Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Sucharda

O zvláštním případě nulové korrelace

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 2, 89--100

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109284`

O zvláštním případě nullové korrelace.

Napsal

Dr. Ant. Sucharda, t. č. ve Štrasburku.

1. Již *Staudtem* bylo k tomu poukázáno, že lze jednoduchým prostorovým pětiúhelníkem určiti *system nullový* (Nullsystem) čili *nullovou korrelaci* (Nullcorrelation), v níž každá z pěti stran onoho pětiúhelníka jest samodružna a tudíž každý roh přidružen rovině, která jej spojuje s oběma jeho sousedními, t. j. s rohem bezprostředně předcházejícím a následujícím. Vztahujeme-li totiž dva prostory takovým způsobem recipročně na sebe, že bodům *abcde* jednoho přísluší resp. roviny *eab, abc, bcd, cde, dea* druhého, jest patrně straně $\overline{ab}$ přidružena průsečnice rovin *eab*, *abc*, sdružených bodům *a*, *b*, tou však jest přímka $\overline{ab}$ sama, je tedy strana tato přímkou samodružnou a podobně i čtyři ostatní. Že recipročná tato soustava v pravdě jest systemem nullovým, snadno se pozná*), povážíme-li, že by v případě opačném musila býti geometrickým místem bodů, ležících na příslušných rovinách, plocha druhého stupně, tak řečená direkční plocha (Ordnungsfläche) konjektivných těchto prostorů recipročných, která by však nutně obsahovala strany $\overline{ab}$ $\overline{bc}$ $\overline{cd}$ $\overline{de}$ $\overline{ea}$ pětiúhelníka svrchu řečeného. Ale toho mysliti nelze, protože by na př. rovina *abc* plochu tuto protínala nejen v přímkách $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, nýbrž i v určitém bodě přímky $\overline{de}$, což jest nemožno. Nelze-li tedy v předloženém případě připustiti direkční plochu kvadratickou, nezbývá než případ druhý, kde totiž každý bod jednoho prostoru jest v rovině, která mu přísluší v prostoru druhém. A to právě jest případ předložený. Každý bod prostoru jest pak *nullovým bodem* příslušné

*) Reye, Die Geometrie der Lage II. díl 3. vyd. pag. 168.

roviny jím procházející, každá rovina prostoru jest *nullovou rovinou* určitého svého bodu. Způsobem svrchu uvedeným jest tedy stanoven system nullový čili nullová korrelace, kteréhož poslednějšího názvu prof. Reye zhusta užívá.

Ve svých výkladech o tomto předmětu poznamenal prof. Reye, že každému jinému jednoduchému pětiúhelníku prostorovému, jehož rohy jsou tyže body *abcde*, přísluší ovšem jiný system nullový, že vzájemnost jejich dosud nebyla vyšetřována a že úkol ten asi není snadný. Přesvědčil jsem se brzy o pravdivosti posledního tvrzení; to je také příčinou, proč příspěvek, jejž tuto předkládám, týká se případu tak velmi specialního, kdy totiž body *abc* jsou rohy trojúhelníka rovnostranného, body pak *de* leží souměrně dle roviny *abc* v kolmici vztyčené uprostřed trojúhelníka toho k jeho rovině.

2. Buďtež především vytčeny všechny různé jednoduché pětiúhelníky, danými pěti rohy určené.

Vycházíme-li stále od rohu *a*, zbývá pak permutovati jen ostatní čtyři; polovina z obdrženého počtu dává žádaný počet různých pětiúhelníků, ježto pětiúhelníky

$$a \mid bcde \qquad a \mid edcb$$

jsou totožné. I jest tedy různých pětiúhelníků 12, a jsou tyto:

abcde	*abecd*	*acdbe*
abced	*abedc*	*acebd*
abdce	*acbde*	*adbce*
abdec	*acbed*	*adcbe*.

Skupina bodová *abcde*, již jsme zvolili, jest orthogonalně souměrná dle rovin *abc*, *adc*, *bde*, *cde*. To jest příčinou, že mezi dvanácti těmito pětiúhelníky jsou některé shodné, některé souměrné, čímž ovšem šetření naše značně se usnadní.

Vycházejíce od prvního pětiúhelníka *abcde*, bez obtíží se přesvědčíme, že jest souměren

dle roviny	*ade*	s pětiúhelníkem	*acbde*,
„	„	*bde*	„	*abced*,
„	„	*cde*	„	*abedc*.

