Václav Řehořovský

O plochách rozvinutelných. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 4, 161--173

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109298`

Základnicí Pascalovy závitnice jest daná kruhová čára a pólem pevný bod b. U kardioidy jest bod b bodem vratným. Ohniska Descartesova ovalu leží na příčné čáře, procházející bodem b a středem dané kruhové čáry.

4. Probíhá-li rameno A úhlu (A, B) kruhovou čáru K_a která prochází bodem a, probíhá druhé rameno B (dle 1) jinou kruhovou čáru K_b, procházející pevným bodem b, který jest určen relací $bv = av$. Kruhová čára K_a má střed o_1 a K_b střed o_2.

Dvě a dvě tečny, vedené v homologických bodech zmíněných kruhových čar, protínají se v bodech, které leží na závitnici Pascalově.

Její základnicí jest kruhová čára proložená body o_1, v_2 v, pólem bod v a parametrem délka bv.*)

O plochách rozvinutelných.

Napsal

V. Řehořovský v Praze.

(Pokračování).

16. *Poloměr a střed koule oskulační.* Souřadnice středu koule oskulační určili jsme již v článku 10.; jsou udány vzorci (16) neb (17). Znajíce pak souřadnice středu, určíme snadno poloměr koule oskulační co vzdálenost středu jejího od příslušného bodu křivky vratu, kterýž určen jest rovnicemi (10) čl. 7.; označíme-li poloměr oskulační koule R_0, souřadnice bodu křivky vratu x, y, z a ony příslušného středu koule x_0, y_0, z_0, platí

$$R_0^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

aneb vložíme-li ze vzorců (10) a (17) příslušné hodnoty

$$R_0^2 = \left[\frac{\beta'}{\alpha'} - \varphi + \alpha \frac{D\left(\frac{\varphi'}{\gamma'}\right)}{D\left(\frac{\alpha'}{\gamma'}\right)} + \gamma \frac{D\left(\frac{\varphi'}{\alpha'}\right)}{D\left(\frac{\gamma'}{\alpha'}\right)}\right]^2$$

*) O Pascalově závitnici pojednáno ve spisovatelově spisu: „Pošinování geometrických útvarů“.

$$+\left[\frac{\alpha^2}{\alpha'}D\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)-\frac{D\left(\frac{\varphi'}{\gamma'}\right)}{D\left(\frac{\alpha'}{\gamma'}\right)}\right]^2+\left[\frac{\gamma^2}{\gamma'}D\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)-\frac{D\left(\frac{\varphi'}{\alpha'}\right)}{D\left(\frac{\gamma'}{\alpha'}\right)}\right]^2.$$

Vzorec tento pro praktické počítání jest poněkud složitý a proto jest výhodnější užíti k tomu známého vzorce, kde poloměr R_0 koule oskulační počítá se z poloměru křivosti R a kroucenosti R', totiž vzorec

$$R_0{}^2 = R^2 + \left(R'\frac{dR}{ds}\right)^2;$$

uvážíme-li, že

$$\frac{dR}{ds} = \frac{dR}{dt}\cdot\frac{dt}{ds},$$

a že dle článku 13,

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{1}{D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\cdot\sqrt{1+\alpha^2+\gamma^2}},$$

obdržíme nejprvé

$$\frac{dR}{ds} = -\frac{\frac{dR}{dt}}{D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\cdot\sqrt{1+\alpha^2+\gamma^2}}$$

a dále

$$R_0{}^2 = R^2 + \frac{\left(R'\frac{dR}{dt}\right)^2}{(1+\alpha^2+\gamma^2\left[D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\right]^2} \qquad (25).$$

Hodnoty R a R' určeny jsou vzorci (20) a (23) co funkce t takže tím i R_0^2 co funkce téže proměnné stanoveno jest.

