František Kadeřávek

Zcela elementární důkaz Pelzova rozšíření Daudelinovy věty

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 1, 44--48

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109269`

nému výrazu jako dříve, k němuž však dlužno připojiti pro body nad osou čísel reálných člen $log\,(1 - (-1)^n e^{+\pi i n z})$ a pro body pod osou čísel reálných člen $log\,(1 - (-1)^n e^{-\pi i n z})$. Tyto členy mají však za limitu nullu, roste-li n do nekonečna.

Bude tudíž

$$log\, g_n(z) = nw(z) + log\,(z^2 - 1) + \omega\left(\frac{n}{2}(1 - z)\right)$$
$$+ \omega\left(\frac{n}{2}(1 + z)\right) + log\, \mu,$$

kdež $\mu = 1$ v oboru I. a III.

a $\quad \mu = 1 - (-1)^n e^{\pm \pi i n z}$ v oboru II.

Definujeme-li pak $\sqrt[n]{g_n(z)}$ jako jsme to v oddílu II. učinili, bude

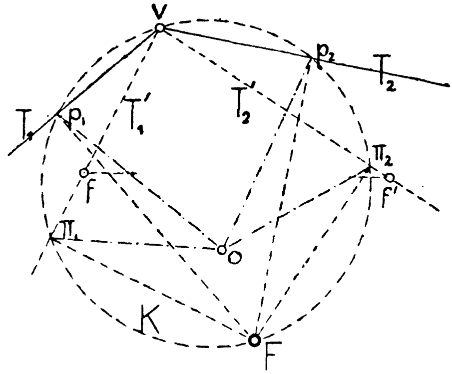
$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{g_n(z)} = w(z) = \frac{(z+1)\,log\,(z+1) - (z-1)\,log\,(z-1)}{2} - 1.$$

Zcela elementární důkaz Pelzova rozšíření Daudelinovy věty.

Napsal **Frant. Kadeřávek**, kand. professury.

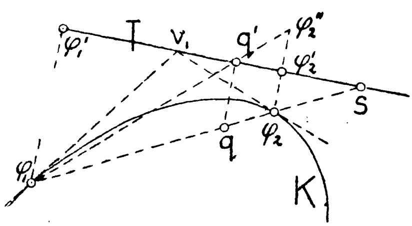
Buďtež T_1, T_2 tečny kuželosečky o ohniscích f, f' (obr. 1.). Spojme tato ohniska s průsečíkem v tečen T_1, T_2 přímkami T'_1, T'_2, pak, jak známo, platí věta, že úhel sevřený přímkami T_1, T'_1 rovná se neb jest výplňkem úhlu přímek T_2, T'_2. Spusťme na ramena těchto úhlů s libovolně zvoleného bodu F kolmice a označme jejich paty písmenami p_1, p_2, π_1, π_2, tu, poněvadž úhly pravé při těchto bodech stojí nad touž úsečkou vF, leží body v, F, p_1, p_2, π_1 a π_2 na kružnici nad úsečkou vF co průměrem popsané. Obvodové úhly $\pi_1 F p_1$, $\pi_2 F p_2$ této kružnice, jichž ramena stojí kolmo k příslušným ramenům úhlů sevřených přímkami $T_1 T'_1$ a $T_2 T'_2$, jsou buď stejné neb se vyplňují, a proto stojí tyto úhly nad stejnými oblouky. Jest tedy $\overset{\frown}{p_1\pi_1} = \overset{\frown}{p_2\pi_2}$. Sestrojme si bod o tak, aby byl od bodů π_1, π_2 stejně vzdálen, pak vzhledem k rovnostem $\overset{\frown}{p_1\pi_1} = \overset{\frown}{p_2\pi_2}$ a $\pi_1 o = \pi_2 o$ a souměrnému položení těchto částí ke kružnici K plyne i rovnost $p_1 o = p_2 o$, jíž později použijeme.

Budiž dána kuželosečka K a přímka T (obr. 2.). Veďme libovolným bodem v_1 této přímky tečny k dané kuželosečce, a pokládejme jich dotyčné body φ_1, φ_2 za ohniska kuželosečky,



Obr. 1.

