu *determinantem* soustavy daných tří rovnic.

Z tohoto determinantu lze bezprostředním čtením dle (9) nebo čtením křížmo dle následujícího vzorce:

$$(11) \qquad \begin{array}{ccccc} m & n & r & m & n \\ m_1 & n_1 & r_1 & m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 & r_2 & m_2 & n_2 \end{array}$$

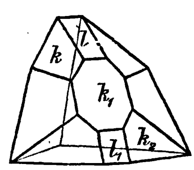
rovnici (9) bezprostředně napsati, anoť dá čtení shora dolů členy na levé, a zdola nahoru členy na pravé straně rovnice.

Je-li v pásmu tří ploch jediná značka neznámá, stačí k ustanovení jejímu jedna pásmová rovnice. Nechť jest

$k = mnr = 123$, $k_1 = m_1n_1r_1 = 11s$, $k_2 = m_2n_2r_2 = 321$,

(obr. 3)., jest příslušná rovnice dle (10)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & s \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ z čehož } s = 1, \text{ tedy } 11s = 111.$$



Obr. 3.

Jsou-li v pásmu tří ploch v jednom symbolu dvě značky neznámy, žádá ustanovení jejich, aby plocha s těmi neznámými značkami nacházela se ve dvojím pásmu ploch. Obr. 3.

Je-li na př. v jednom pásmu $k_1 = m_1n_1r_1$, $l = 113$, $l_1 = 552$,
v druhém pásmu $k_1 = m_1n_1r_1$, $k = 123$, $k_2 = 321$,

lze ze známky mnr jednu značku vzíti $= 1$, načež se druhé dvě ustanoví následujícími dvěma rovnicemi:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ m & n & r \end{vmatrix} = 0, \text{ z čehož } m = n;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ m & n & r \end{vmatrix} = 0, \text{ z čehož } m + r = 2n.$$

Z toho následuje, že $m = n = r$ a tudíž $mnr = mmm = 111$.

V. Vyloučení neznámých ze čtyř rovnic linearných.

Jsou-li dány čtyři linearné rovnice:

$$\begin{array}{ll} (a) & mx + ny + rz - ds = 0, \\ (b) & m_1x + n_1y + r_1z - ds_1 = 0, \\ (c) & m_2x + n_2y + r_2z - ds_2 = 0, \\ (d) & m_3x + n_3y + r_3z - ds_3 = 0, \end{array}$$

obdržíme vyloučením hodnot x, y, z, d rovnici

$$(12) \quad m_3 \begin{vmatrix} n & r & s \\ n_1 & r_1 & s_1 \\ n_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} - n_3 \begin{vmatrix} r & s & m \\ r_1 & s_1 & m_1 \\ r_2 & s_2 & m_2 \end{vmatrix} + r_3 \begin{vmatrix} s & m & n \\ s_1 & m_1 & n_1 \\ s_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

$$- s_3 \begin{vmatrix} m & n & r \\ m_1 & n_1 & r_1 \\ m_2 & n_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0,$$

kterou kratčeji píšeme

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} m & n & r & s \\ m_1 & n_1 & r_1 & s_1 \\ m_2 & n_2 & r_2 & s_2 \\ m_3 & n_3 & r_3 & s_3 \end{vmatrix} = 0,$$

jakožto podmínku, aby rovnicím (a), (b), (c) a (d) bylo vyhověno od nully rozdílnými hodnotami x, y, z a d.

Hodnoty pro x, $-y$, z, d jsou stejná multipla determinantů v rovnici (12) přicházejících. Tyto determinanty jmenujeme subdeterminanty determinantu (13) a lze je z uvedeného čtyřřádkového determinantu dle následujícího vzorce vyjmouti

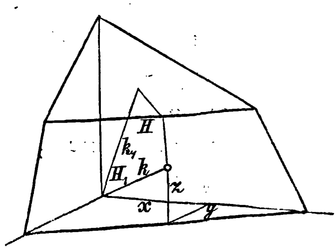
$$(14)\qquad \begin{array}{ccccccc} m & n & r & s & m & n & r \\ m_1 & n_1 & r_1 & s_1 & m_1 & n_1 & r_1 \\ m_2 & n_2 & r_2 & s_2 & m_2 & n_2 & r_2 \\ m_3 & n_3 & r_3 & s_3 & m_3 & n_3 & r_3 \end{array}$$

VI. Velikosť úhlu sevřeného dvěma plochami krystallovými.

Protínají-li se dvě plochy mnr, $m_1n_1r_1$, povstává na průsečné přímce jejich úhel H. Velikosť jeho vyznačená značkami v symbolu těch ploch obsaženými vypočte se následujícím způsobem.

