Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

# Poznámka o větě Descartesově a větě Budanově

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 36 (1907), No. 1, 49--54

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109270

# Poznámka o větě Descartesové a větě Budanově.

Napsal K. Petr.

**1.** Věta Descartesova o počtu změn znaménkových v rovnici algebraické a o počtu kořenů kladných dokazuje se zpravidla úplnou indukcí. Jeden z nejjednodušších důkazů té věty pochází od Laguerrea*) a opírá se o větu Rolleovu. Při tom má důkaz onen tu přednost, že lze pomocí něho rozšířiti platnost věty Descartesovy i na rovnice, jichž levé strany obsahují mocniny neznámé s exponenty necelými, a na rovnice, jichž levé strany jsou řady mocninné (s konečným počtem změn znaménkových).

Zdá se však, že zůstalo nepovšimnuto, že pomocí Rolleovy věty lze dáti ještě jednodušší důkaz věty Descartesovy, jenž má tytéž přednosti jako Laguerreův důkaz a jenž má dále tu výhodu, že lze ho použíti i při důkazu věty Budan-Fourierovy, jež dokazuje se obyčejně, jak známo, úvahami spojitostními.

**2.** Věta Descartesova praví, že rovnice algebraická

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (1)$$

má nejvýše tolik kořenů kladných, kolik v řadě čísel

$$a_0, a_1, \ldots a_n \qquad (2)$$

jest změn znaménkových.**) Věta vyplývá ihned z těchto soudů:

1. Počet kořenů kladných rovnice (1) a počet změn znaménkových v řadě (2) jsou čísla stejné parity.

2. Věta jest platna pro rovnice stupně prvého.

3. Věta jest platna pro rovnice stupně $n$-tého, platí-li pro rovnice stupně $n-1$. Neboť, kdyby věta Descartesova nebyla platna pro rovnice stupně $n$-tého, byla by aspoň jedna rovnice stupně $n$-tého $f(x) = 0$, jež by při určitém počtu $p$ změn znaménkových měla více kořenů kladných nežli $p$, tedy aspoň $p + 2$ kořenů kladných (dle soudu 1.). Rovnice však $f'(x) = 0$, jež jest stupně $n - 1$ a má nejvýše $p$ změn znaménkových, měla by

*) V pojednání »Sur la théorie des équations numériques«. Journal de math. pures et appl. 3 sér. t. IX, 1883. Viz též Oeuvres de Laguerre, tome I, str. 1.

**) Při tom členy řady (2), jež jsou rovny nulle, se prostě vynechávají.

dle Rolleovy věty aspoň $p+1$ kořenů kladných, což však jest proti předpokladu, že věta Descartesova jest platna pro rovnice stupně $n-1$.

Rozšíření tohoto důkazu pro ten případ, že v rovnici dané vyskytují se mocniny s mocniteli necelými, jest zcela snadné. Stačí uvésti rovnici na tvar

$$g(x) = A_1 x^{q_1} + A_2 x^{q_2} + \ldots + A_{m-1} x^{q_{m-1}} + A_m = 0, \quad (3)$$

kde $$q_1 > q_2 > \ldots > q_{m-1} > 0,$$

a bráti v úvahu počet změn znaménkových v řadě $A_1, A_2, \ldots A_m$. Nazývati můžeme pro okamžik rovnici (3) $m$-člennou.

A tu jest soud 1. platný pro rovnici (3), místo soudů 2. a 3. pak nastupují tyto: Věta jest platna pro rovnici dvoučlennou. Věta jest platna pro rovnice $m$-členné, platí-li pro rovnice $m-1$-členné. Důkaz posledního tvrzení jest téměř doslova totožným se svrchu podaným pro soud 3.

**3.** Nechť značí $p_a$ počet změn znaménkových v řadě

$$f(a), f'(a), f''(a), \ldots f^{(n)}(a) \quad (2')$$

a podobně $p_b$ počet změn znaménkových v řadě

$$f(b), f'(b), f''(b), \ldots f^{(n)}(b). \quad (2'')$$

Pak můžeme větu Budanovu takto vysloviti:

Jestliže $a < b$, jest vždy $p_a \geqq p_b$. Počet kořenů rovnice (1) mezi $a$ a $b$ *) jest nejvýše rovný rozdílu $p_a - p_b$.

