Augustin Pánek

Vypočítání troúhelníku, dány-li jsou tři strany nebo dvě strany a úhel jimi sevřený

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 3, 124--131

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109280`

všeobecný vzorec tu jest

$$x = \sqrt[n]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 \pm p^n}} + \sqrt[n]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 \pm p^n}},$$

kterýž pro $n = 3$ obsahuje v sobě známý vzorec *Cardanův*, řešící rovnice stupně třetího, jež možná vždy uvésti na tvar obecný

$$x^3 \pm 3px + q = 0.$$

Co platí zde všeobecně, platí při vyšších rovnicích jen v případech zcela zvláštních.

Vypočítávání trojúhelníku, dány-li jsou tři strany nebo dvě strany a úhel jimi sevřený.

Podává

Augustin Pánek.

1. Nazveme-li při trojúhelníku libovolném ABC (obr. 5.) strany a, b, c, úhly protilehlé α, β, γ a prodloužíme-li na př. stranu $AC = b$, aby $CD = CB = a$, a vedeme-li konečně spojnici BD, obdržíme dle Carnotovy věty

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 - 2 \,.\, \overline{AD} \,.\, \overline{DB} \,.\, \cos\frac{\gamma}{2}\,.$$

Poněvadž

$$AD = AC + CD = b + a,$$

$$DB = 2a \cos\frac{\gamma}{2},$$

nabude svrchní věta tvaru

$$c^2 = (b + a)^2 + 4a^2 \cos^2\frac{\gamma}{2} - 4\,(b + a)\, a \cos^2\frac{\gamma}{2}$$

anebo

$$c^2 = (b + a)^2 - 4ab \cos^2\frac{\gamma}{2}\,. \qquad \text{(I)}$$

Ze vzorce (I) plyne

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(b + a)^2 - c^2}{4ab} = \frac{1}{4ab} \,.\, D_1 D_2,$$

nebo známý vzorec

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\,, \qquad (1)$$

značí-li obvod trojúhelníka

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}=a+b+c=2s, \qquad (k)$$

pročež

$$D_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}=a+b-c=2(s-c). \qquad (l)$$

Podobně obdržíme, jak povědomo, týmže činem anebo cyklickou záměnou, druhé dva vzorce pro $\cos\frac{\beta}{2}$ a $\cos\frac{\alpha}{2}$, kdež bude znamenati

$$D_3=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & -b & -c \end{vmatrix}=a-b+c=2(s-b), \qquad (m)$$

$$D_4=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & -b & c \end{vmatrix}=-a+b+c=2(s-a). \qquad (n)$$

Dle obr. 6. jest

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{DB}^2+2\,\overline{AD}\,.\,\overline{DB}\,.\,\sin\frac{\gamma}{2}\,,$$

a poněvadž

$$AD=AC-DC=b-a$$

$$DB=2a\sin\frac{\gamma}{2}\,,$$

bude tedy

$$c^2=(b-a)^2+4a^2\sin^2\frac{\gamma}{2}+4(b-a)\,a\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

čili

$$c^2=(b-a)^2+4ab\sin^2\frac{\gamma}{2}\,. \qquad (\mathrm{II})$$

Z posledního vzorce plyne

$$\sin^2\frac{\gamma}{2}=\frac{c^2-(b-a)^2}{4ab}=\frac{1}{4ab}\,.\,D_3\,D_4$$

a tedy

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}. \tag{2}$$

Snadno lze napsati i druhé dva známé vzorce pro $\sin\frac{\beta}{2}$ a $\sin\frac{\alpha}{2}$.

Dělíme-li rovnici (1) rovnicí (2), nabudeme

$$\cot^2\frac{\gamma}{2} = \frac{D_1 D_2}{D_3 D_4} = \frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}$$
$$= \frac{s^2(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)^2}$$

anebo

$$\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{s(s-c)}{\varDelta} = \frac{s-c}{r}, \tag{3}$$

značí-li $\varDelta$ ploský obsah trojúhelníku r, poloměr kruhu do trojúhelníka vepsaného.