Podobně poznáme, že jest pětiúhelník *acebd* souměren

dle	roviny	*ade*	s pětiúhelníkem	*abecd,*
„	„	*bde*	„	*acdbe,*
„	„	*cde*	„	*adbce.*

Dále možno poznati, že lze pětiúhelník *abdec* převésti v *abcde,* otočíme-li jej kol osy $\overline{de}$, hledíce od *d* ku *e*, ve smyslu kladných rotací tak, až přejde jeho roh *a* v roh *b* pětiúhelníka *abcde.*

Rovněž tak poznáme, že pětiúhelník *acbed* splyne s *abcde*, otočíme-li onen kol osy $\overline{de}$, hledíce od *d* ku *e*, ve smyslu záporných rotací tak, až splyne jeho roh *b* s rohem *a* pětiúhelníka prvního.

Taktéž lze pětiúhelník *adcbe* převésti v *acebd*, otočíme-li onen kol osy $\overline{de}$, hledíce od *d* ku *e*, ve smyslu kladných rotací tak, až splyne jeho roh *a* s rohem *b* pětiúhelníka *acebd.*

Konečně lze pětiúhelník *abdce* převésti v *acebd*, otočíme-li onen kol osy $\overline{de}$, hledíce od *d* ku *e*, ve smyslu záporných rotací, až jeho roh *a* splyne s rohem *c* pětiúhelníka *acebd.* Shledáváme takto, že ze všech dvanácti pětiúhelníků vytknouti lze zvláštní dva, totiž *abcde* a *acebd*, s nimiž ostatní jsou buďto orthogonalně souměrny dle některé z rovin *ade*, *bde*, *cde*, nebo dokonce shodny, ovšem tak, že teprve po jistém otočení kol osy $\overline{de}$ s nimi splynou.

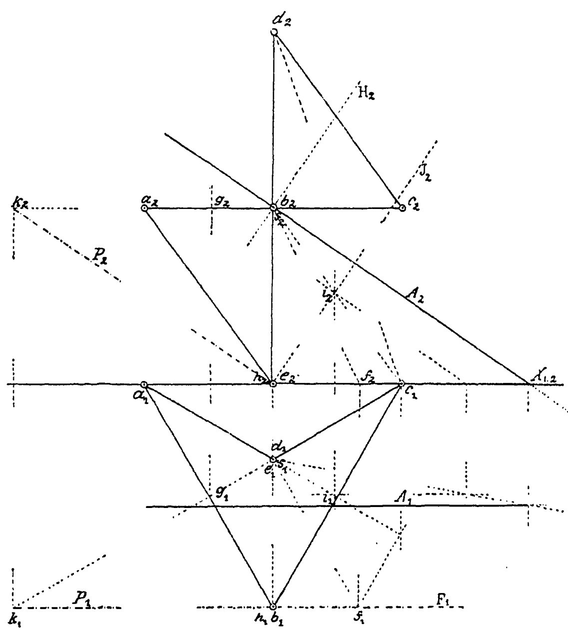
3. Učiníme-li si nyní úkolem, stanoviti hlavní osy a konstanty nullových korrelací, těmito dvanácti pětiúhelníky určených, jest na bíle dni, že postačí provésti příslušná šetření pouze vzhledem ku dvěma pětiúhelníkům právě vytčeným.

Konstanty nullových korrelací, příslušných pětiúhelníkům korrespondujícím, budou dojista absolutně stejné, osy jejich pak obdržíme užitím souměrnosti nebo příslušným otočením z os, hledících k oběma pětiúhelníkům základním.

Vycházejíce od pětiúhelníka *abcde* (obr. 1.), tažme se tedy především, kterak lze stanoviti hlavní osu příslušné nullové korrelace. Myslím, že se tu nejsnáze dojde cíle postupem následujícím:

Jest známo, že každá přímka nullové korrelace, jejíž polara čili přímka sdružená, jest v nekonečnu, slove *průměrem* této korrelace, každá rovina, jejíž pol (čili nullový bod) jest v nekonečnu, že zove se *rovinou průměrovou.*

Všechny tyto přímky i roviny procházejí polem čili nullovým bodem úběžné roviny, z čehož následuje pravda již *Moebiem* vyslovená, že jsou průměry nullové korrelace mezi sebou i s rovinami průměrovými rovnoběžny. Je dále známo, že nullové body rovnoběžných rovin vyplňují průměr, jehož polara splývá s úběžnou přímkou společnou těmto rovinám. Mezi všemi průměry