Jsou-li α, β, γ úhly v plochách prvotvaru, k a k_1 kolmice k oběma plochám z počátku soustavy souřadnic vedené, jest úhel $H_1 = 180^0 - H$.

Souřadnice paty kolmice k jsou x, y, z, souřadnice paty kolmice k_1 buďtež x_1, y_1, z_1. (Obr. 4.)



Obr. 4.

Promítne-li se lomená čára x, y, z na k_1, jest dle (1′)

$$x \cos \mu_1 + y \cos \nu_1 + z \cos \varrho_1 = k \cos H_1.$$

Průměty lomených čar kyz, kxz, kyx na xyz jsou jak z předu ve II. uvedeno:

$$k \cos \mu - z \cos \beta - y \cos \gamma = x,$$
$$k \cos \nu - x \cos \gamma - z \cos \alpha = y,$$
$$k \cos \varrho - y \cos \alpha - x \cos \beta = z.$$

Dosadí-li se dle I.

$$\cos\mu = mk,\ \cos\nu = nk,\ \cos\varrho = rk,$$
$$\cos\mu_1 = m_1k_1,\ \cos\nu_1 = n_1k_1,\ \cos\varrho_1 = r_1k_1$$

a uvedou-li se tyto zde vytčené rovnice na 0, objeví se následující soustava čtyř rovnic

$$\begin{aligned}
x + y\cos\gamma + z\cos\beta - k^2m &= 0,\\
x\cos\gamma + y + z\cos\alpha - k^2n &= 0,\\
x\cos\beta + y\cos\alpha + z - k^2r &= 0,\\
xm_1 + yn_1 + zr_1 - \frac{k^2\cos H_1}{kk_1} &= 0,
\end{aligned}$$

z níž obdržíme vyloučením x, y, z a k^2 dle (13)

$$\begin{vmatrix}
1 & \cos\gamma & \cos\beta & m\\
\cos\gamma & 1 & \cos\alpha & n\\
\cos\beta & \cos\alpha & 1 & r\\
m_1 & n_1 & r_1 & \dfrac{\cos H_1}{kk_1}
\end{vmatrix} = 0.$$

Rozložením tohoto determinantu dle vzorce (14) obdržíme

$$m_1\begin{vmatrix}
\cos\gamma & \cos\beta & m\\
1 & \cos\alpha & n\\
\cos\alpha & 1 & r
\end{vmatrix} - n_1\begin{vmatrix}
\cos\beta & m & 1\\
\cos\alpha & n & \cos\gamma\\
1 & r & \cos\beta
\end{vmatrix} + r_1\begin{vmatrix}
m & 1 & \cos\gamma\\
n & \cos\gamma & 1\\
r & \cos\beta & \cos\alpha
\end{vmatrix}$$
$$- \frac{\cos H_1}{kk_1}\begin{vmatrix}
1 & \cos\gamma & \cos\beta\\
\cos\gamma & 1 & \cos\alpha\\
\cos\beta & \cos\alpha & 1
\end{vmatrix} = 0.$$

Klademe-li

$$\begin{aligned}
\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma &= A_1,\\
\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha &= B_1,\\
\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta &= C_1,
\end{aligned}$$

a nazveme-li hodnotu posledního subdeterminantu D_1, nabude rovnice poslední podoby

$$m_1(m\sin^2\alpha - nC_1 - rB_1) + n_1(n\sin^2\beta - rA_1 - mC_1)$$
$$+ r_1(r\sin^2\gamma - mB_1 - nA_1) - \frac{D_1\cos H_1}{kk_1} = 0.$$