17. Vzorců získaných pro R, R' a R_0 užíti lze k vyšetření některých zvláštních bodů křivky vratu; tak na př. patrno z (23), že $R' = \infty$ pro

$$\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha'' = 0, \qquad (26)$$

nestává-li se tím zároveň čitatel ve vzorci (23) roven nulle; rovnice (26) podává totiž ony hodnoty t, pro které poloměr kroucenosti a *současně* i poloměr koule oskulační jest nekonečně velký; v těchto bodech křivky vratu jest tedy úhel dvou soumezných oskulačních rovin roven nulle, t. j. tři po sobě jdoucí tečny aneb čtyry soumezné body nalezají se v jedné rovině. Rovina taková nazývá se *stationarní rovinou* křivky vratu a zastupuje v bodu tom kouli oskulační. Podobně stává-li takových hodnot t, pro které $R = 0$ a *zároveň* $R_0 = o$, procházejí bodem příslušným této hodnotě t tři soumezné tečny a čtyry soumezné roviny oskulační; bod takový sluje pak *stationarním bodem* křivky vratu. Jestliže však pro některé hodnoty t pouze $R = 0$ a R_0 má hodnotu konečnou od nully rozdílnou, obdrží se takové body křivky vratu, v kterých rovina oskulační jest rovinou tečnou koule oskulační, an průsek oskulační roviny s koulí, t. j. kruh křivosti se v bodech těch redukuje na bod.

18. Co příklad k užívání vzorců v čl. 10—17 odvozených volme *rozvinutelnou plochu šroubovou*, totiž plochu, jejíž křivkou vratu jest šroubovice. Křivka tato určena jest rovnicemi *)

$$\begin{aligned} x &= r \cos t, \\ y &= r \sin t, \\ z &= r a t, \end{aligned} \tag{27}$$

když značí r poloměr řídící kružnice kolmého válce, a tangentu úhlu sklonu šroubovice k rovině XY; osa válce volena co osa Z a šroubovice prochází bodem, kde řídící kružnice protíná kladnou osu X. Hodnoty pro α, β, γ, δ zjednáme si tímtéž spůsobem, jako v čl. 9; obdržíme tu

$$\alpha = -\operatorname{cotang} t, \quad \beta = \frac{r}{\sin t},$$

$$\gamma = -\frac{a}{\sin t}, \quad \delta = a r (t + \operatorname{cotang} t).$$

Rozvinutelná plocha šroubová určena tudíž rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} y &= -\operatorname{cotang} t \,.\, x + \frac{r}{\sin t}, \\ z &= -\frac{a}{\sin t}\, x + a r (t + \operatorname{cotang} t). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

V tomto příkladu jest

$$\alpha' = \frac{1}{\sin^2 t}, \quad \beta' = -\frac{r \cos t}{\sin^2 t},$$

$$\gamma' = \frac{a \cos t}{\sin^2 t}, \quad \delta' = a r \left(1 - \frac{1}{\sin^2 t}\right) = -\frac{a r \cos^2 t}{\sin^2 t},$$

a dále výraz v čl. 10. zavedený

*) Dr. F. J. Studnička: O počtu differencialním, str. 204. a násled. vyd. první.

$$\varphi = \frac{\beta'}{\alpha'}(1+\alpha^2+\gamma^2) - (\alpha\beta+\gamma\delta) = \frac{r\,a^2\,t}{sin\,t}.$$

Zavedeme-li příslušné hodnoty do vzorce (14), obdržíme

$$X - cotang\,t\,.\,Y - \frac{a}{sin\,t}\,.\,Z + \frac{r\,a^2 t}{sin\,t} = 0$$

co rovnici roviny normalné křivky vratu. Pro úhel sklonu roviny normalné a roviny XY obdrží se dle známých vzorců analytické geometrie prostorové

$$cos\,v = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}};$$

kterýž výraz na t nezávislý jest; z toho patrno, že veškeré roviny normalné uzavírají s rovinou XY úhel stálé velikosti, jak nutno, an i tečny křivky vratu k rovině XY stejně nakloněny jsou.

Pro vzdálenost počátku soustavy souřadné od roviny normalné podává se

$$p = \frac{r\,a^2\,t}{\sqrt{1+a^2}}$$

z rovnice té jde, že pro $t = 0$ jest též $p = 0$, t. j. rovina normalná bodu, v kterém šroubovice protíná osu X, prochází počátkem soustavy, obsahuje tudíž osu X; měníme-li počátek soustavy ve směru osy Z a počítáme-li zároveň t od onoho bodu šroubovice, který ve výšce počátku soustavy leží, bude vždy $p = 0$; z toho soudíme: *Rovina normalná šroubovice obsahuje vždy přímku, která jsouc rovnoběžná k rovině XY, protíná osu Z a prochází příslušným bodem šroubovice.*