Obr. 1.

jest jediný A, který obsahuje nullové body rovin k němu kolmých. Toť *hlavní osa* (Hauptaxe) příslušné nullové korrelace. Tato hlavní osa jest arci především průměrem, a tudíž s ostatními průměry rovnoběžná, určeme tedy napřed jeden z nich. Toho dojdeme, stanovíme-li dvě roviny průměrové. Průsečnice jejich bude průměrem. Průsečnicí nullových rovin na př. *bae, bcd* budiž přímka $\overline{bf}$, přímkou s ní sdruženou jest spojnice jejich bodů nullových, tedy přímka $\overline{ac}$, jelikož a, c jsou podle podmínky nullovými body těchto rovin. Otáčí-li se rovina přímkou $\overline{bf}$ procházející kolem této přímky, protíná přímku $\overline{ac}$ v příslušných bodech nullových, z čehož následuje, že stane se rovinou průměrovou, zaujme-li polohu s $\overline{ac}$ rovnoběžnou. Takto nabudeme tedy průměrové roviny F. Podobně, určíme-li průsečnici rovin *abc* a *cde*, nabudeme přímky $\overline{cg}$, s níž sdružena jest zase spojnice nullových bodů těchto rovin, totiž přímka $\overline{bd}$. Rovina přímkou $\overline{cg}$ procházející a rovnoběžná s přímkou $\overline{bd}$, jest průměrovou rovinou G. Průsečnice $\overline{hk}$ rovin F a G jest průměrem P nullové korrelace.

Připomeňme nyní ještě, že všechny přímky, které v libovolné rovině ležíce, procházejí jejím bodem nullovým, jsou přímkami samodružnými této soustavy nullové, nebo dle Staudtova označení *přímkami řídícími* (Leitstrahlen). Každá totiž rovina proložená takovou přímkou má v ní svůj bod nullový, takže přímka ta se svojí sdruženou se sjednocuje. Co tu řečeno, platí ovšem i o rovinách kolmých k hledané hlavní ose vůči jejich bodům nullovým, jež, jak víme, v této ose leží. Každým takovým bodem prochází celý svazek přímek k ní kolmých, řídících to přímek nullové korrelace. Libovolná rovina R prostoru seče hlavní osu v určitém bodě m. Tímto jde tedy nutně jedna její přímka V, k řídícím náležející, průsečnice to roviny R s nullovou rovinou bodu m. Avšak rovina R má dle předešlého svůj vlastní bod nullový někde v přímce V. Následovně můžeme tvrditi: V každé rovině prostoru jest obecně jedna řídící přímka nullové soustavy, která hlavní osu kolmo protíná, jakož i: všechny řídící přímky nullové korrelace, které jsou s hlavní osou různoběžny, protínají ji v úhlu pravém.

Známe-li tedy rovinu nějakou i její bod nullový, kromě toho pak běh osy hlavní, můžeme v ní sestrojiti onu řídící přímku, která hlavní osu seče.

Proložíme-li na př. v případě, který jest základem našeho uvažování, bodem b rovinu H kolmou k průměru P a určíme-li její pronik s rovinou *abc*, bude průsečná přímka $\overline{bs}$ přímkou řídící, protože jde v rovině té nullovým jejím bodem, a bude hlavní osu kolmo protínati. Podobně protne rovina J, jdoucí bodem e a kolmo k průměru P, nullovou rovinu aed tohoto bodu v přímce $\overline{ei}$, jež tolikéž jest řídící přímkou, která hlavní osu seče v úhlu pravém. Určíme-li konečně osu mimoběžek $\overline{bs}$ $\overline{ei}$, nabudeme tedy žádané hlavní osy A, jež k nullové korrelaci náleží.

