Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

August Seydler

O základních druzích pohybu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 2, 49--67

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109305`

O základních druzích pohybu.

Napsal

dr. Aug. Seydler.

I.

Kinematika útvarů nepromĕnných, jež ve skutečnosti ovšem se nevyskytují, nýbrž jen přibližně ve hmotách *tuhých**) jsou realisovány, poučuje nás důkladně o dvou hlavních druzích pohybů: o *translaci* a *rotaci*. K jiným druhům dospíváme, počneme-li rozbírati pohyb útvarů proměnných, jakými jsou všechny hmoty skutečné, měníce buď *objem* i *tvar* v mezích libovolných (vzdušiny), buď *objem* jen nepatrně, *tvar* ale značně (kapaliny), buď *objem* i *tvar* v mezích jen nepatrných (hmoty tuhé). Tu nás však uvádí do rozpaků nekonečná rozmanitosť nejrůznějších, na mnoze málo přehledných pohybů. Považujíce každý útvar za soubor hmotných bodů, mohli bychom ovšem vystačiti jedinou translací; v jistém smyslu byla by totiž známosť postupného pohybu *každého bodu* daného útvaru úplným popisem veškerého pohybu. Že by však takovýto popis mnohdy postrádal náležité přehlednosti a názornosti, toho nejlepším dokladem jest objevivší se nutnosť, přibrati též pohyb otáčecí co základní prvek kinetický; i vzniká otázka, možno-li takových prvků nalézti větší počet a jaké to druhy pohybu jsou, jež za základní považovati můžeme.

Mysleme si hmotný útvar, který se nepohybuje a na který nepůsobí žádné síly,**) tedy útvar ve stavu *nehybném* a *nenuceném*

*) Mám za to, že jest terminus „tuhý“ (starr) pro označení určitého stavu skupenstva vhodnější nežli terminus „pevný“ (fest). Kapaliny přecházející v onen stav *tuhnou*; a tělesa tuhá, v týž stav skupenstva příslušná, nebývají proto již i pevná. Tento pojem jest tudíž užší než pojem tuhosti, ano při pojímání přesnějším není mu ani podřaděn; můžeme i při kapalinách (ve tvaru vláken a blán) mluviti o pevnosti.

**) Přesněji řečeno, nemá takovýto útvar v onom idealném stavu žádné *energie*, ani *kinetické* neb *aktualné*, ani *statické* neb *potencialné*. Pohyb (volném). Stav takový není ovšem ve skutečnosti nikdy realisován, jest jen *idealným*; můžeme si však o něm učiniti představu abstrahováním z úkazů na hmotách tuhých, nejsou-li tyto podrobeny značnějším silám. Na tyč, kterou volně v ruce držíme, působí sice tíže, tlak vzduchu, atd., síly ty nestačí však ku značnějším změnám její; teprv podepřeme-li se o tyč vší silou, prohne se, tj. původní tvar její, přibližně volný, přechází ve tvar deformovaný, značným tlakem vynucený. Kdy a jak by hmota se jevila nejsouc podrobena žádným silám, neumíme ovšem říci; obtíže v tomto ohledu vznikající podobají se úplně té, která se vzhledem ku poznání stejnoměrného pohybu, t. j. vzhledem ku Galilei-ho principu setrvačnosti vyskytuje, a mají zdroj svůj v *relativnosti* našeho poznání. Poznáváme na hmotách jen přírůstky jejich původní neznámé deformace, způsobené následkem přírůstků původně na ně působících, rovněž neznámých sil.

V útvaru hmotném, nalezajícím se v libovolném stavu pohybu, polohy a tvaru vytkněme si libovolný bod A. Kdyby se nalezal týž útvar v onom stavu idealném, úplně volném a nehybném, byly by souřadnice jeho v *kterýkoli čas* x, y, z; skutečné souřadnice bodu A jsou ovšem jiné, totiž $x+u$, $y+v$, $z+w$ *v čas* t. Veličiny u, v, w jsou složky *pošinutí* neb *translace* bodu A z idealné polohy do polohy skutečné, a závisejí patrně na veličinách x, y, z, t. Závislosť ta může býti přerozmanitá; bližší vyšetření pohybu hmotného útvaru jest možné pouze tehdy, předpokládáme-li, že pro úkony u, v, w oněch veličin x, y, z, t platí *princip nepřetržitosti* ve všech bodech útvaru vyjma jednotlivé plochy, čáry, body a jednotlivé okamžiky, t. j. že mají (s naznačenými výjimkami) nekonečně blízké body též nekonečně málo odchylné složky *pošinutí*.

Příklady pro to, kdy není vzhledem ku prostoru (vzhledem ku x, y, z) vyhověno principu nepřetržitosti, poskytují hromada písku, kotouč prachu neb kouře; vyšetřiti pohyby všech hmotných částic takového útvaru jest nemožno, na štěstí též nezajímavo. Příkladem porušení principu nepřetržitosti vzhledem k času byl

---

podmiňuje vyskytnutí se prvé energie, trvalá změna polohy, objemu a tvaru vyskytnutí se energie druhé.

by pohyb na čáře, z *nekonečně malých* přímých prvků, *konečné* úhly svírajících, složené.*)

Udělíme-li úkonům u, v, w zvláštně jednoduché tvary, obdržíme zvláštně jednoduché druhy kinetické neb statické změny stavu hmotného útvaru:

A. Úkony u, v, w buďtež konstanty. V případě tom má každý bod A po celý čas místo předpokládaných souřadnic x, y, z jiné, taktéž konstantní $x+u$, $y+v$, $z+w$; nalezá se tedy opět ve stavu idealném.**) Případ ten jest zcela bezvýznamný, leda že nás připomíná na relativnosť polohy, t. j. na možnosť, voliti začátek souřadnic kdekoli.

B. Úkony u, v, w buďtež jen na prostoru (souřadnicích x, y, z) závislé. V případě tom se útvar nepohybuje, jest ale u porovnání s idealným stavem změněn, t. j. deformován (v nejširším slova smyslu). Vyskytuje se zde *všeobecný problem rovnováhy* (vlastně klidu, poněvadž není při rovnováze sil stejnoměrný pohyb postupný vyloučen). Útvar má *jen* statickou energii.