Je-li zkrácená známka pro

$$(a)\qquad \frac{D_1\cos H_1}{kk_1} = P,$$

jest

$$P = mm_1\sin^2\alpha + nn_1\sin^2\beta + rr_1\sin^2\gamma - A_1(nr_1 + rn_1)$$
$$- B_1(rm_1 + mr_1) - C_1(mn_1 + nm_1).$$

Přejde-li poloha plochy $m_1 n_1 r_1$ v polohu mnr, stane se $m_1 = m$, $n_1 = n$, $r_1 = r$, $k = k_1$, $H_1 = 0$ a tedy $\cos H_1 = 1$, tudíž

$$(b) \qquad \frac{D_1 \cos H_1}{kk_1} = \frac{D_1}{k^2} = Q,$$

kdež

$Q = m^2 \sin^2 \alpha + n^2 \sin^2 \beta + r^2 \sin^2 \gamma - 2(A_1 nr + B_1 mr + C_1 mn)$.

Přejde-li poloha plochy mnr v polohu $m_1 n_1 r_1$, jest obdobně

$$(c) \qquad \frac{D_1 \cos H_1}{kk_1} = \frac{D_1}{k_1^2} = Q',$$

$$Q' = m_1^2 \sin^2 \alpha + n_1^2 \sin^2 \beta + r_1^2 \sin^2 \gamma - 2(A_1 n_1 r_1 + B_1 m_1 r_1 + C_1 m_1 n_1).$$

Násobí-li se pak spolu rovnice (b) a (c), jest

$$(d) \qquad \frac{D_1^2}{k^2 k_1^2} = QQ' \quad \text{nebo} \quad \frac{D_1}{kk_1} = \sqrt{QQ'}.$$

Dělí-li se konečně rovnice (a) rovnicí (d), nabudeme

$$(15) \qquad \cos H_1 = -\cos H = \frac{P}{\sqrt{QQ'}},$$

čímž jest určen úhel H povstalý setkáním se ploch mnr, $m_1 n_1 r_1$, při čemž P, Q, Q′ mají hodnoty výše vytčené.

Je-li $\alpha = \beta = \gamma$, jest

$$P = (mm_1 + nn_1 + rr_1) \sin^2 \alpha + (nr_1 + rn_1 + mr_1 + rm_1 + mn_1 + nm_1)(\cos \alpha - \cos^2 \alpha),$$

nebo — anoť dle (23)

$$\cos X = \frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

kdežto X znamená úhel plošný prvotvaru, —

$$\frac{P}{\sin^2 \alpha} = (mm_1 + nn_1 + rr_1) - (nr_1 + rn_1 + mr_1 + rm_1 + mn_1 + nm_1) \cos X,$$

$$\frac{Q}{\sin^2 \alpha} = m^2 + n^2 + r^2 - 2(nm + nr + mr) \cos X,$$

$$(16) \qquad \frac{Q'}{\sin^2 \alpha} = m_1^2 + n_1^2 + r_1^2 - 2(mn_1 + nr_1 + mr_1) \cos X.$$

Je-li $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$, jest

$$(17) \qquad \cos H_1 = -\cos H = \frac{mm_1 + nn_1 + rr_1}{\sqrt{(m^2 + n^2 + r^2)(m_1^2 + n_1^2 + r_1^2)}}.$$

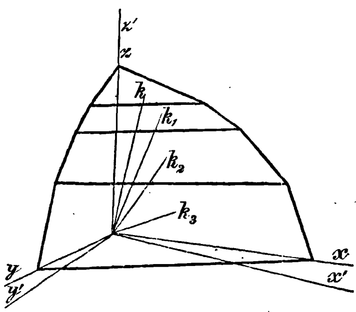
VII. Velikosť úhlů sevřených plochami pásmovými.

Též pro úhly ploch pásmových lze závislosť úhlů na značkách ploch rovnicí vyjádřiti; jest k tomu však čtyř ploch krystallových zapotřebí a nikoliv jen tří ploch. Obr. 4. a 5.