Rozvinutelná plocha polarná určena jest rovnicemi (15); vložíme-li tam příslušné hodnoty, obdržíme

$$Y = -\,cotang\,t\,.\,X - \frac{r\,a^2}{sin\,t},$$

$$Z = \frac{1}{a\,sin\,t}\,X + r\,a\,(t + cotang\,t).$$

Rovnice tyto liší se jen konstantami a znameními od rovnic (28), jest tedy rozvinutelná plocha polarná opět *plocha šroubová;* její křivku vratu, t. j. geometrické místo všech středů koulí oskulačních podávají rovnice (16) neb (17); obdrží se tu

$$x = -\,r\,a^2\cos t,$$
$$y = -\,r\,a^2\sin t,$$
$$z = r\,a\,t,$$

kteréž rovnice shodujíce se opět co do tvaru s rovnicemi (27), představují šroubovici. Abychom polohu její vůči původní šroubovici poznali, transformujme soustavu souřadnou tak, aby rovnice její obdržely až na konstanty tvar rovnic (27); otočíme-li nejprvé celou soustavu kolem osy Z o 180^0 a počítáme-li novou proměnnou t' od nové polohy osy X, bude

$$t = \pi + t',$$

načež rovnice šroubovice přejdou v

$$x = r\,a^2 \cos t',$$
$$y = r\,a^2 \sin t',$$
$$z = r\,a\,\pi + r\,a\,t';$$

přeložíme-li dále počátek soustavy v kladném směru osy Z o délku $r\,a\,\pi$, bude

$$z' = z - r\,a\,\pi,$$

a rovnice šroubovice v nové soustavě

$$x = r\,a^2 \cos t',$$
$$y = r\,a^2 \sin t',$$
$$z' = r\,a\,t'.$$

Poněvadž rovnice tyto co do tvaru se shodují s rovnicemi (27), má šroubovice uvažovaná v nové soustavě tutéž polohu, jako šroubovice původní v soustavě staré. Zároveň shledáváme, že šroubovice ona nalezá se na válci poloměru $r\,a^2$ a že tangenta úhlu sklonu jejího k rovině XY jest $\frac{1}{a}$. Jest-li původní šroubovice nakloněna pod úhlem 45^0, t. j. $a = 1$, nalezá se šroubovice odvozená na tomtéž válci a má tentýž sklon jako původní, protíná však osu X v negativném směru jejím ve vzdálenosti r.

Rovnice hlavní normaly šroubovice jsou dle vzorců (18)

$$y = tang\,t\,.\,x,$$
$$z = a\,r\,t,$$

a rovnice binormaly dle vzorců (19)

$$y = -\,cotang\,t\,.\,x + \frac{r}{\sin t}$$
$$z = \frac{1}{a \sin t}\,x + \frac{r\,(a^2\,t \sin t - \cos t)}{a \sin t}.$$

Hlavní normaly jsou tudíž přímky rovnoběžné k XY a protínající osu Z; plocha zborcená, kterou vytvořují, jest pak plocha, která v deskriptivní geometrii známa pod jménem *pravoúhlé plochy šroubové.*

Průmět binormaly na rovinu XY stotožňuje se s průmětem stejnojmenným přímky povrchové, t. j. tečny šroubovice.

Pro poloměr křivosti obdrží se dle vzorce (20) výraz

$$R = -r(1 + a^2),$$

kdež ke znamení netřeba zřetele bráti, a pro souřadnice středu křivosti dle vzorců (21) hodnoty

$$x = -r a^2 \cos t,$$
$$y = -r a^2 \sin t,$$
$$z = \dot{r} a t,$$

tedy tytéž hodnoty jako pro souřadnice středu koule oskulační v tomto případu jest tedy kruh křivosti největším kruhem koule oskulační a rovina oskulační prochází středem jejím. Z toho pak dále plyne, že poloměr koule oskulační rovná se poloměru křivosti; výsledek ten podává též vzorec (25), an pro tento případ R konstantní jest a tedy