Při tom, jestliže několik po sobě následujících členů řady (2') rovná se nulle, ku př.

$$f^{(i)}(a) = f^{(i+1)}(a) = \ldots f^{(i+k-1)}(a) = 0, \; f^{(i+k)}(a) \gtrless 0,$$

počítáme změny znaménkové tak, jako by

$$f^{(i)}(a), f^{(i+1)}(a), \ldots f^{(i+k-1)}(a)$$

byla čísla mající znaménko čísla $f^{(i+k)}(a)$, (t. j. při počítání změn znaménkových v řadě (2') členy rovné nulle prostě můžeme vynechati). Rovnají-li se však v řadě (2'')

$$f^{(i)}(b), f^{(i+1)}(b), \ldots f^{(i+k-1)}(b)$$

nulle při $f^{(i+k)}(b) \gtrless 0$, přidělujeme těmto číslům znaménka tak, aby řada $f^{(i)}(b), f^{(i+1)}(b), \ldots f^{(i+k)}(b)$ měla vesměs jenom změny znaménkové (a žádné sledy znam.). Vzhledem k tomuto různému

*) t. j. počet kořenů, jež jsou větší než $a$ a menší nežli $b$.

počítání změn znaménkových v řadách (2′), (2″) volil jsem pro počty změn znaménkových v jednotlivých řadách různé značky.

Důkaz věty Budanovy opírá se o tyto soudy:

1. Jestliže $\gamma$ jest kořen rovnice $\varphi(x) = 0$ a není-li mezi $c$ a $\gamma$ kořen rovnice $\varphi'(x) = 0$, jest při $\varphi'(c) \gtrless 0$ číslo $\frac{\varphi'(c)}{\varphi(c)}$ záporné, když $c < \gamma$; při $c > \gamma$ pak kladné. Z čehož následuje ihned tento výrok: Jestliže mezi $a$ a $b$ $(a < b)$ jest $m$ kořenů rovnice $\varphi(x) = 0$ a jenom $m - 1$ kořenů rovnice $\varphi'(x) = 0$, jest při $\varphi'(a) \gtrless 0$ číslo $\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}$ záporné a při $\varphi'(b) \gtrless 0$ číslo $\frac{\varphi'(b)}{\varphi(b)}$ kladné. V těchto výrocích značí $\varphi(x)$ polynom v $x$.

2. Rovnají-li se některé členy řady (2′) nulle, zvolme si číslo $a_1 > a$ a takové, že žádný člen řady

$$f(a_1),\ f'(a_1),\ f''(a_1),\ \ldots f^{(n)}(a_1) \qquad (2'_1)$$

není rovný nulle a že také žádný z polynomů $f(x), f'(x), \ldots f^{(n)}(x)$ pro hodnotu mezi $a_1$ a $a$ není rovný nulle. Tu dle soudu 1. tohoto odstavce budou míti jednotlivé členy řady $(2'_1)$ právě taková znaménka, jaká příslušejí stejnolehlým členům řady (2′). Podobně, rovnají-li se některé členy řady (2″) nulle, lze nalézti číslo $b_1 < b$ takové, že žádný člen řady

$$f(b_1),\ f'(b_1)\ \ldots f^{(n)}(b_1) \qquad (2''_1)$$

není roven nulle a že také žádný z polynomů $f(x), f'(x), \ldots f^{(n)}(x)$ pro $x$ mezi $b_1$ a $b$ není rovný nulle atd.

Poněvadž pak mezi $a_1$ a $b_1$ jest týž počet kořenů rovnice $f(x) = 0$ jako mezi $a$ a $b$ a poněvadž řady (2′) a (2″) ve znaménkách se shodují, můžeme vycházeti při důkazu Budanovy věty přímo z řad $(2'_1)$, $(2''_1)$; anebo ještě jednodušeji, můžeme a budeme také v následujícím předpokládati, že členy řad (2′) a (2″) jsou od nully různy.

