Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

Příspěvek k theorii differenciálních rovnic lineárních

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 1, 9--13

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109271

Příspěvek k theorii differenciálních rovnic lineárních. [1]

Napsal **Karel Zahradník.**

1. Dána budiž úplná lineární rovnice differenciální druhého řádu

$$y'' + \varphi(x)\, y' + \psi(x)\, y = f(x). \tag{1}$$

Jsou-li u, v dva partikulární integrály příslušné differenciální rovnice zkrácené

$$y'' + \varphi(x)\, y' + \psi(x)\, y = 0, \tag{2}$$

a w partikulární integrál dané rovnice (1), je

$$y = c_1 u + c_2 v + w$$

obecný integrál rovnice (1) a představuje síť křivek. Každá křivka té sítě určena je dvěma body. Každým bodem roviny probíhá ∞^1 křivek sítě, tvořících svazek křivek a jednotlivá křivka svazku určena jest přímkou tím bodem probíhající, jako tečnou křivky v tom bodě.

Budiž $M_0(x_0 \mid y_0)$ zmíněný bod a $S(\xi \mid \eta)$ střed křivosti křivky integrální jdoucí tím bodem, pak jest

$$y'_0 = -\frac{\xi - x_0}{\eta - y_0}$$

směrnice tečny bodu M_0 té křivky. Jelikož pro ten bod M_0 platí

$$y''_0 = f(x_0) - \varphi(x_0)\, y'_0 - \psi(x_0)\, y_0, \tag{3}$$

obdržíme za souřadnice $(\xi \mid \eta)$ bodu S

$$\begin{aligned} \xi &= x_0 - \frac{y'_0(1 + y'^2_0)}{f(x_0) - \varphi(x_0)\, y'_0 - \psi(x_0)\, y_0} \\ \eta &= y_0 + \frac{1 + y'^2_0}{f(x_0) - \varphi(x_0)\, y'_0 - \psi(x_0)\, y_0}. \end{aligned} \tag{4}$$

Každé hodnotě y'_0, t. j. každé bodem M_0 probíhající přímce, přísluší určitá křivka svazku a tím i určitý střed křivosti S a naopak vytknutím bodu S je dána ta přímka bodem M_0 probíhající, jako kolmice na $\overline{M_0 S}$ v bodě M_0, a tím i příslušná křivka

[1]) Uveřejněno z části ve Zprávách Král. české společnosti nauk v Praze 1905.

svazku. Vezmeme-li tudíž y'_0 jako racionální parametr bodu S, a stavíme-li $y'_0 = t$, obdržíme za místo (S) bodů S racionální křivku třetího stupně a čtvrté třídy, jejíž rovnice

$$\xi = x_0 - \frac{(1 + t^2)\, t}{f(x_0) - \psi(x_0)\, y_0 - \varphi(x_0)\, t}$$
$$\eta = y_0 + \frac{1 + t^2}{f(x_0) - \psi(x_0)\, y_0 - \varphi(x_0)\, t}$$

aneb

$$(\eta - y_0)^2 \left[(f(x_0) - \psi(x_0)\, y_0)(\eta - y_0) + \varphi(x_0)\,(\xi - x_0)\right] - (\xi - x_0)^2 - (\eta - y_0)^2 = 0,$$

vyloučíme z rovnic předcházejících racionální parametr t.

Pošineme-li osy souřadnic rovnoběžně do bodu M_0 jako nového počátku souřadnic, obdržíme rovnici místa (S) středů křivosti všech křivek integrálních jdoucích bodem M_0 v této nové soustavě souřadnicové

$$y^2(ax + by) - (x^2 + y^2) = 0, \tag{5}$$

kdež jsme za příčinou krátkosti psali

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= a, \\ f(x_0) - \psi(x_0)\, y_0 &= b. \end{aligned} \tag{6}$$

Z rovnice (5) vysvítá, že křivka (S) se dotýká přímky úběžné. Sestrojíme-li tuto křivku jako cissoidálu [1]), třeba klásti

$$C_2 \equiv y^2 + \frac{x}{a} - \frac{by}{a^2} = 0$$
$$P \equiv ax + by - \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 0.$$

Základní kuželosečka je zde parabola, což již z toho je patrno, že křivka (S) se dotýká přímky úběžné. Konstrukce křivky racionální stupně třetího, kteráž se dotýká přímky úběžné, jak ji p. G. Loria uvádí, souhlasí tudíž se sestrojením této křivky jako cissoidály. [2])

---

[1]) *K. Zahradník:* »Křivky cissoidálné.« Tohoto časopisu ročník II., pag. 183. Praha 1873.

[2]) *Dr. G. Loria* »Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven«, překlad od F. Schütte-ho, Leipzig, Teubner, 1902, pag. 74.

2. Jedna křivka svazku křivek bodem M_0 určeného má v tom bodě bod obratu. Pro ni platí

$$y''_0 = 0,$$

a tudíž je

$$y'_0 = \frac{f(x_0) - \psi(x_0)\, y_0}{\varphi(x_0)} = \frac{b}{a},$$

a rovnice tečny inflexní bodu M_0 té křivky je

$$y = \frac{b}{a}\, x + \frac{a y_0 - b x_0}{a}, \tag{7}$$

a střed křivosti S této křivky v bodě obratu je úběžný bod křivky (S) příslušný hodnotě parametru $t = \frac{b}{a}$.