Rovnice tato vyvine se následujícím způsobem:

Nechť kolmice čtyř ploch jednoho pásma a sice předběžně ploch vztahujících se k pravoúhlému prvotvaru, v němž $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$, jsou $k k_1 k_2 k_3$ a příslušné symboly těch ploch mnr, $m_1n_1r_1$, $m_2n_2r_2$, $m_3n_3r_3$, tak lze ze tří a tří z nich sestaviti rovnice

$$\begin{vmatrix} m & n & r \\ m_1 & n_1 & r_1 \\ m_2 & n_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} m & n & r \\ m_1 & n_1 & r_1 \\ m_3 & n_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0.$$



Obr. 5.

Dle (8) nabudou rovnice tyto tvaru

$$(a) \quad m_2(nr_1 - rn_1) + n_2(rm_1 - mr_1) + r_2(mn_1 - nm_1) = 0$$
$$(b) \quad m_3(nr_1 - rn_1) + n_3(rm_1 - mr_1) + r_3(mn_1 - nm_1) = 0.$$

Uváží-li se pak, že pro poměr

$$\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = \frac{r}{r_1} = q \text{ jest } q = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 + r^2}{m_1{}^2 + n_1{}^2 + r_1{}^2}},$$

dá spojení obou rovnic (a) (b) dle (6) (7),

$$(c) \quad \frac{nr_1 - rn_1}{n_2r_3 - r_2n_3} = \frac{rm_1 - mr_1}{r_2m_3 - m_2r_3} = \frac{mn_1 - nm_1}{m_2n_3 - n_2m_3}$$
$$= \sqrt{\frac{(nr_1 - rn_1)^2 + (rm_1 - mr_1)^2 + (mn_1 - nm_1)^2}{(n_2r_3 - r_2n_3) + (r_2m_3 - m_2r_3) + (m_2n_3 - n_2m_3)^2}}.$$

Seznáme nyní snadně poměr úhlů k značkám symbolů ploch.

Jest totiž v tomto případě dle (15)

$$\cos kk_1 = \frac{P}{\sqrt{QQ'}} = \frac{mm_1 + nn_1 + rr_1}{\sqrt{(m^2+n^2+r^2)(m_1^2+n_1^2+r_1^2)}}$$

a tudíž

$$\sin kk_1 = \sqrt{\frac{(m^2+n^2+r^2)(m_1^2+n_1^2+r_1^2)-(mm_1+nn_1+rr_1)^2}{(m^2+n^2+r^2)\,(m_1^2+n_1^2+r_1^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(nr_1-rn_1)^2+(rm_1-mr_1)^2+(mn_1-nm_1)^2}{(m^2+n^2+r^2)\,(m_1^2+n_3^2+r_1^2)}}.$$

A poněvadž dále pro $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$ jest $D_1 = 1$,

$$\frac{1}{k} = \sqrt{m^2+n^2+r^2} \quad \text{a} \quad \frac{1}{k_1} = \sqrt{m_1^2+n_1^2+r_1^2},$$

bude

$$\frac{\sin kk_1}{kk_1} = \sqrt{(nr_1-rn_1)^2+(rm_1-mr_1)^2+(mn_1-nm_1)^2}$$

a obdobně

$$\frac{\sin k_2k_3}{k_2k_3} = \sqrt{(n_2r_3-r_2n_3)^2+(r_2m_3-m_2r_3)^2+(m_2n_3-n_2m_3)^2},$$

pročež také

$$(d) \qquad \frac{nr_1-rn_1}{n_2r_3-r_2n_3} = \frac{rm_1-mr_1}{r_2m_3-m_2r_3} = \frac{mn_1-nm_1}{m_2n_3-n_2m_3} = \frac{k_2k_3 \sin kk_1}{kk_1 \sin k_2k_3}.$$

Nyní jest zapotřebí ukázati, že tato rovnice má platnost nejenom pro pravoúhlou, nýbrž i pro kosoúhlou soustavu.