3. Počet kořenů rovnice (1) a rozdíl v počtech změn znaménkových u řad (2′) a (2″) jsou čísla stejné parity.

4. Věta Budanova jest platna pro rovnici stupně prvního.

5. Věta Budanova jest platna pro rovnici stupně $n$-tého, jestliže platí pro rovnice stupně $n - 1$. Neboť kdyby nebyla platna pro rovnice stupně $n$-tého, byla by aspoň jedna rovnice

stupně $n$-tého $f(x) = 0$, pro niž by řada (2′) vykazovala o $p$ změn znaménkových více nežli řada (2″) a jež by měla mezi $a$ a $b$ kořenů více nežli $p$, tedy aspoň $p + 2$.*) Rovnice pak $f'(x) = 0$, jež jest stupně $n - 1$, by měla mezi $a$ a $b$ kořenů buď přesně $p + 1$ anebo ještě více. Avšak řada

$$f'(a), f''(a), \ldots f^{(n)}(a) \tag{4'}$$

má nejvýše o $p + 1$ změn znaménkových více než řada

$$f'(b), f''(b), \ldots f^{(n)}(b), \tag{4''}$$

(jak patrno z té okolnosti tu předpokládané, že řada (2′) má o $p$ změn znam. více nežli řada (2″)); a nemůže tudíž dle Budanovy věty, již předpokládáme platnou pro rovnice stupně $n - 1$, rovnice $f'(x) = 0$ míti více kořenů nežli $p + 1$ mezi $a$ a $b$ (tedy $p + 1 \geqq 0$). Ale ani $p + 1$ kořenů nemůže míti rovnice $f'(x) = 0$ mezi $a$ a $b$. Neboť má-li tato rovnice $p + 1$ kořenů a rovnice $f(x) = 0$ v tomtéž intervallu $p + 2$ kořenů, tu dle soudu 1. tohoto odst. jsou znaménka počátečních dvou členů řady (2′) buď $+, -$; anebo $-, +$; znaménka počátečních dvou členů řady (2″) jsou buď $+, +$; anebo $-, -$. I má tedy v tomto případě řada (4′) o $p - 1$ změn znaménkových více nežli řada (4″) a nemůže tudíž dle učiněného předpokladu o platnosti věty Budanovy pro rovnice stupně $n - 1$ míti rovnice $f'(x) = 0$ kořenů $p + 1$. I nemůže býti věta Budanova neplatna pro rovnice stupně $n$-tého, je-li platna pro rovnice stupně $n - 1$.

**4.** Právě tak, jak lze rozšířiti větu Descartesovu na rovnice tvaru (3), lze dokázati i větu Budanovu pro rovnice toho tvaru při předpokladu ovšem, že $o \leqq a < b$. Při tom dostaneme řadu o $m$ členech

$$g(x),\ g_1(x), \ldots g_{m-1}(x)$$

takto vytvořenou

$$g_1(x) = g'(x) \cdot x^{-q_{m-1}+1},$$
$$g_2(x) = g'_1(x) \cdot x^{-q_{m-2}+q_{m-1}+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

*) Za $p$ může býti tu připuštěno i číslo záporné, avšak nejmenší možná hodnota pro počet kořenů nějaké rovnice v daném intervallu jest ovšem nulla.

pro niž platí: Počet kořenů rovnice $g(x) = 0$ ležících mezi $a$ a $b$ jest nejvýše rovný počtu změn znaménkových v řadě

$$g(a),\ g_1(a), \ldots g_{m-1}(a) \qquad (5')$$

zmenšenému o počet změn znaménkových v řadě

$$g(b),\ g_1(b), \ldots g_{m-1}(b). \qquad (5'')$$

Důkaz této věty jest shodný s důkazem věty Budanovy pro rovnici (1) právě vyloženým a rovněž tak způsob, jímž se stanoví znaménka členů rovných nulle v obou řadách (5') a (5'') jest totožný se způsobem vyloženým při řadách (2') a (2'').