4. K početářskému stanovení těchto relací volme rohy abc, jež určují rovnostranný trojúhelník, v rovině s XY rovnoběžné tak, aby $\overline{ac}$ připadlo do roviny XZ, roh b do roviny YZ, pak budou rohy d, e v rovnoběžce s osou Z. Zvolíme-li

$$\overline{ab} = \overline{bc} = \overline{ca} = a$$

a vzdálenosti rohů d a e od roviny abc rovny b, budou pravoúhlé souřadnice těchto rohů tyto:

$$a\,(-\frac{a}{2}, 0, b) \qquad b\,(0, \frac{a}{2}\sqrt{3}, b) \qquad c\,(\frac{a}{2}, 0, b)$$

$$d\,(0, \frac{a}{6}\sqrt{3}, 2b) \qquad e\,(0, \frac{a}{6}\sqrt{3}, 0).$$

Rovnice průměrové roviny F bude pak

$$y = \frac{a}{2}\sqrt{3},$$

rovnice průměrové roviny G

$$2bx - 2b\sqrt{3}\,y + 2az - ab = 0,$$

tudíž rovnice průměru P:

$$\begin{aligned} 2y - a\sqrt{3} &= 0 \\ bx + az - 2ab &= 0, \end{aligned}$$

rovnice přímky $\overline{bs}$ budou

$$x = 0, \; z = b$$

a rovnice přímky $\overline{ei}$

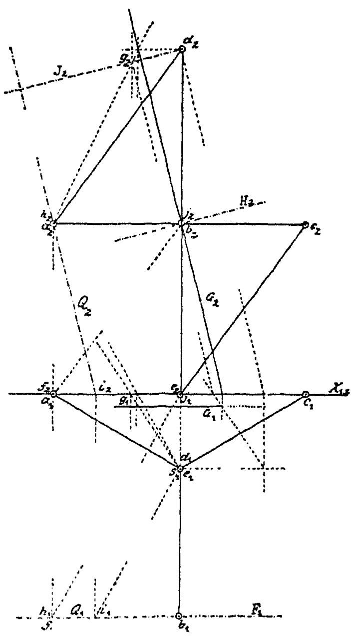
$$\begin{aligned} ax - bz &= 0 \\ 2x - 2y\sqrt{3} + a &= 0, \end{aligned}$$

takže hlavní osa A bude míti rovnice

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$$

$$y = \frac{a(a^2 + 3b^2)}{2\sqrt{3}\,(a^2 + b^2)}.$$

Při druhém pětiúhelníku *abcde* (obr. 2.) podobně postupujíce, určeme napřed průsečnici $\overline{bf}$ rovin *bda*, *bec*, potom přímkou tou rovinu rovnoběžnou ku přímce $\overline{ed}$ s ní sdružené; tato rovina F jest rovinou průměrovou; potom průsečnici $\overline{ej}$ rovin *ebd*, *eca*, a touto přímkou rovinu rovnoběžnou ku sdružené přímce $\overline{bc}$.



Obr. 2.

Nabudeme takto druhé roviny průměrové L, průsečnice $\overline{hi}$ obou jest průměrem Q. Konečně proložme bodem b rovinu H kolmou k průměru a určeme její průsečnici s rovinou *abc*, čímž nabudeme přímky $\overline{bs}$, pak bodem *d* rovinu J kolmou k průměru a její průsečnici s rovinou *adb*, čímž nabudeme přímky $\overline{dg}$. Osa mimoběžek $\overline{bs}$, $\overline{dg}$ jest hledanou hlavní osou *G* příslušné nullové korrelace.

Rovnice průměrové roviny F jest

$$y = \frac{a}{2}\sqrt{3},$$

rovnice průměrové roviny L pak

$$6bx + 2\sqrt{3}\,by + az - ab = 0,$$

rovnice průměru *Q* jsou tedy

$$\begin{aligned} 2y - a\sqrt{3} &= 0 \\ 6bx + az + 2ab &= 0; \end{aligned}$$

rovnice přímky $\overline{bs}$ jsou

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ z &= b \end{aligned}$$

a rovnice přímky $\overline{dg}$

$$\begin{aligned} 2(ax - 6bz) + a^2 + 12b^2 &= 0 \\ 6b\sqrt{3}y - az + ab &= 0, \end{aligned}$$