C. Úkony u, v, w buďtež *jen* na čase závislé. V případě tom má *útvar co celek* postupný pohyb, t. j. translace všech bodů jest stejná. Poněvadž v případě tom vyšetření pohybu jednotlivého bodu stačí k poznání pohybu celého útvaru, můžeme říci, že problemem přítomným se zanáší *kinematika bodu.* Útvar má *jen* kinetickou energii.

D. Úkony u, v, w buďtež na souřadnicích x, y, z libovolně závislé, mimo to však úkony linearnými času t.

Úkony ty mají tudíž tvar:

$$(1)\qquad \begin{aligned} u &= b_1 + c_1 t, \\ v &= b_2 + c_2 t, \\ w &= b_3 + c_3 t. \end{aligned}$$

Veličiny b_m a c_m jsou zde časové konstanty, pouze na prostorové poloze (souřadnicích x, y, z) závislé. Hodnoty veličin

*) Zdali v přírodě *skutečně* kdy princip nepřetržitosti jest porušen, aneb zda-li nám tak někdy pouze připadá, k tomu nemá věda ovšem odpovědi. Četné (alespoň na pohled) diskontinuity v přírodě vedly ku zbudování názoru o ustrojení hmoty, jenž *princip diskontinuity* činí pravidlem, totiž k *atomismu*; mathematik ze svého stanoviska bude ovšem straniti vždy opačnému principu kontinuity.

**) Přidáním stálých u, v, w k souřadnicím nemění se ani kinetická ani statická energie útvaru.

b_m a c_m, platící pro $x=0$, $y=0$, $z=0$, určují pohyb začátku souřadnic a rovnají se tudíž nule, volíme-li *ten* bod za začátek souřadnic, který svou polohu zachovává. (Takový bod vždy existuje, může se však nalezati též v nekonečnosti, na př. při postupném pohybu celého útvaru). V nekonečně blízkém sousedství tohoto bodu jsou tudíž veličiny b_m a c_m zároveň s nekonečně malými hodnotami souřadnic nekonečně malými, a tudíž, všeobecně vzato, linearnými stejnorodými úkony týchž veličin.

Veličiny b_1, b_2, b_3 určují odchylku hmotného útvaru na začátku pohybu od idealného stavu.

E. Úkony u, v, w buďte na čase závislé, mimo to však linearnými úkony relativních souřadnic x, y, z. Výrazy ty lze tudíž psáti:

$$\begin{aligned} u &= a_{10} + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ v &= a_{20} + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ w &= a_{30} + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \tag{2}$$

Veličiny a_{mn} jsou zde prostorové konstanty, pouze na čase závislé. Hodnoty veličin a_{mn} platící pro $t=o$, určují stav hmotného útvaru t. j. jeho odchylky od *idealného* stavu na začátku pohybu. Hodnoty ty rovnají se vesměs nule, předpokládáme-li, že hmota při začátku pohybu vychází z tohoto idealného stavu. Pak jsou po uplynutí nekonečně krátké doby τ veličiny a_{mn} tomuto τ úměrny, jsouce zároveň nekonečně malými. Veličiny a_{10}, a_{20}, a_{30} určují pohyb začátku souřadnic.

F. Další specialisace nevedla by k novým jednoduchým výsledkům. Platí-li totiž, jak předpokládáme, princip nepřetržitosti, platí to, co jsme v případě D. a E. odvodili pro *celý hmotný útvar* a pro *veškerý čas*, alespoň pro každou nekonečně malou prostorovou částici kolem bodu x, y, z a pro každou nekonečně malou časovou částici při okamžiku t. V čase $t+\tau$ jest totiž pošinutí každého, bodu A (x, y, z) nekonečně blízkého bodu B, jehož souřadnice by v idealném stavu byly $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$, určeno složkami:

$$\begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial u}{\partial t}\tau + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta, \\ v' &= v + \frac{\partial v}{\partial t}\tau + \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta, \\ w' &= w + \frac{\partial w}{\partial t}\tau + \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta. \end{aligned} \tag{3}$$

Veličiny u, v, w a koefficienty veličin τ, ξ, η, ζ jsou zde vzhledem k těmto konstanty, jsouce úkony veličin t, x. y, z. Vytkneme-li si tedy určitý bod x, y, z a určitý okamžik t, řídí se pohyb a změna stavu hmoty kolem téhož bodu a poblíž téhož okamžiku zákony pohybů v D. a E. blíže charakterisovaných. Uvážíme-li, že jsou případy A. B. C. v případech D. a E. co zvláštní obsaženy, nabýváme přesvědčení, že nás *o hlavních druzích* pohybů poučí rozbor obou případů posledních.

II.

Při vyšetřování pohybu hmotného útvaru můžeme si buď vytknouti každý jednotlivý bod jeho a tázati se, jak se jeho poloha *časem* mění, čili jak jest na čase závislá, aneb si můžeme vytknouti každý jednotlivý okamžik a tázati se, jaká jest v tomto okamžiku poloha celého útvaru, čili jak jest pošinutí jeho jednotlivých částí závislé na jakési normalné (idealné) *poloze* jejich.

Zkrátka řečeno, můžeme míti při pohybu na mysli jeho poměr ku času, aneb k prostoru.

a) V prvním případě položíme v rovnicích (3)

$$\xi = \eta = \zeta = 0,$$

a vidíme, že lze *každý* (nepřetržitý) pohyb pro velmi krátké doby pojímati co *stejnoměrný pohyb*. Pohyb takový, určený rovnicemi (1), děje se ve stálém směru stálou rychlostí, kteréžto dva momenty pohybu konstantami c_1, c_2, c_3 se určují. Stálost jejich vztahuje se zde jen k času. Skutečný pohyb není ovšem (všeobecně) ani vzhledem k času stálým, analyse pohybu vzhledem k času záleží právě v tom, že skutečný pohyb smíme nahraditi nekonečnou řadou po sobě jdoucích *stejnoměrných prvků pohybových.*

Vzhledem k času jest tudíž jediným základním druhem pohybu pohyb stejnoměrný, totiž pohyb stálého směru a stálé rychlosti.