$$\frac{dR}{dt} = 0,$$

tak že

$$R_0 = R = r(1 + a^2).$$

Konečně obdržíme na základě vzorce (23) pro délku poloměru kroucenosti hodnotu

$$R' = \frac{1 + a^2}{a} r,$$

a pro souřadnice středu kroucenosti dle vzorců (24) výrazu

$$\xi = r\left[\cos t + \sqrt{1 + a^2} . \sin t\right],$$
$$\eta = r\left[\sin t - \sqrt{1 + a^2} . \cos t\right],$$
$$\zeta = r\left[a t + \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a}\right];$$

jak se snadno přesvědčiti lze, udávají rovnice tyto opět šroubovici na válci souosém s válcem původním, avšak poloměru $r\sqrt{2 + a^2}$, jejíž tangenta úhlu sklonu k rovině XY rovná se $\frac{a}{\sqrt{2 + a^2}}$. Geometrické místo veškerých středů kroucenosti jest tedy opět šroubovice.

Zvláštních bodů, o nichž v čl. 17. zmínka učiněna byla, šroubovice nemá.

19. Vzorců (20) a (23) pro délky poloměrů křivosti a kroucenosti, užíti lze též k řešení problémů obrácených; možno sobě totiž naopak položiti otázku, jaká jest plocha rozvinutelná, t. j. jakého tvaru jsou funkce $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, aby poloměry křivosti, kroucenosti atd. byly danými funkcemi proměnné t. Úlohy tohoto rázu jsou určity, jakmile dvě podmínky dány jsou, neboť čtyry plochu stanovící funkce $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou již především podmínkou (2) spojeny, mimo to lze však jednu z těchto funkcí voliti za neodvisle proměnnou samu, takže zbývá určiti pouze tři funkce ze tří rovnic. Rovnice tyto jsou differencialní a nebude tudíž vždy možno funkce $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ v konečném tvaru udati. V následujícím poznáme, jaké obtíže vyskytují se i v nejjednodušších případech sem patřících. Položme sobě na př. otázku: *Jaké ploše rozvinutelné náleží křivka vratu, jejíž poloměry křivosti i kroucenosti rovnají se stálé k?*

Dle vzorců (20 a (23) obdržíme tu rovnice

$$-D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\sqrt{\frac{(1+\alpha^2+\gamma^2)^3}{\alpha'^2+\gamma'^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2}}=k,$$

$$-D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\frac{\alpha'^2+\gamma'^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2}{\alpha'\gamma''-\gamma'\alpha''}=k,$$

mimo to platí

$$\alpha'\delta'=\beta'\gamma',$$

čímž úloha určena, poněvadž jednu z funkcí libovolně voliti lze.

Dělíme-li první rovnici druhou a odstraníme-li mocniny a jmenovatele, obdržíme differencialní rovnici mezi α a γ, totiž

$$(1+\alpha^2+\gamma^2)^3(\alpha'\gamma''-\gamma'\alpha'')^2=[\alpha'^2+\gamma'^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2]^3;$$

poněvadž jednu z funkcí libovolně voliti lze, učiňme

$$\alpha=-\operatorname{cotang} t,$$

načež

$$\alpha'=\frac{1}{\sin^2 t},\qquad \alpha''=-\frac{2\cos t}{\sin^3 t},$$

což vloženo do hořejší rovnice dá

$$(\gamma''\sin t+2\gamma'\cos t)^2(1+\gamma^2\sin t)^3$$
$$=(1+\gamma^2+\gamma'^2\sin^2 t+2\gamma\gamma'\cos t\sin t)^3;$$

z této rovnice jest nám určiti γ. Abychom toho snáze dosáhli, zaveďme novou proměnnou substitucí

$$\gamma\sin t=\eta',$$

z čehož dále

$$\gamma' \sin t + \gamma \cos t = \eta',$$
$$\gamma'' \sin t + 2\gamma' \cos t - \gamma \sin t = \eta'';$$

vložíme-li hodnoty za γ, γ', γ'' z těchto rovnic do hořejší rovnice, obdržíme tvar

$$(\eta'' + \eta)^2 (1 + \eta^2)^3 = (1 + \eta^2 + \eta'^2)^3,$$

a tu snadno poznáme, že jí náleží integral

$$\eta = \pm 1,$$

a tedy vrátíme-li se k původní funkci

$$\gamma = \frac{\pm 1}{\sin t}.$$

Dosadíme-li hodnoty za α a γ a jich derivace do první z rovnic, z nichž jsme vyšli, totiž