Dány-li jsou tedy strany, určují se úhly trojúhelníku *nejpohodlněji* dle známých *vzorců cotangentových.*

$$\varDelta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad r = \frac{\varDelta}{s},$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{r}(s-a), \; \cot\frac{\beta}{2} = \frac{1}{r}(s-b), \; \cot\frac{\gamma}{r} = \frac{1}{r}(s-c).$$

Chceme-li vyjádřiti i poloměry dotýčných kruhů vnějších,*) uvažme, že dle obr. 5. jest:

$$AF = b + CF = b + CH$$
$$AJ = c + BJ = c + BH$$

a poněvadž $AF = AJ$, obdržíme sečtením těchto dvou rovnic

$$2AF = a + b + c$$

a tedy $\qquad AF = s$**),

pročež $\qquad O_a F = AF.\tan\frac{\alpha}{2},$

---

*) Srovnej: *Vervaet,* Příspěvek k řešení ploských trojúhelníků. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Roč. V. pag. 57.

**) Totéž nabudeme, jak povědomo, z rovnic

$$y + z = a, \; x + z = b, \; x + y = c,$$

aneb $$r_a = s.\,tan\,\frac{\alpha}{2},\qquad (4)$$
značí-li r_a poloměr kruhu, který se strany a vně dotýká.

Máme-li zřetel k rovnici (3), nabývá (4) formy

$$r_a = \frac{\triangle}{s-a},$$

a podobně

$$r_b = s.\,tan\,\frac{\beta}{2} = \frac{\triangle}{s-b},$$

$$r_c = s.\,tan\,\frac{\gamma}{2} = \frac{\triangle}{s-c}.$$

Vzorce cotangentové dají se geometricky vyložiti dle obr. 5. a sice jeví se postupně jich pravé strany jakožto poměry

$$\frac{AK}{KO},\ \frac{KB}{KO}\ \text{a}\ \frac{LC}{LO}\left(\text{aneb též}\ \frac{JB}{SJ}\right)$$

Poznámka. Abychom vyjádřili determinantem ploský obsah trojúhelníka, dány-li jsou strany jeho, použijme známého vzorce z planimetrie

$$\triangle^2 = s\,(s-a)\ (s-b)\ (s-c)\ ^{*})$$

aneb

$$-16\triangle^2 = (a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a-b-c)$$

a tedy dle vzorců *(k)*, *(l)*, *(m)*, *(n)*

$$-16\triangle^2 = D_1\,D_2\,D_3\,D_4. \qquad (5_1)$$

Předposlední vzorec lze uvésti dále ve tvar

$$-16\triangle^2 = [(a+b)^2 - c^2]\ [(a+b)^2 - c^2]$$
$$= (a^2+b^2-c^2+2ab)\ (a^2+b^2-c^2-2ab)$$
$$= (a^2+b^2+c^2)^2 - 4a^2b^2$$

aneb

---

sečtením, tak žé povstane

$$x+y+z=s.$$

Odečteme-li první tři rovnice od poslední, vyplývá

$$x=s-a,\ y=s-b,\ z=s-c,$$

kdež

$$AK=x,\ KB=y,\ LC=z.$$

*) Srovnej *Studnička* „O vzorci vyjadřujícím plochu trojúhelníka pomocí stran jeho.“ Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Roč. I. pag. 253.

$$16\,\Delta^2 = \begin{vmatrix} 2a^2, & a^2+b^2-c^2 \\ a^2+b^2-c^2, & 2b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & b^2 \\ 0, & -2a^2, & c^2-a^2-b^2 \\ 0, & c^2-a^2-b^2, & -2b^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2, & -a^2, & c^2-a^2 \\ 1 & b^2, & c^2-b^2, & -b^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

čili konečně na známý vzorec pro určení ploského obsahu trojúhelníka

$$-16\,\Delta^2 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \text{*)}. \qquad (5_2)$$