Při pohybu takovém jest kinetická energie útvaru co do času konstantou. Co do prostoru jest proměnná tak, že v každém bodu (x, y, z) nabývá pro jednotku objemu určité hodnoty, kterou bychom mohli zváti *specifickou kinetickou energií* (neb i hustotou energie) onoho místa (x, y, z). Nazveme-li h hustotu hmoty na témž místě, jest výraz pro tuto specifickou energii:

$$\frac{h}{2}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2).$$

b) V druhém případě položíme v rovnicích (3) $\tau = 0$, i vidíme, že lze pojímati každý (nepřetržitý) pohyb pro velmi malé okolí jakéhokoli bodu A (x, y, z) co *pohyb stejnorodý*. Pohyb takový, určený rovnicemi (2), čili konstantami a_{mn}, děje se kolem každého bodu stálým způsobem, kterážto stálosť se však opět jen k prostoru vztahuje. Skutečný pohyb není ovšem (všeobecně) ani vzhledem k prostoru stálým; příslušný rozbor pohybu záleží zde právě v tom, že můžeme skutečný pohyb v celém (hmotou vyplněném) prostoru nahraditi *stejnorodými prvky pohybovými* od částice prostorové k částici nepřetržitě se měnícími.

Jako lne mezi všemi možnými *stejnoměrnými* pohyby ku skutečnému pohybu nejtěsněji ten, jenž má s tímto společnou tečnu a rychlosť, podobně lne mezi všemi možnými *stejnorodými* pohyby ku skutečnému pohybu nejtěsněji pohyb jediný, určený koefficienty a_{mn} (2), jež se rovnají příslušným koefficientům výrazů (3). Vyhledání *stejnorodého pohybu*, aequivalentního v určitém bodu pohybu skutečnému, tvoří tudíž vzhledem k prostoru analogii ku vyhledání *stejnoměrného pohybu*, v určitém okamžiku pohybu skutečnému aequivalentního, t. j. ku vyhledání směru a velkosti rychlosti v onom okamžiku. Stejnorodý pohyb jest však daleko složitější než pohyb stejnoměrný následkem toho, že má prostor tři rozměry a čas pouze jeden. Můžeme tudíž sice říci:

Vzhledem k prostoru jest pohyb stejnorodý buď jediným základním druhem pohybu, neb v sobě zahrnuje základní druhy, v něž sám ještě rozložen býti může.

Při pohybu stejnoměrném jest statická energie co do prostoru konstantou, t. j. má pro každou prostorovou částici tutéž hodnotu. Co do času jest proměnná tak, že v každém okamžiku t nabývá určité hodnoty, která se během času mění. Výraz její jest stejnorodý úkon 2. stupně šesti veličin: a_{11}, a_{22}, a_{33}, $(a_{23} + a_{32})$, $(a_{31} + a_{13})$, $(a_{12} + a_{21})$ (srov. *Thomson* a *Tait*, Theor. Phys. §. 673; *Clebsch*, Theorie d. Elasticität fester Körper, §. 16.).

III.

Dle předešlé úvahy zbývá nám úloha, vyšetřiti blíže *stejnorodý pohyb* definovaný rovnicemi (2), t. j. vyhledati ony pohyby jednodušší, z nichž se tento pohyb skládá. Koefficienty mohou míti ovšem jakékoli hodnoty. *Zde budeme předpokládati, že jsou vesměs nekonečně malé.* Pohyb, definovaný *konečnými* koefficienty, můžeme si mysleti rozložený v posloupnost nekonečného množství po sobě následujících, nekonečné malými koefficienty definovaných pohybů. Obmezení se na takovéto koefficienty umožňuje *záměnnosť* (kommutativnosť) různých druhů pohybu čili prvků pohybových, kterážto důležitá vlastnosť jinak mizí, jak nás již při studiu útvarů neproměnných skládání konečných rotací poučuje. Dále můžeme, dělíce nekonečně malá pošinutí u, v, w příslušnou částicí časovou, zjednati sobě výrazy pro *rychlosti* pohybu, kteréž tudíž vždy jsou kommutativní. Půdu k tomuto rozboru připravíme sobě, vyšetříme-li nejprvé jednodušší pohyb v prostoru dvourozměrném, t. j. v rovině. Položme:

$$
\begin{aligned}
u &= a_{10} + a_{11} x + a_{12} y, \\
v &= a_{20} + a_{21} x + a_{22} y.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Zde jsou a_{10}, a_{20} složky *translace* ve směrech X a Y; $a_{11}x$ značí *elongaci* čili stejnoměrné prodloužení celého útvaru ve směru X tak, že se jednotka délky v témž směru zvětší o a_{11}, a podobně značí $a_{22}\,y$ *elongaci* ve směru osy Y. Konečně jest $a_{12}\,y$ *jednoduché pošinutí* (simple shear), t. j. translace všech se směrem osy X rovnoběžných přímek v tomto směru, tím větší, čím větší vzdálenosť od osy X. Následkem tohoto pošinutí otočí se přímky s osou Y rovnoběžné vesměs o úhel a_{12} z původní své polohy kolem středů, položených na ose Y. Podobné pošinutí značí $a_{21}\,x$ vzhledem k ose Y.*)

Translace, elongace a jednoduché pošinutí nejsou však posledními prvky pohybovými (kinetickými); poslední dvě lze dále rozložiti. Rovnice (4) lze uvésti na tvar:

$$
\begin{aligned}
u &= t\cos\tau + px - ry + s\,(-x\sin 2\sigma + y\cos 2\sigma) \\
v &= t\sin\tau + py + rx + s\,(x\cos 2\sigma + y\sin 2\sigma),
\end{aligned} \tag{5}
$$