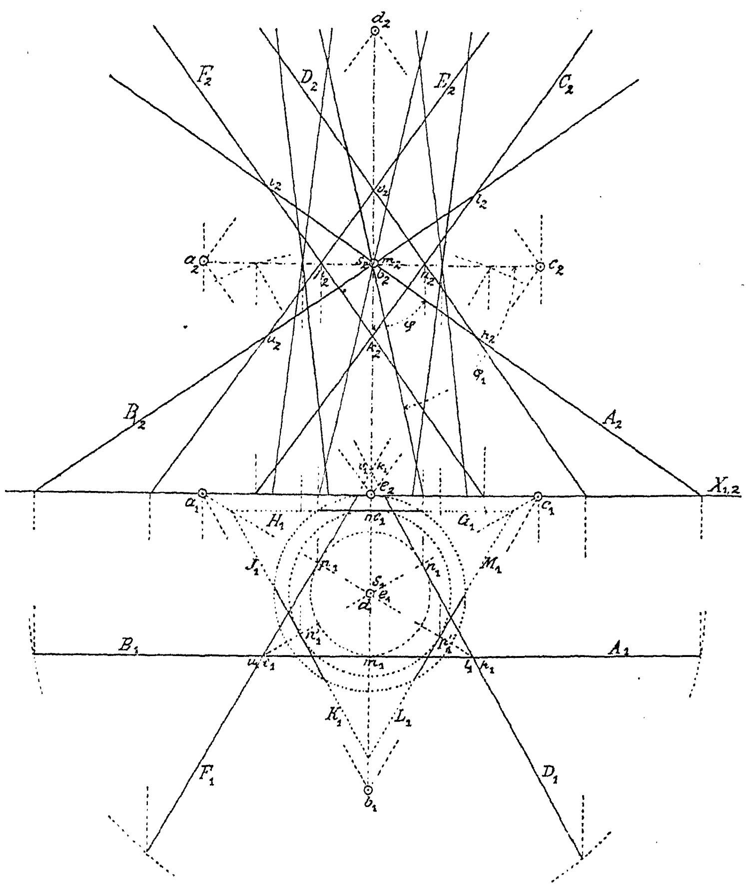
takže hlavní osa *G* dána jest rovnicemi

$$\frac{6x}{a} + \frac{z}{b} = 1$$

$$y = \frac{a^3\sqrt{3}}{2(a^2 + 36b^2)}.$$

Možno nyní bez obtíží stanoviti též hlavní osy, příslušné nullovým korrelacím, určeným ostatními pětiúhelníky o rozích *abcde*, a usouditi o vzájemné poloze těchto os (obr. 3.).

Vzhledem k tomu, co bylo z počátku pověděno o souměrnosti, po případě o shodnosti těchto pětiúhelníků, snadno poznáme, že tvoří hlavní osy dvě skupiny po šesti. K prvním šesti náleží hlavní osa *A* nullové korrelace, určené pětiúhelníkem *abcde*, k druhým hlavní osa *G* oné, jež určena jest pětiúhelníkem *acebd*. Osy *A* a *B* protínají se spolu v bodě *m*, ležícím ve výšce $\overline{ms}$ trojúhelníka *abc* a jsou orthogonalně souměrny dle roviny *bdc*, podobně osy *C*, *D* a *E*, *F* protínají se s ostatními



Obr. 3.

dvěma výškami trojúhelníka *abc* resp. v bodech *n*, *p*, jsouce orthogonalně souměrny dle rovin *cde* a *ade*. Lze je obdržeti z *A* a *B* otočením těchto dvou kol osy $\overline{de}$ resp. o 120° nebo 240°.

Jsou přímkami rotačního hyperboloidu, jehož osou jest přímka $\overline{de}$, středem střed s trojúhelníka abc; jeho kružnice zúžení má poloměr r a plošné jeho přímky svírají s jeho osou úhel φ*). Každá z těchto os protíná dvě z ostatních, i tvoří tyto osy prostorový šestiúhelník o rozích *hikluv*, orthogonalně souměrný dle rovin abc, ade, bde, cde, jehož protější strany se protínají v bodech mnp na kružnici zúžení hyperboloidu řečeného. Zcela obdobné lze vysloviti o ostatních šesti osách $GHIKLM$. Hyperboloid, na němž leží, jest soustředný s předešlým, a má s ním společnou rotační osu. Poloměr jeho kružnice zúžení jest $\frac{a}{6}\sqrt{3} - r_1$, jeho plošné přímky svírají s osou úhel $(90^0 - \varphi_1)$. Také tyto osy tvoří tedy prostorový šestiúhelník souměrný dle rovin prve řečených, protější jeho strany protínají se v bodech $m'n'p'$. Tyto leží zase na příslušné kružnici zúžení a na výškách trojúhelníka abc.