2. Dány-li jsou v trojúhelníku dvě strany a úhel jimi sevřený, možno podle vzorce (I) neb (II) vypočítati stranu třetí.

Ze vzorce (I) jde dále

$$c^2 = (b+a)^2 \left\{ 1 - \frac{4\,ab\cos^2\frac{\gamma}{2}}{(b+a)^2} \right\},$$

při čemž zlomek poslední jest ryzým, neboť

$$\cos\frac{\gamma}{2} < 1, \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} < 1, \text{**)}$$

poněvadž by byla jinak strana hledaná c laterální; proto možno položiti

---

*) Srovnej: Prof. Dr. *Studnička*, Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Roč. II., 1873. pag. 194.

Dostor, Le trièdre et le tédraèdre, avec application des déterminants. Grunert Archiv, svaz. 57., 1875.

Dostor vůbec i ukázal, jak lze determinantů v trigonometrii s prospěchem užíti na vyvození rozmanitých vzorců.

**) Z relace

$$\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} < 1,$$

plyne též

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2},$$

což odjinud povědomo, že totiž arithmetický průměr dvou čísel jest větší než jich průměr geometrický.

$$\frac{2\sqrt{ab}\cos{}^1\!/_2\gamma}{b+a} = \sin\varphi \text{ aneb } \cos\psi.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do svrchního vzorce, dostaneme

buď $\qquad c = (b+a)\cos\varphi$

aneb $\qquad c = (b+a)\sin\psi. \qquad (6)$

Rovnice (II) lze též psáti ve tvaru

$$c^2 = (b-a)^2\left\{1 + \frac{4ab\sin^2\frac{\gamma}{2}}{(b-a)^2}\right\},$$

kdež položíme

$$\frac{2\sqrt{ab}\sin\frac{\gamma}{2}}{b-a} = \tan\varphi_1 \text{ aneb } \cot\psi_1.$$

Takto nabude vzorec pro stranu c hodnoty

$$c = \frac{b-a}{\cos\varphi_1}$$

aneb $$c = \frac{b-a}{\sin\psi_1}. \qquad (7)$$

V příkladech praktických lze užíti jednoho ze čtyř vzorců (6), (7), o čemž vždy rozhoduje úhel φ, φ_1 aneb ψ, ψ_1, takže pak víme, který z těchto vzorců podává bezpečnější výsledek*).

Liší-li se strany a, b málo od sebe, doděláme se správnějšího výsledku pro třetí stranu c, takto: ze vzorce (II) vyjmeme druhý člen za činitele před závorku takže

$$c^2 = 4ab\sin\frac{\gamma}{2}\left\{1 + \frac{(b-a)^2}{4ab\sin^2\frac{\gamma}{2}}\right\};$$

položíme-li

$$\frac{b-a}{2\sqrt{ab}\sin\frac{\gamma}{2}} = \tan\omega \text{ aneb } \cot\tau,$$

obdržíme

*) Obyčejně vyskytuje se v učebních knihách první vzorec (7) jako na př. *Močník-Hora,* Měřictví, str. 186., *Schlömilch,* Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maasses, a j.

$$c = \frac{2\sqrt{ab}\,\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\omega}$$

aneb
$$c = \frac{2\sqrt{ab}\,\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\tau} \qquad (8)$$

Geometrický význam vzorce (6) dotvrzuje obr. 5., totiž, že strana c jest odvěsna pravoúhelného trojúhelníka, jehož přepona $= a + b$, při čemž jest úhel φ k téže odvěsně přílehlý a ψ protilehlý.

Geometrický význam vzorce (7) dotvrzuje obr. 6., kdež c jest přepona pravoúhelného trojúhelníka, jehož odvěsna $= b - a$ a úhel φ_1 jest k téže ψ_1 protilehlý.