*) Zcela přiměřený latinský název pro jednoduché pošinutí se nevyskytuje; dovoluji si navrhnouti slovo: *dilace*. Diferre má sice po výtce význam časový (poodkládati s něčím), jsou však též doklady pro význam prostorový.

klademe-li:

$$(6)\quad \begin{array}{lll} a_{22}+a_{11}=2p, & a_{22}-a_{11}=2s\sin 2\sigma, & a_{10}=t\cos\tau \\ a_{21}-a_{12}=2r, & a_{21}+a_{12}=2s\cos 2\sigma, & a_{20}=t\sin\tau. \end{array}$$

a) Konstanty t, τ ve výrazu (5) určují *translaci*, kterouž se mění *místo* rovinného útvaru co celku.

b) Konstanta r značí (je-li dle hořejší poznámky nekonečně malá) *rotaci* kolem začátku souřadnic, kterouž se mění *směr* (orientace) útvaru co celku.

c) Konstanta p značí *expansi* útvaru kolem začátku souřadnic, kterou se pouze *velkosť* (rozměry) útvaru mění. Každá jednotka délky zvětší se totiž o p, každá jednotka plochy o $2p$.

d) Konstanty s, σ značí jakési pošinutí, ne však jednoduché nýbrž *souměrné*, čili (dle předcházející poznámky) *dilaci symmetrickou*; mění se jí pouze *tvar* rovinného útvaru. Význam tohoto pohybu vysvitne nejlépe ve zvláštním případě $\sigma=0$. Patrně značí pak:

$$u=sy,\quad v=sz$$

soubor dvou jednoduchých pošinutí, jimiž se osy X a Y k sobě skloní každá o úhel s, tak že tvoří spolu úhel $\frac{\pi}{2}-2s$ místo pravého. Přímky půlící úhel obou os nemění svou polohu, za to prodlouží se však jedna a zkrátí druhá tak, že se na nich původní jednotka délky změní v $1\pm s$. Naopak prodlužují a zkracují se osy X a Y, a sklánějí se k sobě přímky půlící úhly obou os, je-li $\sigma=45^0$; jak patrno z diskusse rovnice:

$$u=-sx,\quad v=+sy.$$

V případě všeobecném, t. j. pro jakoukoliv hodnotu úhlu σ, poznáváme, že se k sobě následkem pohybu, konstantami s, σ definovaného, sklánějí o úhel s přímky, tvořící s osami X a Y úhel σ. Čtverec, jehož strany jsou rovnoběžny s těmito přímkami, mění se v kosočtverec mající úhly $\frac{\pi}{2}\pm 2s$, a úhlopříčny jeho se prodlouží a zkrátí v poměru $1\pm s$. Až na malé veličiny 2. stupně zůstane jeho plocha, i plocha jakéhokoli obrazce v rovině nezměněnou.

Uvedené čtyry pohyby rovinné, totiž *translaci* T, *rotaci* R, *expansi* P, dilaci *symmetrickou* S lze právem pokládati za *prvky* pohybu rovinného, při čemž však translace v mnohých ohledech proti ostatním třem pohybům jaksi výminečně jest postavena. Platí totiž o pohybech těch následující výroky:

1. Každá z nich značí zcela charakteristický od ostatních podstatně rozdílný pohyb.

2. Souborem jich jest jakýkoli pohyb vyčerpán, poněvadž nelze sobě představiti pohyb, který by neměnil ani místo, ani směr, ani velkost, ani tvar pohybujícího se útvaru.*)

3. Libovolný počet *stejnojmenných* pohybů skládá se zase v pohyb téhož jmena: soubor translací v jedinou výslednou translaci, soubor expansí kolem různých středů v jedinou výslednou expansi s určitým středem atd.

Tato vlastnosť zejmena činí vytčené jednoduché pohyby pravými *prvky kinetickými*, v podobném slova smyslu jako o prvcích hmotných v chemii mluvíme. Jakousi výminku tvoří ovšem pohyb translační: dvě rotace, expanse neb symmetrické dilace o různých středech a stejných, pouze znamením rozdílných koefficientech skládají se v pohyb postupný. Týž lze však považovati též za *zvláštní případ* buď rotace, buď expanse, buď symmetrické dilace, ten totiž, ve kterém střed těchto pohybů ustupuje do nekonečna. V tom ohledu jest translace pohybem sui generis, a může se (ve všeobecnější theorii pohybu) klásti co kinetický prvek *nultého řádu* oproti rotaci, expansi a dilaci jakožto prvkům *řádu prvého*, jimž jsou opět nadřaděny různé pohyby *řádu druhého* a t. d.

4. Uvedené základní pohyby lze sice složiti z jiných leč (s vyloučením translace, jejíž výminečné postavení bylo již vytknuto) jen zdánlivě, totiž proto, poněvadž v těch druhých pohybech ony základní jsou již obsaženy. Rotaci lze ovšem považovati za soubor dvou jednoduchých k sobě kolmých dilací (D_1, $-D_2$) opačného označení, a symmetrickou dilaci za soubor dvou jednoduchých dilací též k sobě kolmých stejného však

*) Proti tomu mohlo by se namítnouti, že nemusí nestlačitelná kapalina, v dutině neproměnného tvaru (na př. v duté kouli) obsažená, měniti ani místo ani směr ani objem ani tvar svůj a že proto přece může obsahovati různé pohyby (proudy). Námitka ta vzniká nedopatřením. Kapalina *co celek* nemá ovšem naznačené pohyby, než jen proto, že se pohyby jednotlivých její *částí* vzájemně vyrovnávají — pohyby ty nemohou však býti jiné, nežli pohyby právě jmenované.

označení. Vlastně se však skládá jednoduchá dilace z rotace a z dilace symmetrické, a skládáním dvou různých jednoduchých dilací v určitém poměru se může jeden z oněch kinetických prvků vzájemným rušením zničiti a zbývající prvek vybaviti, dle vzorků:

$$D_1 = (R, + S), \quad D_2 = (-R, + S)$$
$$2R = (D_1, - D_2), \; 2S = (D_1, + D_2).$$

Analogie chemických dějů nás zde ovšem opouští, poněvadž chemie nezná záporných veličin.

