Alois Strnad
Poznámka o čtyřstěnu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 2, 146--147

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109282`

Poznámka o čtyrstěnu.

Napsal

Alois Strnad,
ředitel c. k. realky v Kutné Hoře.

Jsou-li A, B, C, D ploské obsahy stěn čtyrstěnu *abcd*, a jsou-li stěnové úhly

$$(BC) = \alpha,\ (CA) = \beta,\ (AB) = \gamma,$$

jest

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2BC\cos\alpha - 2CA\cos\beta - 2AB\cos\gamma.$$

Tuto větu, která jest stereometrickou obdobou cosinové věty o trojúhelníku rovinném, lze vyvoditi takto:

Označme délky hran

$$\overline{da} = a,\quad \overline{db} = b,\quad \overline{dc} = c$$

a úhly jimi sevřené

$$\sphericalangle bdc = \alpha_1,\quad \sphericalangle cda = \beta_1,\quad \sphericalangle adb = \gamma_1;$$

mimo to budiž

$$\overline{bc} = a_1,\quad \overline{ca} = b_1,\quad \overline{ab} = c_1.$$

Potom jest

$$a_1^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha_1$$
$$b_1^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta_1$$
$$c_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma_1$$

a obsah stěny *abc* jest

$$D = \frac{1}{4}\sqrt{(a_1+b_1+c_1)(a_1+b_1-c_1)(b_1+c_1-a_1)(c_1+a_1-b_1)};$$

lze také psáti:

$$D^2 = \frac{1}{16}[(a_1 + b_1)^2 - c_1^2][c_1^2 - (a_1 - b_1)^2]$$
$$= \frac{1}{16}[4a_1^2b_1^2 - (a_1^2 + b_1^2 - c_1^2)^2].$$

Dle vzorců hořejších jest však

$$\begin{aligned} a_1^2b_1^2 = c^4 - 2c^3(b\cos\alpha_1 + a\cos\beta_1) \\ + c^2(a^2 + b^2 + 4ab\cos\alpha_1\cos\beta_1) \\ - 2abc(a\cos\alpha_1 + b\cos\beta_1) + a^2b^2, \end{aligned}$$
$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = 2(c^2 - bc\cos\alpha_1 - ca\cos\beta_1 + ab\cos\gamma_1).$$

Užijeme-li těchto hodnot, nabude výraz pro D podoby

$$\begin{aligned} D^2 = \frac{1}{4}[b^2c^2\sin^2\alpha_1 + c^2a^2\sin^2\beta_1 + a^2b^2\sin^2\gamma_1 \\ - 2a^2bc(\cos\alpha_1 - \cos\beta_1\cos\gamma_1) \\ - 2ab^2c(\cos\beta_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha_1) \\ - 2\,abc^2(\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_1)]. \end{aligned}$$

Mějme však na zřeteli následující relace známé z trigonometrie rovinné a sférické:

$$A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha_1, \quad B = \frac{1}{2}ca\sin\beta_1, \quad C = \frac{1}{2}ab\sin\gamma_1,$$
$$\cos\alpha_1 - \cos\beta_1\cos\gamma_1 = \sin\beta_1\sin\gamma_1\cos\alpha,$$
$$\cos\beta_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha_1 = \sin\gamma_1\sin\alpha_1\cos\beta,$$
$$\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_1 = \cos\alpha_1\cos\beta_1\cos\gamma;$$

dle těchto shledáváme, že jest

$$a^2bc(\cos\alpha_1 - \cos\beta_1\cos\gamma_1) = ac\sin\beta_1 . ab\sin\gamma_1 . \cos\alpha = 4\,BC\cos\alpha,$$
$$ab^2c(\cos\beta_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha_1) = ba\sin\gamma_1 . bc\sin\alpha_1 . \cos\beta = 4\,CA\cos\beta,$$
$$abc^2(\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_1) = cb\sin\alpha_1 . ca\sin\beta_1 . \cos\gamma = 4\,AB\cos\gamma$$

a tudíž, jak svrchu vysloveno,

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2BC\cos\alpha - 2CA\cos\beta - 2AB\cos\gamma.$$