$$-D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\sqrt{\frac{(1 + \alpha^2 + \gamma^2)^3}{\alpha'^2 + \gamma'^2 + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')^2}} = k,$$

obdržíme nejprvé

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{k}{2} \cos t + c_1,$$

a z toho dále

$$\beta = -\frac{k}{2}\,\frac{1}{\sin t} - c_1 \operatorname{cotang} t + c_2;$$

užijeme-li konečně třetí základní rovnice

$$\frac{\delta'}{\gamma'} = \frac{\beta'}{\alpha'},$$

zjednáme si též

$$\delta = \pm \frac{k}{2} \operatorname{cotang} t \pm \frac{c_1}{\sin t} \pm \frac{k}{2} t + c_3,$$

v kterých rovnicích značí c_1, c_2, c_3 integrační stálé a současně horní neb dolní znamení platí.

Abychom se přesvědčili, zda-li obě znamení podržeti možná, užijme druhé rovnice základní, kteréž jsme dosud neupotřebili direktně; vložíme-li tam již vypočtěné hodnoty za α, β, γ a jich derivace, shledáme, že rovnici té vyhověno jest jen znamením hořejším, takže funkce vyhovující daným podmínkám jsou

$$\alpha = -\operatorname{cotang} t, \quad \beta = -\frac{k}{2}\,\frac{1}{\sin t} - c_1 \operatorname{cotang} t + c_2,$$
$$\gamma = \frac{1}{\sin t}, \quad \delta = \frac{k}{2} \operatorname{cotang} t + \frac{c_1}{\sin t} + \frac{k}{2} t + c_3.$$

Tím plocha rozvinutelná žádaných vlastností jest určena; křivka vratu této plochy jest dle rovnice (10) stanovena rovnicemi

$$x = -\frac{k}{2}\cos t - c_1,$$
$$y = -\frac{k}{2}\sin t + c_2,$$
$$z = \frac{k}{2}t + c_3;$$

transformujeme-li tyto souřadnice na novou soustavu o rovnoběžných osách, jejíž počátek má souřadnice

$$-c_1,\quad c_2,\quad c_3,$$

a zaměníme-li konečně kladný směr os X a Y za záporný, obdrží rovnice tvar

$$x = \frac{k}{2}\cos t,\quad y = \frac{k}{2}\sin t,\quad z = \frac{k}{2}t.$$

Porovnáme-li rovnice tyto s rovnicemi (27), shledáváme, že jest to šroubovice, pro kterou $r = \frac{k}{2}$ a $a = 1$, t. j., *křivka prostorová, pro kterou $R = R' = k$, jest šroubovice na kruhovém válci poloměru $\frac{k}{2}$, která s přímkami povrchovými válce uzavírá úhel 45°.*

Druhý, poněkud všeobecnější případ by byl ten, kde *poloměr křivosti křivky se rovná stálé k, poloměr kroucenosti pak jiné né stálé k_1.*

Základní rovnice tu jsou

$$-D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\sqrt{\frac{(1+\alpha^2+\gamma^2)^3}{\alpha'^2+\gamma'^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2}} = k,$$
$$-D\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\sqrt{\frac{\alpha'^2+\gamma'^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2}{\alpha'\gamma''-\gamma'\alpha''}} = k_1$$
$$\alpha'\delta' = \beta'\gamma'.$$

Řešení úlohy této jest zcela podobné onomu prvního případu.

Dělíme-li opět první rovnici druhou a odstraníme-li jmenovatele a odmocninu, obdržíme

$$(1+\alpha^2+\gamma^2)^3(\alpha'\gamma''-\gamma'\alpha'')^2 = \left(\frac{k}{k_1}\right)^2[\alpha'^2+\gamma'^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2]^3,$$

kteráž rovnice užitím těchže substituc jako dříve, totiž

$$\alpha = -\operatorname{cotang} t,\qquad \gamma \sin t = \eta,$$

přejde v

$$(\eta'' + \eta)^2 (1 + \eta^2)^3 = \left(\frac{k}{k_1}\right)^2 (1 + \eta^2 + \eta'^2)^3;$$

rovnici té náleží integral

$$\eta = \frac{k}{k_1},$$

při čemž z příčin v případu prvním uvedených ihned znamení záporné vynecháme.