Co se skládání jednotlivých pohybů týče, stačí následující poznámky.

Výsledná rotace jest *algebraickým součtem* rotačních složek, výsledná expanse algebraickým součtem částečných expansí; střed rotace neb expanse lze pojímati co střed hmotný bodů tvořících středy příslušných složek, přisuzujeme-li těmto bodům hmotu rovnající se velkosti týchž složek.

Výsledná translace jest *geometrickým součtem* příslušných složek.

Symmetrické pošinutí skládá se dle rovnic:

$$s \sin 2\sigma = \Sigma s_n \sin 2\sigma_n,$$
$$s \cos 2\sigma = \Sigma s_n \cos 2\sigma_n.$$

Nazveme-li ty přímky, které následkem symmetrické dilace mění pouze směr ne však délku svou, *centrálnými*, a vybereme-li z obou těch přímek vždy onu, která se ve směru *kladné* rotace otáčí, můžeme následující konstrukci výsledné symmetrické dilace provésti. Sestrojme si svazek paprsků, rovnoběžných s vybranými centrálnými přímkami; každý z nich otočme tak, aby se zdvojnásobnil úhel, jejž původně s libovolnou přímkou tvoří a vneseme naň délku rovnající se danému koefficientu (s_n) příslušné dilace. Utvořme *geometrický* součet týchž délek, a otočme výslednici tak, aby půlila úhel, jejž původně s onou libovolnou přímkou tvoří. Výslednice ta určuje nyní *délkou* svou hodnotu s výsledné dilace a *směrem* svým směr příslušné centrálné přímky.

IV.

Nežli přikročíme k rozboru stejnorodého pohybu prostorového, položíme si otázku po kriteriích rovinného pohybu, t. j.

vyhledáme podmínky, jimž vyhovují koefficienty a_{mn} všeobecných rovnic:

$$
\begin{aligned}
u &= a_{10} + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\
v &= a_{20} + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\
w &= a_{30} + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,
\end{aligned} \tag{7}
$$

má-li pohyb jimi vyjádřený býti *rovinným*. Pohyb takový můžeme definovati následovně:

a) existuje svazek rovnoběžných paprsků, takový, že body každého paprsku mají pohyb stejný;

b) existuje svazek rovin rovnoběžných, již se pohybují samy v sobě, t. j. jichž body z příslušné roviny nevystupují;

c) ony paprsky a tyto roviny jsou k sobě kolmy.

Jsou-li α, β, γ cosinusy směrné oněch paprsků, jsou rovnice jakéhokoli z nich:

$$x = x_0 + \alpha r, \quad y = y_0 + \beta r, \quad z = z_0 + \gamma r.$$

Vložíme-li do výrazů (7) pro u, v, w, obdržíme výrazy tvaru:

$$u = u_0 + ar, \quad v = v_0 + br, \quad w = w_0 + cr,$$

a dle podmínky *a)* platí rovnice:

$$
\begin{aligned}
a &= a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\
b &= a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma = 0, \\
c &= a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma = 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Eliminace veličin α, β, γ, pro něž platí

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

vede k *jediné* podmínce, které pohyb *a)* vyhovovati musí. Všeobecný pohyb prostorový má 12 stupňů volnosti (k jeho určení nutno udati 12 zcela libovolných koefficientů); pohyb *a)* má tudíž jen 11 stupňů volnosti,

Jsou-li dále α', β', γ' směrné cosinusy normaly svazku rovinného *b)*, rovnice jedné roviny tudíž:

$$x\alpha' + y\beta' + z\gamma' + p = 0$$

při *libovolném* p, jest pro všechna x, y, z, vyhovující předcházející rovnici:

$$u\alpha' + v\beta' + w\gamma' = 0,$$

čili

$$fx + gy + hz + k = 0.$$

Lze tudíž nalézti λ takové, aby bylo:

$$(f + \lambda\alpha')x + (g + \lambda\beta')y + (h + \lambda\gamma')z + (k + \lambda p) = 0$$

čili $$f + \lambda\alpha' = 0, \quad g + \lambda\beta' = 0,$$
$$h + \lambda\gamma' = 0, \quad k + \lambda p = 0.$$

Jsou však f, g, h, k, α', β', γ' konstanty, p libovolné, musí býti tudíž λ rovno nule a jest:

$$(9) \qquad \begin{aligned} f &= a_{11}\alpha' + a_{21}\beta' + a_{31}\gamma' = 0, \\ g &= a_{12}\alpha' + a_{22}\beta' + a_{32}\gamma' = 0, \\ h &= a_{13}\alpha' + a_{23}\beta' + a_{33}\gamma' = 0, \\ k &= a_{10}\alpha' + a_{20}\beta' + a_{30}\gamma' = 0. \end{aligned}$$

Eliminace veličin α', β', γ' z rovnic (9) vede zde ku *dvěma* podmínkám pohybu b), který má tudíž 10 stupňů volnosti.

Dlužno však připomenouti, že pohyb ten v sobě vlastnosť pohybu a) zahrnuje, jen že se všeobecně směr (α, β, γ) od směru $(\alpha', \beta', \gamma')$ různí. Zavedení podmínky c) činí teprv pohyb (7) rovinným, podmínka ta jest aequivalentní dvěma rovnicím soustavy

$$(10) \qquad \alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma,$$

z nichž pak i třetí plyne. Pohyb rovinný má tudíž pouze 8 stupňů volnosti*), budou tudíž mezi koefficienty a_{mn} platiti v případě pohybu takového *čtyry* rovnice. Soustavy (8) a (9) poskytují po eliminaci veličin $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ zdánlivě *pět* rovnic, bylo však již k tomu poukázáno, že dvě rovnice jsou identické: lze totiž

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

považovati za výsledek eliminace z rovnic (8) neb z prvních tří rovnic (9).