K tomu účelu vztáhnou se symboly mnr, $m_1n_1r_1$, $m_2n_2r_2$, $m_3n_3r_3$ ploch pravoúhlé soustavy k soustavě kosoúhlé a nabudou tím značek $m'n'r'$, $m_1'n_1'r_1'$, $m_2'n_2'r_2'$, $m_3'n_3'r_3'$, kdežto délka a poloha kolmic k $k_1k_2k_3$ zůstává nezměněna.

Jsou-li totiž hrany prvotvaru nebo osy pravoúhlé soustavy X, Y, Z kosoúhlé X′, Y,′ Z′, a je-li úklon

osy X′ ku XYZ : $\mu\ \nu\ \varrho$
Y′ „ XYZ : $\mu_1\nu_1\varrho_1$
Z′ „ XYZ : μ_2, $\nu_2 = 90^0$, $\varrho_2 = 0$,

jest průmět čar

$$\frac{x}{m}\ \frac{y}{n}\ \frac{z}{r} \text{ na X}'$$

$$\frac{x'}{m'} = \frac{x}{m}.\cos\mu + \frac{y}{n}.\cos\nu + \frac{z}{r}.\cos\varrho,$$

a vezme-li se ke srovnání hodnoty m s m_1, $x = x' = 1$, $y = z = 0$, jest $m = m' \cos\mu$ a obdobně

$$m_1 = m'_1 \cos\mu, \quad m_2 = m'_2 \cos\mu, \quad m_3 = m'_3 \cos\mu.$$

Taktéž jest průmět čar $\frac{x}{m}\frac{y}{n}\frac{z}{r}$ na Y'

$$\frac{y'}{n'} = \frac{x}{m}\cos\mu_1 + \frac{y}{n}\cos\nu_1 + \frac{z}{r}\cos\varrho_1$$

a vezme-li se $y = y' = 1$, $x = z = 0$, jest $n = n'\cos\nu_1$
a obdobně $n_1 = n'_1\cos\nu_1$, $n_2 = n'_2\cos\nu_2$, $n_3 = n'_3\cos\nu_3$
kdežto $r = r'$, $r_1 = r'_1$, $r_2 = r'_2$, $r_3 = r'_3$.

Z toho následuje, že se má

$$m : n : r = m'\cos\mu : n'\cos\mu_1 : r'$$
$$m_1 : n_1 : r_1 = m'_1\cos\mu : n'_1\cos\nu_1 : r' \text{ atd.}$$

a tudíž že jest

$$\frac{nr_1 - rn_1}{n_2r_3 - r_2n_3} = \frac{rm_1 - mr_1}{r_2m_3 - m_2r_3} = \frac{mn_1 - nm_1}{m_2n_3 - n_2m_3} = \frac{n'r'_1 - r'n'_1}{n_2r_3 - r_2n_3}$$
$$= \frac{r'm'_1 - m'r'_1}{r_2m_3 - m_2r_3} = \frac{m'n'_1 - n'm'_1}{m_2n_3 - n_2m_3} = \frac{k_2k_3 \sin kk_1}{kk_1 \sin k_2k_3}.$$

Souměrné, na vzájem sobě odpovídající poznamenání úhlů a značek symbolových připouští, že se pro jakýkoliv sled úhlů v jednom pásmě ploch příslušné rovnice ihned bezprostředně mohou napsati.

Tak obdržíme rovnice

$$\frac{kk_2 \sin kk_1}{kk_1 \sin kk_2} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{S}}, \quad \frac{k_2k_3 \sin k_1k_3}{k_1k_3 \sin k_2k_3} = \frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{S}'},$$

jichž dělením vznikne

$$\frac{\sin kk_1 \sin k_2k_3}{\sin k_1k_3 \sin kk_2} = \frac{\mathrm{RS}'}{\mathrm{R}'\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}},$$

kdež

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} = \frac{mn_1 - nm_1}{m_1n_3 - n_1m_3} \cdot \frac{m_2n_3 - n_2m_3}{mn_2 - nm_2} = \frac{nr_1 - rn_1}{n_1r_3 - r_1n_3} \cdot \frac{n_2r_3 - r_2n_3}{nr_2 - rn_2}$$

(18) $$= \frac{rm_1 - mr_1}{r_1m_3 - m_1r_3} \cdot \frac{r_2m_3 - m_2r_3}{r_2m_3 - m_2r_3}.$$

Z toho lze poznati, že k vyloučení kolmic k, k_1, k_2, k_3 jest zapotřebí čtyř ploch.