Vzorec (8) možno vyložiti geometrickým způsobem z obr. 7. takto: učiňme $AE = BC = a$ v trojúhelníku ABC a sestrojme nyní měřickou úměrnou $\sqrt{ab}$ t. j. $AF = AK$; veďme dále $KJ \parallel DB$, rozpolme stranu $AB = c$ v bodě L a učiňme

$AJ = AH = \frac{c}{2}$, pak $JX \perp JA$ aneb $HY \perp AH$.

Z trojúhelníka AJK jde $\overline{AJ}\,.\,\sin\tau = \overline{AK}\,.\,\sin\frac{\gamma}{2}$, a poněvadž $\tau = {}^1/_2\,\pi - \omega$, jest $\sin\tau = \cos\omega$, protož dá poslední rovnice vzorec (8).

Z trojúhelníka AHK lze též tento vzorec odvoditi, sluší však poznamenati, že $\tau' = \frac{\pi}{2} + \omega$, tedy i $\sin\tau' = \cos\omega$ jako dříve*).

Jiný vzorec pro vypočítání strany c, jsou-li dány dvě strany a úhel jimi sevřený, naleza se v *Grunert-ově* Archivu, svaz. 48., str. 242. pod názvem: Miscellen. Tento geometricky odvozený vzorec, kterýž jest vlastně totožný se známými vzorci *Mollweide-ovými*, podal *Lindemann* ze *Strengnäss-u* (Švédsko) ve své trigonometrii pag. 7. a totéž uveřejnil pak *Lars Phragmén* v Tidskrift för Matematik och Fysik, utgiven af *Dillner Hultmann* och *Tchalen* 1868.

---

*) Jaké geometrické významy *úhly pomocné* φ, φ_1 a ω mají, pověděl mně laskavě pan ředitel *M. Pokorný*.

Vzorce, kterými řešíme úkol právě zmíněný, vyložil jsem pod názvem: O některých pončkách trigonometrických*) a sice jsou to vzorce

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\gamma}{2},$$

$$c=\frac{(a-b)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} \text{ neb } c=\frac{(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}. \qquad (9)$$

Jiné odvození podal též v *Grunertově* Archivu, svaz. 52., str. 358. *Rump* ze *Coesfeldu* pod názvem: „Ueber zwei trigonometrische Sätze“, kterýž určuje dvojím způsobem stranu c.

Dr. *Reidt* si stěžuje v pojednání „Ueber einige Auflösungs-Methoden der ebenen Trigonometrie“[1]), které se výhradně vztahuje k tomuto případu, že *Mollweide-ovy* vzorce se tak necení a nejsou užívány, jak by býti měly. Článek tento čelí proti *Brockmannově* pojednání nazvaném: Die „separirte“ Tangentenformel[2]), kterýžto vzorec by měl, jak povědomo, v našem případě tvar:

$$\tan\beta=\frac{b\sin\gamma}{a-b\cos\gamma}. \qquad (10)$$

O témž případě řešení trojúhelníku zmiňuje se *Hoüel* (Die sogenannte „separirte Tangentenformel und die Hilfswinkel) v ten smysl, že možno užíti buď tohoto vzorce neb vzorců Mollweide-ových podle toho, jak který z nich výhodnějším býti se vidí. [3]).

Proti *Reidt-ovi* hájí se *Brockmann*, ač s výsledkem pochybným v odpovědi: Noch ein Mal die separirte Tangentenformel [4]).

Pozoruhodna jest recense *Scherling-ova* knihy *Reidt-ovy* „Trigonometrie“, Berlin 1875., v níž uznávaje jinak výbornost knihy této, vytýká, že se v ní nenacházejí vzorce naše (I) a (II) [5]).

*) Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Roč. III

[1]) *Hoffmann,* Zeitschrift für mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht 3. Jahrgang. 1872, pag. 144—150.

[2]) Tamtéž. 2. Jahrgang. pag. 421.

[3]) Tamtéž. 3. Jahrgang. pag. 377.

[4]) Tamtéž. 4. Jahrgang. pag. 36.

[5]) Tamtéž. 7. Jahrgang. pag. 140.