Znajíce φ, obdržíme

$$\gamma = \frac{k}{k_1 \sin t},$$

a dále tímtéž způsobem jako dříve

$$\beta = -\frac{kk_1^2}{k^2 + k_2^2} \frac{1}{\sin t} - c_1 \operatorname{cotang} t + c_2,$$

a

$$\delta = \frac{k^2 k_1}{k^2 + k_1^2} \operatorname{cotang} t + \frac{kc_1}{k_1} \frac{1}{\sin t} + \frac{k^2 k_1}{k^2 + k_1^2} t + c_3,$$

kdež značí c_2 a c_3 integrační stálé.

Souřadnice křivky prostorové jsou pak

$$x = -\frac{kk_1^2}{k^2 + k_1^2} \cos t - c_1,$$

$$y = -\frac{kk_1^2}{k^2 + k_1^2} \sin t + c_2,$$

$$z = \frac{k^2 k_1}{k^2 + k_1^2} t + c_3,$$

aneb transformujeme-li opět na novou soustavu o rovnoběžných osách, jejíž počátek má souřadnice

$$-c_1, \quad c_2, \quad c_3,$$

a zaměníme-li pak kladné směry os X a Y za záporné,

$$x = \frac{kk_1^2}{k^2 + k_1^2} \cos t,$$

$$y = \frac{kk_1^2}{k^2 + k_1^2} \sin t,$$

$$z = \frac{k^2 k_1}{k^2 + k_1^2} t;$$

z rovnic těch poznáváme, že *hledaná křivka jest opět šroubovice na kruhovém válci poloměru* $r = \frac{kk_1^2}{k^2 + k_1^2}$, *které s přímkami povrchovými válce tvoří úhel, jehož tangenta se rovná* $\frac{k}{k_1}$.

Vyšetřme ještě případ třetí, totiž kde *poměr poloměrů křivosti a kroucenosti se rovná stálé k;* v případu tom obdržíme jen dvě základní rovnice, totiž

$$(\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha'')\sqrt{\frac{(1+\alpha^2+\gamma^2)^3}{[\alpha'^2+\gamma'^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2]^3}} = k,$$

$$\alpha,\delta' = \beta'\gamma',$$

takže jedna z funkcí zůstává neurčitou; zavedeme-li opět

$$\alpha = -cotang\, t, \quad \gamma \sin t = \eta,$$

přetvoří se první z rovnic v

$$(\eta'' + \eta)^2 (1+\eta^2)^3 = k^2 (1+\eta^2+\eta'^2)^3,$$

kteréž rovnici činí zadost integral

$$\eta = k,$$

načež

$$\gamma = \frac{k}{\sin t}.$$

Funkce α a γ jsou tím určeny, kdežto β a δ zůstávají neurčity a spojeny jsou toliko rovnicí

$$\alpha'\delta' = \beta'\gamma',$$

aneb dosadíme-li za α a γ hodnoty

$$\delta' = -k\beta' \cos t.$$

Pro souřadnice křivky žádané vlastnosti obdržíme vzorce

$$x = -\beta' \sin^2 t,$$
$$y = \beta + \beta' \sin t \cos t,$$
$$z = -k\beta' \sin t + \delta;$$

aby křivka byla určita, třeba zvoliti ještě jednu z funkcí β neb δ; avšak již z uvedených rovnic můžeme se přesvědčiti o tvaru jejím.

Přímka promítající libovolný bod x, y, z této křivky na rovinu XY má totiž rovnice

$$x = -\beta' \sin^2 t$$
$$y = \beta + \beta' \sin t \cos t,$$

a tečna v tomto bodu křivky rovnice

$$y = -cotang\, t\, x + \beta,$$
$$z = \frac{k}{\sin t} x + \delta;$$

nazveme-li úhel obou těchto přímek ω a stanovíme-li dle známých vzorců velikost jeho, shledáme, že

$$tang\, \omega = \frac{1}{k},$$

t. j. úhel, který křivka uzavírá s přímkami povrchovými svého promítajícího válce na XY jest konstantní, křivka jest tudíž *šroubovice na tomto válci;* válec sám jest libovolný dokud β neb δ není blíže dáno. Rovnice jeho obdržela by se vyloučením t z výrazů pro x a y křivky.