Pro praktické upotřebení jest přiměřeno, vyvoliti úhly kolmic v pořádku kk_1, kk_2, kk_3.

Aby se vytčená rovnice pro ten účel upravila, uváží se, že úhly

$$kk_3 - kk_2 = k_2 k_3\,,$$
$$kk_3 - kk_3 = k_1 k_3\,.$$

Nalezne se pak dosazením těchto nových úhlů a dělením $\sin kk_1$, $\sin kk_2$, $\sin kk_3$ rovnice

$$\frac{\sin kk_1 \sin(kk_3 - kk_2)}{\sin kk_2 \sin(kk_3 - kk_1)} = \frac{\sin kk_1 (\sin kk_3 \cos kk_2 - \cos kk_3 \sin kk_2)}{\sin kk_2 (\sin kk_3 \cos kk_1 - \cos kk_3 \sin kk_1)}$$
$$= \frac{\cot kk_2 - \cot kk_3}{\cot kk - \cot kk_3} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\,.$$

Budeme tu rovnici kratším označením psáti v podobě

$$\left\{\begin{matrix} m & n & r \\ m_1 & n_1 & r_1 \\ m_2 & n_2 & r_2 \\ m_3 & n_3 & r_3 \end{matrix}\right\} = \frac{\cot \mathrm{K}_2 - \cot \mathrm{K}_3}{\cot \mathrm{K}_1 - \cot \mathrm{K}_3}\,, \tag{19}$$

kdežto čtyři po sobě následující řádky značek znamenají značky symbolů ploch v jednom pásmu po sobě následujících, jež se čtou v pořádku v (18) vytčeném, při čemž

$$\mathrm{K}_1 = kk_1\,,\quad \mathrm{K}_2 = kk_2\,,\quad \mathrm{K}_3 = kk_3\,.$$

Jelikož v každém symbolu mnr jedna značka může se vzíti $= 1$, stačí k ustanovení druhých dvou značek, dvě z oněch v (18) uvedených a k $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ příslušných rovnic.

Na Chalkanthitu na př. jest v pásmu čtveroplochém pro jednu z jeho ploch $m_3 n_3 r_3 = p\bar{q}\bar{s}$, kdežto

$$mnr = 01\bar{1},\qquad m_1 n_1 r_1 = 1\bar{1}0,\qquad m_2 n_2 r_2 = 2\bar{1}\bar{1},$$
$$\mathrm{K}_1 = 44^\circ 50,\qquad \mathrm{K}_2 = 85^\circ 38',\qquad \mathrm{K}_3 = 103^\circ 17'.$$

Příslušná rovnice jest tedy

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \bar{1} \\ 1 & \bar{1} & 0 \\ 2 & \bar{1} & \bar{1} \\ p & \bar{q} & \bar{s} \end{matrix}\right\} = \frac{\cot \mathrm{K}_2 - \cot \mathrm{K}_3}{\cot \mathrm{K}_1 - \cot \mathrm{K}_3}\,,$$

nebo po rozvedení

$$\frac{\cot 85^\circ 38' + \cot 76^\circ 43'}{\cot 44^\circ 50' + \cot 76^\circ 43'} = \frac{mn_1 - nm_1}{m_1 n_3 - n_1 m_3} \cdot \frac{m_2 n_3 - n_2 m_3}{mn_2 - nm_2}$$
$$= \frac{nr_1 - rn_1}{n_1 r_3 - r_1 n_3} \cdot \frac{n_2 r_3 - r_2 n_3}{nr_2 - rn_2} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\,,$$
$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} = \frac{p - 2q}{2(p - q)} = \frac{s - q}{2s} = \frac{1}{4}\,,$$

z čehož se nalezne $p = 3q$, $s = 2q$, $pq\bar{s} = 3q\,.\,\bar{q}\,.\,\overline{2q} = 3\bar{1}\bar{2}$.

(Dokončení.)