Věta právě uvedená může s prospěchem býti použita i při rovnicích takových, kde $q_1, q_2, \ldots q_{m-1}$ jsou čísla celá, když $q_1$ jest číslo o dosti větší nežli $m - 1$, neboť řady (5') a (5'') mají o $q_1 - m + 1$ členů méně nežli řady (2') a (2''). Tak ku př. můžeme při určování počtu kořenů mezi $a$ a $b$ ($a$ i $b$ stejného znaménka) u rovnice 7. stupně

$$x^7 - 3x^5 + 4x^2 - 5 = 0$$

užívati těchto čtyř polynomů

$$x^7 - 3x^5 + 4x^2 - 5, \quad 7x^5 - 15x^3 + 8, \quad 35x^2 - 45, \quad 70;$$

kdežto při užití věty Budanovy v obvyklém tvaru se vyžaduje osm polynomů.

**5.** Důkaz pro Budanovu větu lze rozšířiti bez potíží na důkaz věty analogické, platné vůbec pro funkce analytické (reální). Budiž $f(x)$ taková funkce v okolí bodu $a$ analytická; pak platí tento rozvoj

$$F(x) = A_0 + A_1(x - a) + A_2(x - a)^2 + \ldots$$

Konverguje li tato řada také pro $x = b$, $(b > a)$, máme též tento rozvoj

$$F(x) = B_0 + B_1(x - b) + B_2(x - b)^2 + \ldots$$

Vykazuje-li řada koefficientů $A_0, A_1, A_2 \ldots$ konečný počet změn znaménkových (při čemž čísla $A_k = 0$ prostě vynecháváme), jsou tato čísla od jistého indexu $m - 1$ počínaje stále stejného znaménka (anebo rovna nulle). Pak jsou i čísla $B_k$ od toho indexu $(m - 1)$ počínaje stále téhož znaménka jako příslušná čísla $A_k$, jak z vyjádření čísel $B_k$ pomocí $A_k$ snadno vyplývá. Nazveme pak pro okamžik rovnici $F(x) = 0$ $m$-člennou (vzhledem k číslům $a$ a $b$). A tu jest ihned patrno, že všecky soudy, jež svrchu uvedeny byly pro důkaz věty Budanovy při rovnicích algebraických $n$-tého stupně zůstávají v platnosti pro rovnice $F(x) = 0$ až na záměnu slov vznikající užitím pojmenování rovnice $m$-členné místo pojmenování rovnice $n$-tého stupně.

I dostaneme tak jako svrchu tento výsledek:

Rovnice $F(x) = 0$ má mezi $a$ a $b$ nejvýše tolik kořenů, o kolik jest v řadě

$$A_0, A_1, A_2, \ldots$$

změn znaménkových více nežli v řadě

$$B_0, B_1, B_2, \ldots$$

Zároveň jest v tom případě, že někteří členové těchto řad stávají se nullou, znaménka taková těmto členům přisuzovati, jaká svrchu ve zvláštním případě jim byla přisouzena.

Při tom bylo předpokládáno, že $b$ jest v kruhu konvergenčním patřícím ku $a$, avšak tento předpoklad, jak známým způsobem vysvítá, lze nahraditi obecnějším, že funkce $F(x)$ jest na ose čísel reálních mezi $a$ a $b$ všude (meze v to počítaje) analytickou, to jest, že se dá ve všech bodech této úsečky rozvinouti v řadu Taylorovu. A tak máme definitivně tuto větu:

Budiž $F(x)$ funkce analytická pro všecka $x$ hovící nerovninám $a \leqq x \leqq b$, $(a < b)$; pak jest, jestliže počet změn znaménkových v řadě

$$F(a),\ F'(a),\ F''(a),\ \ldots \tag{6'}$$

jest konečný, i počet změn znaménkových v řadě

$$F(b),\ F'(b),\ F''(b),\ \ldots \tag{6''}$$

**konečný a menší nebo rovný počtu změn znaménkových v řadě (6′), při čemž přisuzujeme znaménka určitá i členům rovným nulle svrchu udaným způsobem.**

**Počet kořenů $\alpha$ rovnice $F(x) = 0$, pro něž $a < \alpha < b$, jest nejvýše roven rozdílu počtu změn znaménkových v (6′) a počtu změn znaménkových v (6″).**