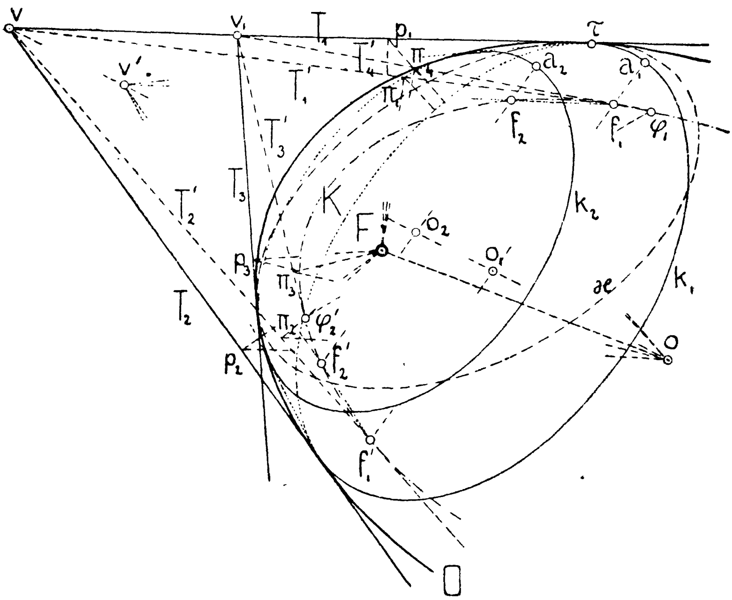
dotýkající se dané přímky T. Vyšetřme dotyčný bod q' co průsečík přímky T se spojnicí bodů $\varphi_1 \varphi''_2$, kde φ''_2 značí bod souměrný k ohnisku φ_2 dle T. Dále vyhledejme paty φ'_1, φ'_2 kolmic



Obr. 2.

s φ_1, φ_2 na T spuštěných a průsečík s této přímky se spojnicí $\varphi_1 \varphi_2$. Body φ'_1, φ'_2, q', s tvoří harmonickou čtveřinu bodů; vztyčíme-li v bodě q' kolmici a označíme-li její průsečík s přímkou $\varphi_1 \varphi_2$ písmenou q, pak i $\varphi_1 \varphi_2 q s$ tvoří harmonickou čtveřinu. Bod q je však polem přímky T vzhledem k dané kuželosečce K, a tedy bodem stálým, a proto i jeho orth. průmět q' na přímce T stálým a na volbě bodu v_1 na přímce T nezávislým. Z toho soudíme, že všechny kuželosečky, jež mají se dotýkati dané přímky, a jichž ohniska jsou dotyčnými body tečen z libovolného bodu této dané přímky k dané kuželosečce vedených, dotýkají se dané tečny všechny v jednom a témž bodě, což budeme pro další potřebovati.

Budiž opět dána kuželosečka K o ohnisku F a středu o (obr. 3.). Chceme vyšetřovati obálku podobných a podobně ležících kuželoseček, jichž ohniska leží na dané kuželosečce K.



Obr. 3.

Vytkněme si dvě rovnoběžné tětivy $f_1 f'_1$ a $f_2 f'_2$ kuželosečky K a sestrojme nad nimi podobné kuželosečky k_1, k_2 o ohniskách f_1, f'_1 a f_2, f'_2. Z podobnosti a podobného položení křivek k_1, k_2 plyne, že společné jejich tečny procházejí průsečíkem v' sečen $f_1 f_2$, $f'_1 f'_2$ kuželosečky K; necháme-li splynouti křivku k_2 s k_1, přejdou sečny $f_1 f_2$, $f'_1 f'_2$ v tečny T'_1, T'_2 kuželosečky K, jejich průsečík v' v bod v, a společné tečny křivek k_1, k_2 v tečny T_1, T_2 obálky O, nepřestávajíce býti tečnami kuželosečky k_1. I máme k této křivce k_1 bodem v vedeny tečny T_1, T_2, jež jsou zároveň tečnami obálky O a přímky $T'_1 T'_2$, tečny dané kuželosečky K, jdoucí ohnisky kuželosečky k_1. O tečnách T'_1, T'_2 platí, že paty

π_1, π_2 kolmic s F na ně spuštěných jsou stejně vzdáleny od bodu o, proto vzhledem ke kuželosečce k_1 i paty p_1, p_2 kolmic s téhož bodu F na $T_1 T_2$ spuštěných jsou od bodu o stejně vzdáleny. Platí tedy rovnost $p_1 o = p_2 o$.

