Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vilém Jung

Nový řetězec pro číslo π

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 4, 157--159

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109295

Nový řetězec pro číslo π.

Podává

Vilém Jung v Pardubicích.

Chceme-li vyjádřiti cyklometrické funkce $arc\,sin\,x$ aneb $arc\,cos\,x$ řetězcem nekonečným tvaru co možná pravidelného, nemožno nám jíti cestou všeobecnou, platící pro nekonečnou řadu obecného tvaru.[1])

Jsou totiž tu se vyskytující řady

$$arc\,sin\,x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{x^7}{7} + \ldots.$$

$$arc\,cos\,x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{x^7}{7} + \ldots.\right),$$

platící obě pro

$$\{x^2 \lesseqgtr 1, \text{ t. j. } 1 \leqq x \leqq -1\},$$

rázu dosti složitého, tak že by tu úprava řetězce byla dosti obtížnou.

Tolikéž nelze užíti přímo „relace Gaussovy", vztahující se ku proměně nekonečné řady rázu zvláštního[2]) v nekonečný řetězec, jelikož zmíněné řady nelze tak snadno na onen tvar převésti.

Abychom dospěli rychleji k cíli, užijeme vzorce[3])

$$(1) \qquad arc\,tg\,z = \cfrac{z}{1 + \cfrac{1^2z^2}{3 + \cfrac{2^2z^2}{5 + \cfrac{3^2z^2}{7 + \cfrac{4^2z^2}{9 + \cfrac{5^2z^2}{11 + \ldots}}}}}}$$

$$\text{pro } \{1 \geqq z \geqq -1\}$$

jakož i stejniny

[1]) Viz: *Schlömilch* „Handbuch der algebraischen Analysis". Dritte Auflage, pag. 303—305.

[2]) Ibid. pag. 307—311.

[3]) Ibid. pag. 316 nebo *Studnička* „Algebraické tvarosloví" pag. 169.

$$2\, arc\, tg\, z = arc\, \cos \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \text{ [4])} \tag{2}$$

a položme

$$\frac{1 - z^2}{1 + z^2} = x,$$

tak že

$$z^2 = \frac{1 - x}{1 + x}$$

čili

$$z = \pm \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.$$

Dvojí znamení této odmocniny jest výrazem vlastnosti $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

Pohybuje-li se z v předepsaných mezích — 1, 0, 1,
pohybuje se x v mezích . . . . 0, 1, 0.

Máme tedy po krátké úpravě, při čemž znamená x kladný ryzí zlomek:

$$arc\, \cos x = \pm 2 \cfrac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1 + \cfrac{1^2 \frac{1-x}{1+x}}{3 + \cfrac{2^2 \frac{1-x}{1+x}}{5 + \cfrac{3^2 \frac{1-x}{1+x}}{7 + \cfrac{4^2 \frac{1-x}{1+x}}{9 + \ldots\ldots}}}}}$$

$$\text{pro } \{ 1 \geqq x \geqq 0 \}$$

a zjednodušíme-li,

---

[4]) Položíme-li

$$2\, arc\, tg\, z = y,$$

plyne z toho

$$z^2 = tg^2 \frac{y}{2} = \frac{1 - \cos y}{1 + \cos y},$$

to jest

$$y = arc\, \cos \frac{1 - z^2}{1 + z^2} = 2\, arc\, tg\, z.$$

$$arc\cos x = \pm 2 \cfrac{\sqrt{1-x}}{1\sqrt{1+x} + \cfrac{1^2(1-x)}{3\sqrt{1+x} + \cfrac{2^2(1-x)}{5\sqrt{1+x} + \cfrac{3^2(1-x)}{7\sqrt{1+x} + \cfrac{4^2(1-x)}{9\sqrt{1+x} + \dots}}}}} \tag{3}$$

$$\text{pro } \{ 1 \geqq x \geqq 0 \}$$

Znamení $\left\{\begin{matrix}\text{kladné}\\ \text{záporné}\end{matrix}\right\}$ odpovídá, jelikož jest x kladný ryzí zlomek, oblouku $\left\{\begin{matrix}\text{prvého}\\ \text{čtvrtého}\end{matrix}\right\}$ kvadrantu.

Další nejblíže příbuzné cyklometrické funkce *arc cos* $(-x)$, *arc sin* x, *arc sin* $(-x)$ vyjádří se snadno pomocí *arc cos* x a stálé veličiny π a tedy pomocí řetězce (3), při čemž jest opět x kladný ryzí zlomek.

Otázka, ve kterém kvadrantu nutno vzíti oblouk, jehož goniometrická funkce jest známa, závisí od případů zvláštních.

Ze vzorce (3) jde na jevo, že pro $x \left\{\begin{matrix} > +1 \\ < -1 \end{matrix}\right.$ stává se oblouk *arc cos* x pomyslným

Z téhož vzorce plyne pro $x = \frac{1}{2}$

$$arc\cos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = \cfrac{2}{1.\sqrt{3} + \cfrac{1^2}{3\sqrt{3} + \cfrac{2^2}{5\sqrt{3} + \cfrac{3^2}{7\sqrt{3} + \dots}}}}$$

anebo

$$\frac{\pi}{2} = \cfrac{\sqrt{3}}{1 + \cfrac{1^2}{3.3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{3.7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{3.11 + \dots,}}}}}}$$

kde se již prozrazuje irracionálnost čísla π.