Úplnou soustavu hledaných rovnic zjednáme si rozlišováním těchto dvou případů:

A. Alespoň jedna z veličin:

$$2r_1 = a_{32} - a_{23}, \quad 2r_2 = a_{13} - a_{31}, \quad 2r_3 = a_{21} - a_{12}$$

budiž od nuly rozdílná.

V případě tom zjednáme si odečtením rovnic (8) od prvních tří rovnic (9):

---

*) Směr normaly rovinného svazku zastupuje *dva* stupně, pohyb v rovině *šest* stupňů, z nichž připadají *tři* na koefficienty (velkosti) expanse, rotace a dilace, *dva* na polohu společného středu týchž pohybů, *jeden* na polohu centrálných os dilace.

$$\frac{\alpha}{r_1}=\frac{\beta}{r_2}=\frac{\gamma}{r_3}=\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2+r_3^2}}.$$

Hledané čtyry podmínky jsou tudíž, vložíme-li tyto hodnoty do rovnic (9):

$$(12)\quad \begin{aligned} a_{10}(a_{32}-a_{23})+a_{20}(a_{13}-a_{31})+a_{30}(a_{21}-a_{12})&=0\\ a_{11}(a_{32}-a_{23})+a_{21}(a_{13}-a_{31})+a_{31}(a_{21}-a_{12})&=0\\ a_{12}(a_{32}-a_{23})+a_{22}(a_{13}-a_{31})+a_{32}(a_{21}-a_{12})&=0\\ a_{13}(a_{32}-a_{23})+a_{23}(a_{13}-a_{31})+a_{33}(a_{21}-a_{12})&=0. \end{aligned}$$

Místo jejich mohou zastupovati též rovnice jiné, tak lze na př. místo posledních tří rovnic položiti plynoucí z nich rovnici (11), a mimo to následující, odvozené vhodnou kombinací rovnic (8) a (9):

$$(13)\quad \frac{(a_{23}-a_{32})^2}{a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}}=\frac{(a_{31}-a_{13})^2}{a_{33}a_{11}-a_{31}a_{13}}=\frac{(a_{12}-a_{21})^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

B. Je-li

$$(14)\qquad a_{32}=a_{23},\quad a_{13}=a_{31},\quad a_{21}=a_{12}$$

stávají se rovnice (12) a (13) identitami a ztrácejí význam co podmínky určující pohyb rovinný. Máme v případě tom již *tři* podmínky (14), k nim musí se však nyní přidružiti ještě *dvě*, neboť pohyb vyhovující podmínkám (14) postrádá *rotace* (v. odst. V.) má tudíž o jeden stupeň volnosti (koefficient rotace) méně.

Není-li žádná z rovnic (9) identickou, bude rovnicím těm vyhověno, klademe-li jakékoli dva z determinantů, rovnicím oněm příslušných rovny nule, na př.:

$$(15)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=0.$$

Je-li však jedna z rovnic (9) identickou, je-li na př.:

$$a_{13}=a_{23}=a_{33}=0,$$

může se státi, že rovnice takto vybrané nestačí, tak rovnice (15) v případě uvedeném; tu jest nutno, vložiti determinant ze zbývajících, neidentických rovnic rovný nule.

Jsou-li konečně dvě z rovnic (9) identickými, jest pohyb tím samým již rovinný.

V.

Obraťme se nyní k rozboru stejnorodého pohybu prostorového, určeného rovnicemi (7), v nichž koefficienty nepodléhají žádným podmínkám.

V rovnicích těch značí a_{10}, a_{20}, a_{30} složky translace; a_{11}, a_{22}, a_{33} jsou *elongace* ve směrech os X, Y, Z; ostatní koefficienty značí jednoduché dilace v různých směrech vzhledem k různým centrálným rovinám. Položme opět:

$$
\begin{array}{llll}
 & a_{11}+a_{22}+a_{33}=3p\,, & 2a_{22}-a_{33}-a_{11}=3v_2, & \\
 & 2a_{11}-a_{22}-a_{33}=3v_1, & 2a_{33}-a_{11}-a_{22}=3v_3, & \\
(16) & a_{32}-a_{23}=2r_1, & a_{32}+a_{23}=2s_1, & a_{10}=t_1, \\
 & a_{13}-a_{31}=2r_2, & a_{13}+a_{31}=2s_2, & a_{20}=t_2, \\
 & a_{21}-a_{12}=2r_3, & a_{21}+a_{12}=2s_3, & a_{30}=t_3.
\end{array}
$$

Rovnice (7) lze pak psáti takto:

$$
\begin{array}{ll}
 & u=t_1+px-r_3y+r_2z+v_1x+s_3y+s_2z, \\
(17) & v=t_2+py-r_1z+r_3x+v_2y+s_1z+s_3x, \\
 & w=t_3+pz-r_2x+r_1y+v_3z+s_2x+s_1y.
\end{array}
$$

Pohyb rovnicemi (7) neb (17) vyjádřený skládá se tudíž tudíž z následujících pohybů, o nichž lze v podobném smyslu jako dříve při rozboru rovinného pohybu říci, že jsou základními pohyby neb kinetickými prvky pohybu všeobecného.

a) Translace mající složky t_1, t_2, t_3 ve směrech os X, Y, Z.

b) Rotace mající složky r_1, r_2, r_3 okolo os X, Y, Z.

c) Expanse p okolo začátku souřadnic co středu.

Tyto tři pohyby mění polohu, směr a velkosť pohybujícího se útvaru, a rovnají se úplně obdobným pohybům v rovině. Tvar mění se pohybem složitějším nežli jest (v rovině) dilace symmetrická.

Pohyb ten vhodně může slouti:

d) deformace prostá, v nejužším slova smyslu*) a jest nrčen koeffcienty v_1, v_2, v_3, s_1, s_2, s_3. Rozborem tohoto pohybu, jenž mnohem jest složitější nežli první tři pohyby, budiž tato úvaha zakončena.