Další podobné úlohy, které by tuto položeny býti mohly, na př. kde

$$RR' = const. \quad \text{neb} \quad R \pm R' = const.$$

atd., vedou k differencialním rovnicím, v kterých se objevují derivace tří funkcí α, β, γ, nelze je tudíž řešiti, pokud další podmínka pro funkce ty dána není; dána-li taková podmínka, máme pak pro tři funkce α, β, γ dvě rovnice, takže zvolíme-li jednu z funkcí těchto co jistou funkci proměnné t aneb co proměnnou t samu aneb konečně co funkci ostatních dvou funkcí, můžeme pak ostatní dvě funkce z daných rovnic určiti, dovedeme-li tyto rovnice integrovati.

20. *Rektifikující plocha rozvinutelná křivky vratu.* Tečnou a binormalou v každém bodu křivky vratu určena jest rovina; veškeré tyto roviny zahalují novou plochu rozvinutelnou, v které též křivka vratu dané plochy rozvinutelné obsažena jest. Poněvadž pak binormala jest kolma ku rovině oskulační křivky vratu, jsou roviny tečné nové plochy rozvinutelné kolmy ku příslušným rovinám oskulačním křivky vratu a naopak; jest tedy křivka vratu geodätickou křivkou nové plochy rozvinutelné a přejde po rozvinutí jejím v přímku, za kterouž příčinou tato plocha nazývá se *rektifikující plochou rozvinutelnou.*

Rovnici plochy této si zjednáme spůsobem, jakým určují se rovnice ploch obalových vůbec. Plocha vytvořující jest zde rovina, určená tečnou a binormalou, aneb jinak, rovina obsahující tečnu a kolmá k rovině oskulační křivky vratu. Budiž rovnice této roviny

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0; \tag{1'}$$

aby rovina ta obsahovala tečnu křivky vratu

$$\eta = \alpha\xi + \beta,$$
$$\zeta = \gamma\xi + \delta,$$

nutno, aby koefficienty A, B, C, D vyhovovaly podmínkám *)

*) Dr. F. J. Studnička: Anal. geom. v prostoru str. 45.

$$
\begin{aligned}
A + B\alpha + C\gamma &= 0, \\
B\beta + C\delta + D &= 0,
\end{aligned}
\qquad (2')
$$

a aby rovina ta byla kolma k rovině oskulační, určené rovnicí (5), ještě další podmínce*)

$$(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')\,A - \gamma' B + \alpha' C = 0. \qquad (3')$$

Vyloučíme-li z rovnic (1′), (2′) a (3′) neznámé A, B, C, D, obdržíme

$$
\begin{vmatrix}
\xi, & \eta, & \zeta, & 1 \\
1, & \alpha, & \gamma, & 0 \\
0, & \beta, & \delta, & 1 \\
\alpha\gamma' - \gamma\alpha', & -\gamma', & \alpha' & 0
\end{vmatrix} = 0
$$

co rovnici roviny tečné nové plochy rozvinutelné; odečteme-li třetí řádek od prvního a rozvedeme-li determinant pak dle prvků prvního řádku, obdržíme rovnici tu v rozvinutém tvaru

$$
\begin{aligned}
\xi(\alpha\alpha' + \gamma\gamma') + (\eta - \beta)\,[\gamma(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') - \alpha'] \qquad (29) \\
- (\zeta - \delta)\,[\alpha(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') + \gamma'] = 0.
\end{aligned}
$$

Abychom konečně obdrželi rovnici plochy rozvinutelné, kterou tato rovnice obsahuje, třeba jen rovnici tuto dle t derivovati a z obou rovina pak t vyloučiti, aneb možná též rovnici (29) a její derivaci dle η a ζ řešiti, načež by plocha určena byla rovnicemi tvaru (1) jako plocha původní.

(Pokračování).

O základních zákonech psychofysických.

Napsal

J. **Kapras** v Brně.

(Dokončení.)

Správný spůsob odvození zákona psychofysického byl by tento:

Přísluší-li rozdílu popudovému ($\beta' - \beta$) rozdíl pocitový ($\gamma' - \gamma$), a je-li přední rozdíl jen znatelný ($k\beta''$), jest druhý stálý (C), tak že můžeme psáti:

---

*) Ibid. str. 25.