Rovnici (7) tečny inflexní můžeme vzhledem k rovnicím (6) též psáti:

$$\varphi(x_0)(y - y_0) - [y_0 \psi(x_0) - f(x_0)](x - x_0) = 0,$$

aneb

$$\begin{aligned} &[x f(x_0) - y\varphi(x_0) - x_0 f(x_0)] - y_0 [x f(x_0) \\ &\quad - \varphi(x_0) - x_0 f(x_0)] = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Z rovnice této vychází, že, ať je již poloha bodu M_0 na přímce $x = x_0$ jakákoliv, tečna obratu příslušné křivky svazku křivek tím bodem M_0 určeného vždy pevným bodem N probíhá, jenž je průsekem přímek

$$\begin{aligned} x f(x_0) - y\varphi(x_0) - x_0 f(x_0) &= 0 \\ x f(x_0) - \varphi(x_0) - x_0 f(x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Souřadnice tohoto bodu jsou:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} \\ y &= \frac{f(x_0)}{\psi(x_0)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Všechny tečny inflexní v bodech přímky $x = x_0$ vedené ku různým křivkám sítě integrálních křivek tvoří tudíž svazek paprskový. Pohybuje-li se přímka $x = x_0$, měníc svůj směr, opisuje střed N příslušného svazku paprskového křivku, již parametricky vyjadřuje rovnice (10). Tuto křivku (N) můžeme pojmenovati *místem inflexních středů* integrální sítě.

3. Označíme-li písmenem T průsek inflexní tečny křivky svazku křivek bodu M_0 s osou X, obdržíme z rovnice (7)

$$OT = x_0 - \frac{ay_0}{b} = \frac{x_0 f(x_0) - [\varphi(x_0) + x_0 \psi(x_0)]\, y_0}{f(x_0) - \psi(x_0)\, y_0}. \tag{11}$$

Vyšetřme nyní, kdy je ten průsek [1]) nezávislý na y_0. Jak z výrazu pro OT (rov. 11) vysvítá, přihodí se to, je-li

I. $$\frac{x_0 f(x_0)}{f(x_0)} = \frac{\varphi(x_0) + x_0 \psi(x_0)}{\psi(x_0)},$$

tedy je-li

$$\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} = 0.$$

Podmínce té se vyhoví, je-li

α) $\varphi(x) \equiv 0$,

β) x_0 kořenem rovnice $\varphi(x) = 0$, za nějž je $\psi(x_0) \neq 0$,

γ) za hodnotu x_0, pro kterou má $\varphi(x_0)$ hodnotu konečnou, avšak $\psi(x_0) = \infty$.

V případě α) má daná differenciální rovnice tvar

$$y'' + y\psi(x) = f(x)$$

a z rovnice (8) obdržíme nezávisle na y_0

$$x - x_0 = 0.$$

Rovnice tečny inflexní bodu M_0 křivky svazku křivek bodem M_0 určeného je v tomto případě $x = x_0$, t. j. všechny tečny inflexní v bodech přímky $x - x_0 = 0$ vedené k různým křivkám sítě splývají s tou přímkou za každou hodnotu úsečky x_0, v případě β) za oné hodnoty za x_0, které jsou kořeny rovnice $\varphi(x) = 0$.

Místo středu křivosti (S) křivek integrálních bodem $M(x_0 \mid y_0)$ probíhajících je v obou zde uvedených případech *dupplikatrix* [2]) *Longchampsova.*

---

[1]) Zde je $T \equiv N$, tedy

$$x_0 + \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} \equiv \frac{x_0 f(x_0 - [\varphi(x_0) + x_0 \psi(x_0)]\, y_0}{f(x_0) - \psi(x_0)\, y_0}$$

nezávisle na y_0, od této poznámky mohli bychom též vyjíti.

[2]) *Loria-Schütte* l. c. pag. 89.

II. Podmínce té se vyhoví též, je-li:

α) $f(x) \equiv 0$, t. j. daná rovnice differenciální je homogenní,[1]

β) aneb je x_0 kořen rovnice $f(x) = 0$.

III. Konečně se vyhoví téže podmínce, je-li

$$\varphi(x_0) + x_0 \psi(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad \psi(x_0) = 0,$$

tedy je-li

α) $$\varphi(x) \equiv 0, \quad \psi(x) \equiv 0$$

za každé x. V případě tomto je tvar dané differenciální rovnice

$$y'' = f(x)$$

a místo středu křivosti (S) je zde opět *dupplikatrix Longchampsa*, aneb musí míti

β) rovnice $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ společný kořen x_0.

Všechny tečny inflexní v bodech přímky $x = x_0$ vedené ke křivkám sítě splývají s tou přímkou.

Poznámky k theorii interpolace.

Napsal **K. Rychlík.**

I.

Uvažujme funkci $f(z)$ proměnné $z = x + iy$ analytickou v oboru (S), omezeném čarou S, a předpokládejme, že známe v n bodech vesměs různých $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, nalézajících se uvnitř oboru (S), hodnoty funkce $f(z)$. Jest možno stanoviti jednoznačně polynom $G_n(z)$, stupně $n - 1$, nabývající týchž hodnot jako funkce $f(z)$ totiž $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots f(x_n)$, pro $z = x_1, x_2, \ldots x_n$. Pak přirozeně se vyskytuje otázka, kdy polynom $G_n(z)$ s n rostoucím do nekonečna konverguje k funkci

---

[1]) Srovnej odvození dané ve Zprávách o zasedání Kr. české společnosti nauk 5. května 1905 pro tento případ. Jestliže daná differenciální rovnice jest úplná, neleží střed inflexní na ose X. Pošineme-li osu X o λ, t. j. upotřebíme-li substituce $y = \eta + \lambda$, přejde daná differenciální rovnice (1) v $\eta'' + \varphi(x)\,\eta' + \psi(x)\,\eta = 0$, je-li $f(x) - \lambda\psi(x) = 0$ za $x = x_0$, jest $\lambda = \dfrac{f(x_0)}{\psi(x_0)}$, tím obdržíme opět tytéž souřadnice středu inflexního N jako ve čl. 2. Takto svedeme případ β) na případ α).