Kdyby v rovnicích (9) všechny koefficienty až na s_1 nule se rovnaly, měli bychom před sebou pohyb, jejž vhodně nazvati můžeme *symmetrickou dilací v prostoru* kolem osy X s centrál-

---

*) Ve spisech o kinematice a mechanice jednajících se obyčejně deformací prostou nazývá soubor pohybů c) a d), č. stejnorodý pohyb po vyloučení translace a rotace. Pohyb ten jest určen rovnicemi (7), v nichž jest

$$a_{10}=a_{20}=a_{30}=a_{23}-a_{32}=a_{31}-a_{13}=a_{12}-a_{21}=0.$$

Vyloučení expanse z tohoto pohybu a označení residua co deformace prosté jest věcně i etymologicky oprávněno.

nými rovinami XY a XZ. Podobně značí s_2 symmetrickou dilaci kolem osy Y o centrálných rovinách YZ a YX, a s_3 týž pohyb kolem osy Z, o centralných rovinách ZX a ZY. Obě symmetrické dilace s_1 a s_2 můžeme sice skládati v dilaci jedinou, všeobecně t. j. pro jakoukoli polohu os a centralných rovin obou dilací není to však možné.

Rovněž neskládají se všechny tři pohyby s_1, s_2, s_3, jsou-li od nuly rozdílné, v jedinou symmetrickou dilaci, poněvadž není vyhověno podmínce, o jejíž platnosti se snadno přesvědčíme:

$$s_1\, s_2\, s_3 = 0.$$

Koefficienty v_1, v_2, v_3 vyhovující patrně podmínce:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0, \tag{18}$$

neznačí každý pro sebe souměrné pošinutí. Významu toho nabývají však koefficienty jiné, q_1, q_2, q_3 odvozené z v_1, v_2, v_3 pomocí rovnic:

$$v_1 = q_3 - q_2, \quad v_2 = q_1 - q_3, \quad v_3 = q_2 - q_1. \tag{19}$$

Na základě rovnic (16) poznáváme, že jest:

$$\begin{aligned} 3q_1 &= a_{22} - a_{33} + q_0, \\ 3q_2 &= a_{33} - a_{11} + q_0, \\ 3q_3 &= a_{11} - a_{22} + q_0, \end{aligned} \tag{20}$$

kde značí q_0 zcela libovolnou veličinu, jež z výsledku následkem rovnic (19) vymizí. Koefficient q_1 značí tu patrně souměrné pošinutí kolem osy X, tak ale, že nyní centralné roviny půlí úhly rovin XY a XZ. Podobný význam mají koefficienty q_2 a q_3 vzhledem k osám Y a Z. Vidíme tudíž, že značí soubor koefficientů q_1, q_2, q_3, s_1, s_2, s_3 *šest* souměrných pošinutí, z nichž vždy dvě kolem os souřadnicových se dějí. Soubor týchž pohyb není však, jak již podotknuto symmetrickou dilací, nýbrž pohybem všeobecnějším, o jehož povaze se blíže poučíme úvahou následující. Položme si otázku, jak jsou umístěny:

1. body, jichž průvodič (přímka od začátku souřadnic k nim vedená) nemění svou *délku;*

2. body, jichž průvodič nemění svůj *směr.*

V prvém případě musi býti:

$$xu + yv + zw = 0,$$

tudíž dle (17), poněvadž nyní koefficienty t, r, p vylučujeme, t. j. klademe rovny nule:

$$v_1 x^2 + v_2 y^2 + v_3 z^2 + 2s_1 yz + 2s_2 zx + 2s_3 xy = 0, \tag{21}$$

Jest to patrně rovnice kužele, jehož vrchol se nalezá v začátku souřadnic. Následkem deformace (v, s) sklánějí se vytvořující jej přímky tak, že buď zvětšují neb zmenšují otvor kužele.

Osy tohoto kužele obsahují právě hledané body druhé, jichž průvodič nemění směr, nýbrž jen délku svou. Jsou-li koefficienty s rovny nule, stává se to patrným na první pohled. Všeobecně položme:

$$x = \alpha r, \quad y = \beta r, \quad z = \gamma r,$$

načež bude:

$$\begin{aligned} u &= (\alpha v_1 + \beta s_3 + \gamma s_2)r = \alpha' r \\ v &= (\alpha s_3 + \beta v_2 + \gamma s_1)r = \beta' r \\ w &= (\alpha s_2 + \beta s_1 + \gamma v_3)r = \gamma' r. \end{aligned}$$

Mají-li se body ty pošinovati na původní přímce, musí býti:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \mathrm{V},$$

aneb

$$\begin{aligned} \alpha(v_1 - \mathrm{V}) + \beta s_3 + \gamma s_2 &= 0 \\ \alpha s_3 + \beta(v_2 - \mathrm{V}) + \gamma s_1 &= 0 \\ \alpha s_2 + \beta s_1 + \gamma(v_3 - \mathrm{V}) &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Z rovnic těch plyne

$$\begin{vmatrix} v_1 - \mathrm{V}, & s_3, & s_2 \\ s_3, & v_2 - \mathrm{V}, & s_1 \\ s_2, & s_1, & v_3 - \mathrm{V} \end{vmatrix} = 0. \tag{23}$$

Rovnice ta má tři kořeny V_1, V_2, V_3; příslušné cosinusy směrnými α, β, γ určené tři směry stanoví tři přímky, jichž body se pouze ve směru týchž přímek pošinují. Rovnice (22) a (23) řeší jak známo problem, určiti osy plochy 2. stupně (21). Kdybychom osy ty volili za osy souřadnic, obdrželi bychom co rovnici téže plochy

$$\mathrm{V}_1 x^2 + \mathrm{V}_2 y^2 + \mathrm{V}_3 z^2 = 0,$$

a patrně platí pro kořeny rovnice (23) podminka:

$$\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2 + \mathrm{V}_3 = 0.$$

Při pohybu právě vyšetřovaném, při kterém se *pouze tvar* hmotné soustavy mění a který tudíž vhodně *deformací prostou* zváti můžeme, vyskytuje se vždy bod, který pohybu nemá a který *středem* deformace zváti můžeme. Bod ten jest vrcholem kužele pro deformaci charakteristického, jehož osy nemění svůj směr, nýbrž pouze délku svých částí, kdežto přímky kužel vytvořující mění pouze směr svůj, ne však délku částí svých. Všechny ostatní, omezené přímky útvaru mění obé, jak délku svou tak i směr svůj.

