Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Emil Weyr

O involucích na křivkách třetího stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 4, 145--152

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109294`

O involucích na křivkách třetího stupně.

Podává

prof. Emil Weyr ve Vídni.

1. Zvolíme-li dvojný bod o křivky třetího stupně C_3 za bod počátečný a tečny bodu o za osy souřadné, tu zní rovnice křivky:

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 2Fxy = o.^{*)} \qquad (1)$$

Libovolný bod xy naší křivky lze určiti hodnotou u parametru jednoznačného, který opět může býti významu různého. Určíme-li za parametr u na příklad poměr paprsku bod křivky s bodem počátečním spojujícího, vzhledem k osám soustavy co paprskům základním t. j. položíme-li

$$y = ux, \qquad (2)$$

tož obdržíme po snadném výpočtu

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-2Fu}{A + 3Bu + 3Cu^2 + Du^3} \\ y &= \frac{-2Fu^2}{A + 3Bu + 3Cu^2 + Du^3} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Znamenají-li $u_1 u_2 u_3$ parametry tří bodů křivky C_3 na přímce ležících, jest vždy (viz l. c.)

$$u_1 u_2 u_3 = -\frac{A}{D}. \qquad (4)$$

Sestrojíme-li tečnu bodu u, protne nám tato křivku v bodě tangenciálním u' a bude dle (4):

$$u^2 u' = -\frac{A}{D}. \qquad (5)$$

Body obratu $i_1\ i_2\ i_3$ obdržíme z rovnice (4), položivše $u_1 = u_2 = u_3 = u$, tudíž řešením rovnice

---

*) Viz: O rovinných racionálních křivkách třetího stupně. Časopis pro pěstov. mathem. a fysiky, roč. III. pag. 24.

$$u^3 = -\frac{A}{D}. \qquad (6)$$

Značíce písmenou k arithmetickou hodnotu odmocniny $\sqrt[3]{-\frac{A}{D}}$, obdržíme pro body obratu parametry:

$$u' = k,\ u'' = k\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right),\ u''' = k\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) \qquad (7)$$

aneb kratčeji:

$$\left.\begin{array}{l} u' \\ u'' \\ u''' \end{array}\right\} = \alpha k, \qquad (7')$$

v kterémžto vzorci na místo α dosaditi musíme posloupně tři hodnoty třetí odmocniny z kladné jednotky.

Hodnoty tyto jsou jak známo $+1$ a kořeny kvadratické rovnice $\alpha^2 + \alpha + 1 = o$. Jelikož $u'u''u''' = -\frac{A}{D}$, nalezají se všecky tři body obratu na téže přímce J.

2. Transformujeme-li, třeba pomocí perspektivy, křivku C_3 tak, aby přímka J body obratu obsahující byla přímkou nekonečně vzdálenou, pak se zjednoduší rovnice křivky ještě více.

Položíme-li hodnotu parametru bodu obratu z rovnice (7′) do rovnice (3), obdržíme pro souřadnice bodu obratu výrazy, které po krátkém počtu lze vpraviti do tvaru:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\frac{2}{3}F}{B + Ck\alpha} \\[2ex] y = \dfrac{\frac{2}{3}Fk\alpha}{B + Ck\alpha} \end{array}\right\} \qquad (8),$$

kde opět vložíme $+1$, $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$ posloupně na místo α. Všecky tři body obratu vyskytnou se jen pak v nekonečné vzdálenosti, položíme-li $B = o$ $C = o$; tím obdrží rovnice křivky formu:

$$Ax^3 + Dy^3 + 2Fxy = o \; \ldots\ldots \; (9).$$

Rovnice (3) přejdou nyní v následující:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-2Fu}{A+Du^3} \\ y &= \frac{-2Fu^2}{A+Du^3} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Rovnice tečny křivky $\varphi(xy) = o$ zní

$$(\xi - x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = o\,;$$

zde však máme vzhledem k rovnici (9):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3Ax^2 + 2Fy$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3Dy^2 + 2Fx$$

z čehož majíce opět zřetel k (9):

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2Fxy.$$

Rovnice tečny v bodu x, y jest tudíž:

$$\xi(3Ax^2 + 2Fy) + \eta(3Dy^2 + 2Fx) + 2Fxy = o \tag{11}$$

aneb:

$$3A\xi x^2 + 3D\eta y^2 + 2Fxy + 2F\eta x + 2F\xi y = o \tag{11'}$$

Tážeme-li se po tečnách křivky C_3 libovolným bodem $\xi\eta$ procházejících, musíme, jak patrno, řešiti rovnice (9) a (11′) dle x a y. Rovnice 11′ náleží křivce druhého stupně — konické poláře bodu $\xi\eta$ vzhledem ku křivce C_3. Polára tato prochází bodem počátečným t. j. dvojným bodem křivky C_3 a protne tudíž křivku C_3 v čtyrech bodech, které jsou body dotyčné tečen bodem $\xi\eta$ procházejících.