Vyhledejme bod τ, v němž se tečna T_1 dotýká kuželosečky k_1 a tedy i obálky O, a sestrojme si kuželosečku x, jejíž ohniska φ_1, φ_2 jsou dotyčnými body tečen ke křivce K libovolným bodem v_1 přímky T_1 vedených, a která kuželosečka se dotýká přímky T_1. Dle předchozího, vzhledem ke kuželosečkám k_1 a K, musí se kuželosečka x dotýkati tečny T_1 též v bodě τ, a proto se dotýká naší obálky. Kdybychom si provedli i v jiných bodech obálky O touž operaci, dostali bychom soustavu kuželoseček x; ty obalují jistou křivku, která se dotýká naší obálky v bodech, v nichž jsme onu operaci provedli, tedy v libovolném množství, a proto jest s naší obálkou O identickou. Mysleme si, že jsme sestrojili kuželosečky x_1, x_2 ve dvou bodech τ_1, τ_2 obálky O a že vhodnou volbou bodů v'_1, v_2, odpovídajících bodu v_1, jehož jsme při konstrukci x užili, docílili jsme rovnoběžnosti os φ'_1, φ'_2, φ''_1, φ''_2 kuželoseček x_1, x_2 a nechme tyto splynouti. Při tom přejdou sečny $\varphi'_1\varphi''_1$, $\varphi'_2\varphi''_2$ kuželosečky v tečny T'_3, T'_4 této, a společná jedna tečna křivek x_1, x_2 v tečnu obálky T_1. Tyto tři přímky jdou jediným bodem v_1, proto jsou soumezné křivky x_1, x_2 podobné a podobně položené, z čehož plyne, že i jejich druhá společná tečna, tečna T_3 naší obálky, jde bodem v_1. Jest tedy i druhá tečna T_3 kuželosečky x, v níž si myslíme splynulé křivky x_1, x_2, vycházející z bodu v_1 tečnou naší obálky, a můžeme proto z týchž důvodů, které jsme uvedli při kuželosečce k_1, tvrditi, že, rovná-li se vzdálenost pat π_3, π_4 kolmic s bodu F na $T'_3 T'_4$ spuštěných od bodu o, čemuž skutečně tak jest, neboť $T'_3 T'_4$ jsou tečny kuželosečky K o ohnisku F a středu o, rovná se i vzdálenost pat $p_1 p_3$ kolmic s téhož bodu F na $T_1 T_3$ spuštěných od bodu o. Jest tedy $p_1 o = p_3 o$, prve jsme dovodili, že $p_1 o = p_2 o$; kdybychom nechali bod v_1 probíhati přímkou T_1, shledali bychom, že týž vztah platí pro každou tečnu naší obálky O. Jest proto naše obálka křivkou, jejíž tečny mají tu vlastnost, že paty kolmic s ohniska dané kuželosečky K na ně spuštěných jsou od středu téže kuželosečky stejně vzdáleny. I jest naše obálka kuželosečka s danou konfokální.

Buďtež a_1, a_2 vrcholy a o_1, o_2 středy kuželoseček k_1, k_2. Z podobnosti a podobné polohy těchto křivek plyne, že poměr

$$\frac{o_1 a_1}{o_1 f_1} = \frac{o_2 a_2}{o_2 f_2} = const,$$

z čehož vidno, že geom. místo vrcholů kuželoseček k_1, k_2 atd. je kuželosečka K' k dané kuželosečce k affinní.

Vzhledem k tomu můžeme tvrditi, že geom. místo ohnisek homothetických kuželoseček, jichž vrcholy leží na dané kuželosečce, je kuželosečka, s níž jest rovněž kuželosečková obálka konfokální.

Mysleme si, že kuželosečka K', v níž leží vrcholy homothetických kuželoseček k_1, k_2 atd., jest centrální projekcí jisté kuželosečky (K') v prostoru, a křivky k_1, k_2, .. projekcemi kuželoseček (k_1), (k_2), . . . , jejichž vrcholy leží na křivce (K') a jichž roviny jsou rovnoběžny s průmětnou, kteráž podmínka při rovnoběžném promítání odpadá. Pak jest geom. místem kuželoseček (k_1), (k_2) . . . v prostoru plocha druhého stupně, pro niž můžeme z obrazce 3. vyčísti následující:

Geom. místo ohnisek homothetických kuželoseček plochy druhého stupně je kuželosečka, neboť značí-li K' projekci kuželosečky, značí ji i K, any jednotlivé body křivky K leží na tětivách křivky K', jest tedy křivka (K) v prostoru příslušející průmětu K rovinnou, jíž náleží co průmět kuželosečka, proto jest i (K) kuželosečkou.

Geom. místo ohnisek projekcí homothetických kuželoseček plochy druhého stupně (v rovinách rovnoběžných s průmětnou, jedná-li se o promítání centrální) je kuželosečka, s níž jest obrys, který je rovněž kuželosečkou, konfokální.

Uvážíme-li, že řezy plochou druhého stupně, rovnoběžné s danou rovinou, vytknou na ploše dvě soustavy kuželoseček homothetických, z nichž některá soustava může býti též imaginární, můžeme říci všeobecněji, že geom. místo ohnisek rovnoběžných rovinných řezů plochy druhého stupně sestává ze dvou kuželoseček, a že geom. místo ohnisek průmětů rovnoběžných rovinných řezů (jež musí býti rovnoběžny s průmětnou, jde-li o promítání centrální) plochy druhého stupně jest kuželosečka, konfokální s kuželosečkou obrysovou, jakž byl poprvé professor K. Pelz ve zprávách vídeňské Akademie z roku 1877 dovodil.