5. Zbývá ještě vyšetřiti konstanty uvažovaných nullových korrelací.

Značí-li r vzdálenost libovolné řídící přímky od hlavní osy A a φ úhel obou těchto přímek, jest, jakož známo, výraz $c = r \operatorname{tg} \varphi$ stálým pro celou korrelaci a zove se její *konstantou.* V našem případě jsou všechny strany uvažovaných pětiúhelníků zároveň řídícími přímkami, užijeme-li tedy v případu prvním (obr. 1.) strany $\overline{de}$, bude se r rovnati úsečce jedné výšky trojúhelníka abc a bude

$$r = \frac{ab^2\sqrt{3}}{3(a^2+b^2)},$$

kdežto $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$, takže

$$c = \frac{a^2b\sqrt{3}}{3(a^2+b^2)}$$

bude konstantou korrelace, určené pětiúhelníkem $abcde$. V případě druhém (obr. 2.) volme za podobným účelem stranu $\overline{ac}$ příslušného pětiúhelníka.

Tu jest pak

*) Veličiny r φ r_1 φ_1 určeny budou v odst. následujícím.

$$r_1 = \frac{a^3\sqrt{3}}{2(a^2+36b^2)},$$

kdežto $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{6b}{a}$, takže

$$c_1 = \frac{a^2b\sqrt{3}}{a^2+36b^2}$$

jest konstantou korrelace, určené pětiúhelníkem *abdce*. Že tím i konstanty všech ostatních korrelací jsou dány, jest zřejmo. Každá z nich má konstantu buď c nebo c_1 podle toho, zdali pětiúhelník ji určující korresponduje s prvním nebo druhým z pětiúhelníků základních.

Položíme-li $b = a$, vychází ze vzorců předešlých

$$c = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \qquad c_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2.37},$$

tudíž

$$c : c_1 = 37 : 3;$$

zvolíme-li b tak, aby všech pět rohů pětiúhelníka leželo na kouli, bude $b = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, tudíž

$$c = \frac{a}{4}, \qquad c_1 = \frac{a}{13},$$

tedy

$$c : c_1 = 13 : 4.$$

Učiníme-li $b = a\sqrt{\frac{2}{33}}$, bude

$$c = c_1 = \frac{a\sqrt{22}}{35};$$

v případě tomto všechny nullové korrelace mají *stejnou* konstantu.

Uvažujíce v odst. 2. o souměrnosti, resp. shodnosti dvanácti různých pětiúhelníků, daných rohy *abcde*, shledali jsme, že rovina souměrnosti *abc* nepřišla tu k platnosti. Z toho následuje, že i tehdy, kdyby rohy d, e, jež leží na kolmici vztyčené uprostřed trojúhelníka abc k jeho rovině, nebyly souměrny dle roviny této, daly by se pětiúhelníky převésti na dva typy základní.

Všechny ostatní úvahy byly pak zcela obdobny těm, jež jsme právě vykonali; rovnice uvedené v odst. 4. a výrazy pro r a c ovšem nabývají pak tvarů složitějších.

Několik úvah, hledících k osovému komplexu ploch druhého stupně.

Napsal

Dr. **Ant. Sucharda**, t. č. ve Štrasburku.

Zabývaje se osovým komplexem plochy druhého stupně, připadl jsem na některé drobné úlohy, jejichž řešení si tuto dovoluji předložiti.

1. „Které jest geometrické místo polů os komplexního kužele plochy druhého stupně, jehož střed jest v některé rovině hlavní?"

Vycházejme od centrické plochy F^2, jejíž střed budiž v počátku o soustavy pravoúhlé, osy v osách souřadných. Jest známo*), že každým bodem r prostoru prochází obecně ∞^1 os této plochy a že tvoří tyto osy komplexní plochu kuželovou druhého stupně. Budeme ji krátce nazývati komplexním kuželem. Kužel ten jest recipročným útvarem parabolického svazku os, obsažených v rovině R, polarné jeho středu r. Poněvadž každý průměr plochy F^2 jest její osou, prochází kužel řečený též středem o plochy této, a poněvadž také všechny kolmice k hlavním rovinám plochy F^2 jsou osami, obsahuje kužel ten kolmice ku všem třem hlavním rovinám plochy F^2. Z toho následuje, že jest kuželem rovnostranným podle Schröterova označení. Snadno se dokáže, že se rozpadá ve dvě roviny, jestliže jeho střed r obsažen jest v některé z hlavních rovin plochy F^2. Víme totiž, že všechny přímky každé hlavní roviny náležejí k osovému komplexu plochy. Je-li tedy bod r v hlavní rovině na př. XY,

*) Reye, „Die Geometrie der Lage" III. vyd. 2. díl p. 142.