Místo bodu ($\xi\eta$), jehož konická polára se rozpadá na dvé přímek, jest křivka Hesse-ho, příslušná naší křivce třetího stupně. Snadně si vyvineme rovnici křivky této. Podmínka, jenž splněna býti musí, má-li kuželosečka

$$\vartheta_{11}x^2 + \vartheta_{22}y^2 + 2\vartheta_{12}xy + 2\vartheta_1 x + 2\vartheta_2 y + \vartheta_0 = o$$

se skládati ze dvou přímek, zní:

$$\begin{vmatrix} \vartheta_{11} & \vartheta_{12} & \vartheta_1 \\ \vartheta_{12} & \vartheta_{22} & \vartheta_2 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_0 \end{vmatrix} = o.$$

Sestrojíme-li tento determinant pro kuželosečku (11′), obdržíme

$$\begin{vmatrix} 3A\xi & F & F\eta \\ F & 3D\eta & F\xi \\ F\eta & F\xi & o \end{vmatrix} = o$$

aneb provedeme-li výpočet:

$$3A\xi^3 + 3D\eta^3 - 2F\xi\eta = o; \tag{12}$$

toť rovnice křivky Hesse-ovy. Z rovnice (12) plyne ihned, že křivka tato jest opět třetího stupně s týmž bodem dvojným a s těmitéž tečnami co křivka C_3 v bodě tomto. Dále soudíme, že obě křivky mají společné body obratu.

Vedeme-li dvojným bodem obou křivek paprsek a jsou-li r, r' vzdálenosti dvojného bodu od bodu původní křivky a od bodu Hessiany na paprsku ležícího, shledáme snadně, že

$$r' = -\frac{1}{3} r.$$

2. Buďtež u_1 u_2 parametry dvou libovolných bodů křivky C_3 o nekonečně vzdálených bodech obratu. Souřadnice x_1, y_1, x_2, y_2, vyjádřeny rovnicemi (10) vložme do rovnice přímky $\overline{u_1u_2}$, kterou lze vpraviti do tvaru

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi & \eta \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = o;$$

po jednoduché transformaci obdržíme:

$$[A(u_1 + u_2) - Du_1^2u_2^2]\,\xi + [Du_1u_2(u_1 + u_2) - A]\,\eta + 2Fu_1u_2 = o \tag{13}$$

co rovnici přímky $\overline{u_1u_2}$.

Jsou-li u_1u_2 sdružené body křivky C_3, bude $u_2 = -u_1$, tudíž $u_1 + u_2 = o$ a rovnice (13) přejde do tvaru

$$Du_1^2u_2^2\xi + A\eta - 2Fu_1u_2 = o \tag{13'}$$

Toť jest rovnice přímky, spojující dva body sdružené. Položíme-li $u_1u_2 = \omega$, máme:

$$D\omega^2\xi + A\eta - 2F\omega = o$$

a snadno lze co rovnici obálky všech přímek tohoto druhu vyvinouti rovnici hyperboly:

$$\xi\eta = \frac{F^2}{AD}. \tag{14}$$

Kuželosečka, jejížto tečny spojují sdružené body křivky C_3, zove se kuželosečka Cayley-ova. Chceme-li seznati body společné křivce C_3 a kuželosečce Cayley'ho, vložme hodnoty (10) do rovnice poslední, čímž obdržíme:

$$\frac{4F^2u^3}{(A+Du^3)^2}=\frac{F^2}{AD}$$

čili

$$(A+Du^3)^2=4ADu^3$$

aneb

$$(A-Du^3)^2=0,$$

to jest dvakrát

$$u^3=\frac{A}{D}.$$

Avšak $\sqrt[3]{\frac{A}{D}}$ jsou parametry bodů sdružených bodům obratu a jelikož se každý dvakráte vyskytne, vidíme, že v bodech těchto kuželosečka Cayley'ho má styk s křivkou C_3.