Zvláštní případ zde nastane, je-li prodloužení ve směru jedné osy, na př. V_1 rovno nule; kužel přechází tu ve dvojici kolmých k sobě rovin, v příslušné ose, zde na př. v ose X se protínajících, deformace prostá přechází tu v symmetrickou dilaci, jevící se tudíž co zvláštní případ její.

Uvedené zde čtyry prostorové pohyby: *translace, rotace, expanse* a *prostá deformace* jeví se co čtyry složky všeobecného pohybu čili co pravé *kinetické prvky* z týchž důvodů, které shora při rozboru rovinného pohybu byly uvedeny.

Pravidlo, že se pohyby stejnojmenné skládají opět jen ve stejnojmenné, doznává zde však výjimky tím, že se dvě rotace skládají všeobecně v šroubový pohyb co soubor rotace a translace. Uvážíme-li, že lze translaci pojati co jakýkoli z ostatních pohybů, při kterém význačný geometrický prvek (střed, osa) do nekonečna ustupuje, uvážíme-li dále, že se i deformace prostá skládá ze dvou jednodušších pohybů, totiž ze dvou dilací symmetrických, můžeme schema základních pohybů též následovně pozměniti.

I. Za zcela jednoduché základní pohyby lze považovati *expansi, rotaci* a *symmetrickou dilaci* (translaci co zvláštní případ kteréhokoli z těch pohybů).

II. Skládání stejnojmenných pohybů poskytuje dva další druhy základních pohybů: *šroubový pohyb* a *prostou deformaci.*

Význam různých druhů pohybu nejlépe se ovšem jeví v charakteristických jejich účincích, totiž ve změně polohy, směru, velkosti a tvaru. K další charakteristice slouží následující: Přímé linearné a rovinné plošné částice mohou měniti buď *směr* svůj, buď *velkosť* (délku a plošný obsah) neb konečně obé. Vzhledem k tomu lze říci:

a) translace nemění ani směr ani velkosť,

b) rotace (všeobecněji šroubový pohyb) mění směr, nemění však velkosť,

c) expanse nemění směr, mění však velkosť,

d) symmetrická dilace a všeobecněji prostá deformace mění i směr i velkosť oněch částic (ovšem beze změny směru a velkosti v celku).

Kriteria, dle nichž souditi můžeme, že jest pohyb rovnicemi (7) určený jedním ze základních pohybů, snadno si na základě rovnic (16) zjednáme.

a) Translace vyskytuje se, platí-li pro 9 koefficientů a_{mn}, kde $n > o$, rovnice:

$$a_{mn} = 0.$$

b) Rotace vyskytuje se, je-li:

$$a_{23} + a_{32} = a_{31} + a_{13} = a_{12} + a_{21}$$

$$= a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0,$$

a mimo to:

$$a_{23}a_{10} + a_{31}a_{20} + a_{12}a_{30} = 0.$$

Není-li této podmínce vyhověno, vyskytuje se *šroubový pohyb*. Značí totiž rovnice ta, že jest směr rotační osy, začátkem souřadnic procházející, kolmý na směr translace (a_{10}, a_{20}, a_{30}). V případě tom lze však jak známo, rotaci a translaci složiti co jedinou rotaci kolem rovnoběžné, určitě položené osy.

c) Expanse vyskytuje se, je-li:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \; a_{23} = a_{31} = a_{12} = a_{32} = a_{13} = a_{21} = 0.$$

d) Symmetrická dilace vyskytuje se, kdykoli je vyhověno podmínkám:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

$$a_{23} = a_{32}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_{12} = a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

První podmínka vylučuje expansi, následující tři rotaci.

Poslední dvě podmínky činí pohyb rovinným, při čemž dlužno v posledním determinantu druhou neb třetí řádku, rovná-li se identicky nule, nahraditi zbývající řádkou determinantu prvého (v. odst. IV.) Není-li podmínkám těm vyhověno, vyskytuje se *deformace prostá*; není-li pouze poslední podmínce vyhověno, vyskytuje se zvláštní spojení translace a symmetrické dilace, obdobné šroubovému pohybu. Příkladem této zvláštní odrudy prosté deformace jest pohyb:

$$u = a, \quad v = sz, \quad w = sy.$$

Body, jichž průvodiče mění pouze směr svůj, leží zde na hyperbolickém paraboloidu:

$$ax + 2syz = 0.$$

VI.

Další studium stejnorodého pohybu vyžadovalo by zejmena vyhledání *aequivalencí* dvou neb více skládajících se jednoduchých pohybů. Věty dotyčné vrcholí ve větě všeobecné, kterou lze bezprostředně vyčísti z rovnic (17), když jsme byli translační složky přeložením začátku souřadnic odstranili:

Všeobecný pohyb jest jediným způsobem aequivalentní souboru prosté deformace a expanse o společném středu, jakož i rotace kolem osy středem tím procházející.

Platí-li rovnice (10), vstupuje ovšem společný střed pohybu do nekonečna a nutno uvedenou větu vhodně modifikovati.

Vzhledem k rozboru zde, zejmena v odst. III. a V. podanému budiž poukázáno k pojednáním: O základních druzích pohybu. O aequivalencích základních druhu pohybu. O rozkladu stejnorodého pohybu v Zas. zpr. kr. č. Spol. nauk, r. 1885, kdež jsem o látce zde stručně a s některými změnami probrané obšírněji pojednal. Odst. IV. tvoří zároveň doplnění úvah §. 2. posledního pojednání. Rovnice tamnější (23), (24) a (25), vyjadřující kriteria rovinného pohybu, jsou identické s rovnicemi (11), (13) a s první rovnicí (12) přítomného pojednání, kriteria ta jeví se nedostatečnými v případě zde v odst. IV sub B. uvažovaném a musí býti nahražena rovnicemi (14) a (15).