3. Máme-li na křivce C_3 libovolnou kvadratickou involuci bodovou

$$u_1+u_2=\alpha u_1u_2+\beta, \qquad (14')$$

bude dle (13) rovnice přímky spojující dvé příslušných bodů:

$$[A(\alpha u_1u_2+\beta)-Du_1{}^2u_2{}^2)\xi+[Du_1u_2(\alpha u_1u_2+\beta)-A]\eta$$
$$+2Fu_1u_2=o$$

aneb zavedeme-li $u_1u_2=\omega$:

$$[A(\alpha\omega+\beta)-D\omega^2]\xi+[D(\alpha\omega^2+\beta\omega)-A]\eta+2F\omega=0$$

aneb

$$[D\alpha\eta-D\xi]\omega^2+[A\alpha\xi+D\beta\eta+2F]\omega+[A\beta\xi-A\eta]=0 \quad (15).$$

Obalující křivku přímky $\overline{u_1u_2}$ obdržíme, differencováním (15) dle ω a vyloučením ω pak z obou ronic; po differenciaci rovnice (15) obdržíme:

$$\omega=-\frac{A\alpha\xi+D\beta\eta+2F}{2(D\alpha\eta-D\xi)},$$

což vložíme-li do (15) dá

$$(A\alpha\xi+D\beta\eta+2F)^2-4(D\alpha\eta-D\xi)(A\beta\xi-A\eta)=0 \quad (15')$$

co rovnici kuželosečky zahalující veškeré polohy přímky $\overline{u_1u_2}$.

Uspořádáme-li rovnici poslední, obdrží tvar:

$$A(A\alpha^2+4D\beta)\xi^2+D(D\beta^2+4A\alpha)\eta^2-2AD(\alpha\beta+2)\xi\eta$$
$$+4AF\alpha\xi+4DF\beta\eta+4F^2=0 \qquad (15'').$$

Chceme-li vypočísti parametry průseků této kuželosečky s křivkou C_3, můžeme do (15″) vložiti hodnoty (10), čímž obdržíme po snadném počtu

$$D^2u^6-2D^2\beta u^5+D(D\beta^2+2A\alpha)u^4-2AD(\alpha\beta+1)u^3$$
$$+A(A\alpha^2+2D\beta)u^2-2A^2\alpha u+A^2=0$$

aneb
$$(Du^3 - D\beta u^2 + A\alpha u - A)^2 = o \qquad (16).$$
Z rovnice této plyne, že se kuželosečka (15″) křivky C_3 dotýká v třech bodech, jichžto parametry $u'u''u'''$ plynou z rovnice
$$Du^3 - D\beta u^2 + A\alpha u - A = o \qquad (16').$$
Na základě známých vlastností kořenů vidíme ihned, že
$$u'u''u''' = \frac{A}{D} \qquad (16'')$$
Výsledek posledních úvah lze takto vyjádřiti:

„Je-li na křivce C_3 kvadratická involuce bodová a spojíme-li každé dvé příslušných bodů přímkou, pak zahaluje tato kuželosečku (involuční), která se křivky C_3 třikráte dotýká.“

Každá kuželosečka, má-li s křivkou C_3 trojnásobný styk, jest kuželosečkou involuční. Dva body styku $u'u''$ můžeme libovolně na křivce C_3 zvoliti; třetí u''' plyne z rovnice (16″), totiž $u''' = \frac{A}{Du'u''}$. Použijeme-li opět relací mezi kořeny a koeficienty rovnice (16′), máme:
$$u' + u'' + u''' = \beta$$
$$u'u'' + u''u''' + u'u''' = \frac{A}{D}\alpha$$
aneb zavedeme-li hodnotu $u''' = \frac{A}{Du'u''}$
$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{A(u' + u'') + Du'^2u''^2}{Au'u''} \\ \beta &= \frac{D(u' + u'')u'u'' + A}{Du'u''} \end{aligned}\right\} \qquad (17).$$
Znajíce nyní hodnoty α, β, známe též rovnici involuce
$$u_1 + u_2 = \alpha u_1 u_2 + \beta,$$
jakož i rovnici (15″) kuželosečky dotýkající se křivky C_3 v bodech $u'u''u''$.

Z rovnice (16″) plyne
$$u'u''(-u''') = -\frac{A}{D},$$
t. j. bod u''' jest sdruženým bodem třetího průseku křivky C_3 s přímkou $\overline{u'u''}$.

4. Splynou-li body $u'u''$ v jediný bod u, bude se kuželosečka (15″) dotýkati křivky C_3 ve dvou nekonečně blízkých

bodech, t. j. kuželosečka ta protne C_3 v čtyrech nekonečně blízkých bodech; mimo to mají obě křivky jednoduchý ještě styk v bodě u''', který v tomto případě jest sdružený k bodu tangencialnímu bodu u.

Hodnoty α, β, jsou nyní:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{2A + Du^3}{Au} \\ \beta &= \frac{2Du^3 + A}{Du^2} \end{aligned}\right\} \qquad (17').$$

Vložením těchto hodnot do (14′), obdržíme rovnici příslušné involuce a vložením do (15″) rovnici příslušné involuční křivky, t. j. kuželosečky, která má s křivkou C_3 v bodě u čtyry nekonečně blízké body pospolu a mimo to ještě jednoduchý styk v bodě, který jest sdruženým k bodu tangencialnímu, bodu u.

5. Snadně si též vyvineme rovnice oněch tří kuželoseček, které protínají C_3 v šesti nekonečně blízkých bodech. Body styku kuželoseček těchto s křivkou jsou, jak známo, body sdružené bodům obratu. Parametry bodů obratu mají však, jak z rovnice (6) plyne, hodnoty třetí odmocniny $\sqrt[3]{-\frac{A}{D}}$ (viz též rovnice 7 a 7′). Chceme-li tedy obdržeti hodnoty α, β pro tyto šestibodové kuželosečky, musíme do rovnic (17′) vložiti

$$u = -\sqrt[3]{-\frac{A}{D}} = \sqrt[3]{\frac{A}{D}},$$

čímž bude

$$\alpha = 3\sqrt[3]{\frac{D}{A}},$$

$$\beta = 3\sqrt[3]{\frac{A}{D}}.$$

Rovnice šestibodové kuželosečky obdržíme, vložíme-li tyto hodnoty do rovnice (15″); po této substituci shledáme co rovnici šestibodové kuželosečky:

$$21\,A\sqrt[3]{AD^2}\,x^2 + 21\,D\sqrt[3]{A^2D}\,y^2 - 22\,AD\,xy + 12\,F\sqrt[3]{A^2D}\,x$$
$$+ 12\,F\sqrt[3]{AD^2}\,y + 4\,F^2 = o. \qquad (18)$$

Souřadnice středu jsou:

$$x = \frac{-3F}{5\sqrt[3]{A^2 D}}, \quad y = \frac{-3F}{5\sqrt[3]{AD^2}} \qquad (18')$$

Rovnice týkající se ostatních dvou šestibodových kuželoseček obdržíme, nahradíme-li $\sqrt[3]{\frac{A}{D}}$ ostatními dvěma hodnotami této třetí odmocniny.

O ustanovení vzorce pro ploský obsah trojúhelníku, jsou-li dány strany jeho.

Napsal

Augustin Pánek.

Známý vzorec pro vyjádření obsahu trojúhelníkového

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)\,s-c)$$

lze též vyvoditi na základě poučky součtové a sice takto:

Platí-li podmínečná rovnice

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \qquad (1)$$

jest

$$\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma,$$

nebo vyjádříme-li *sinus kosinusem*, též

$$\sin\alpha - \sin\beta\sqrt{1-\sin^2\gamma} - \sin\gamma\sqrt{1-\sin^2\beta} = 0. \qquad (2)$$

Rovnici tuto lze uvésti na tvar

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} = 0,$$

kteráž ve formě změrné čili racionální zní

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0.\text{*)}$$

Položíme-li tedy

$$x_1 = \sin^2\alpha,\ x_2 = \sin^2\beta(1-\sin^2\gamma),\ x_3 = \sin^2\gamma(1-\sin^2\beta),$$

obdrží rovnina (2) dle posledního vzorce tvar

---

*) Chceme-li rovnici tuto psáti ve tvaru determinantu, uveďme ji nejprve na tvar

$$(x_1+x_2-x_3)(-x_1+x_2+x_3) - 2x_1(-x_1+x_2-x_3) = 0,$$

načež bude žádaný determinant

$$\begin{vmatrix} x_1+x_2-x_3, & -x_1+x_2-x_3 \\ 2x_1 & , -x_1+x_2+x_3 \end{vmatrix} = 0.$$