Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Langr

O součtu čtverečných vzdáleností libovolného bodu od vrcholů daného mnohoúhelníka. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 1, 86--91

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109268`

Obdobným způsobem mohli bychom sestrojiti úhly

$$2\varphi \text{ a } 8\varphi,\quad 3\varphi \text{ a } 5\varphi,\quad 6\varphi \text{ a } 7\varphi,$$

na základě vztahů

$$\left.\begin{aligned} \cos 2\varphi + \cos 8\varphi &= q \\ \cos 2\varphi \,.\, \cos 8\varphi &= \frac{s}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos 3\varphi + \cos 5\varphi &= r \\ \cos 3\varphi \,.\, \cos 5\varphi &= \frac{q}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos 6\varphi + \cos 7\varphi &= s \\ \cos 6\varphi \,.\, \cos 7\varphi &= \frac{p}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

vyvozených z rovnic (5) a (6).

O součtu čtverečných vzdáleností libovolného bodu od vrcholů daného mnohoúhelníka.

Píše ing. **Jos. Langr.**

I.

Buď určen n-úhelník $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ v soustavě pravoúhelných os souřadných souřadnicemi svých vrcholů

$$A_1\,(x_1, y_1),\ A_2\,(x_2, y_2),\ \ldots\ A_n\,(x_n, y_n).$$

Libovolný bod B, jehož čtvercované vzdálenosti od vrcholů daného mnohoúhelníka chceme určovati, mějž souřadnice x, y. Mimo to položme

$$\overline{A_1B} = v_1,\ \overline{A_2B} = v_2, \ldots \overline{A_nB} = v_n$$

a

$$\sum_{k=1}^{k=n} v_k^2 = V.$$

Pro jednotlivá v jest

$$\begin{aligned} v_1^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2, \\ v_2^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2, \\ &\ \vdots \\ v_n^2 &= (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2. \end{aligned}$$

Zmocněním dvojčlenů a sečtením obdržíme rovnici

$$V = n\,(x^2 + y^2) - 2x \sum_{k=1}^{k=n} (x_k) - 2y \sum_{k=1}^{k=n} (y_k) + \sum_{k=1}^{k=n} (x_k^2 + y_k^2).$$

K vůli zjednodušení zavedeme souřadnice bodu $S(\xi, \eta)$, které vyhovují následující podmínce:

$$\xi = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (x_k), \quad \eta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (y_k).$$

Bod ten budeme zváti s ohledem na souvislost jeho souřadnic se souřadnicemi vrcholů mnohoúhelníka *arithmetickým středem* mnohoúhelníka. Jeho čtverečná vzdálenost od bodu B jest

$$\overline{SB}^2 = r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Součet V lze tedy vyjádřiti následovně:

$$V = nr^2 - n\,(\xi^2 + \eta^2) + \sum_{k=1}^{k=n} (x_k^2 + y_k^2). \tag{1}$$

Druhý a třetí člen této rovnice repraesentují, nezávisíce nikterak na B, konstantní veličinu pro daný mnohoúhelník. Z následující úvahy pak vyplývá, že tato veličina je součet čtverců všech možných spojnic vrcholů daného n-úhelníka dělený n.

Jestiť pro součet čtverců vzdáleností bodu A_1 ode všech vrcholů

$$\begin{aligned}
\overline{A_1A_1}^2 &= (x_1 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2,\\
\overline{A_1A_2}^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,\\
&\vdots\\
\overline{A_1A_n}^2 &= (x_1 - x_n)^2 + (y_1 - y_n)^2.
\end{aligned}$$

Sečtením vyjde

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overline{A_1A_k}^2 = n\,(x_1^2 + y_1^2) + \sum_{k=1}^{k=n} (x_k^2 + y_k^2) - 2nx_1\xi - 2ny_1\eta.$$

Obdobně pro další vrcholy

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overline{A^2A_k^2} = n\,(x_2^2 + y_2^2) + \sum_{k=1}^{k=n} (x_n^2 + y_n^2) - 2nx_2\xi - 2ny_2\eta,$$

atd. a konečně

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overline{A_nA_k^2} = n\,(x_n^2 + y_n^2) + \sum_{k=1}^{k=n} (x_n^2 + y_n^2) - 2nx_n\xi - 2ny_n\eta.$$

Sečtením všech těchto rovnic dostaneme dvojnásobný součet čtverců všech možných spojnic bodů A a nazveme jej $2K$. Po krátké úpravě zmíněný součet objeví se ve tvaru

$$K = n \sum_{k=1}^{k=n} (x_k^2 + y_k^2) - n^2 (\xi^2 + \eta^2). \qquad (2)$$

Rovnici (1) lze tudíž psáti nyní ve tvaru

$$V = nr^2 + \frac{K}{n}, \qquad (3)$$

a slovy lze ji vyjádřiti takto:

Součet čtverečných vzdáleností libovolného bodu ode všech vrcholů daného n-úhelníka jest roven n-tému dílu součtu čtverců všech možných spojnic jeho vrcholů zvětšenému o n-násobný čtverec vzdálenosti tohoto bodu od arithmetického středu n-úhelníka.

Z této věty vyplývá dále: Poněvadž člen $\frac{K}{n}$ je pro daný mnohoúhelník konstantní, mění se V pouze s hodnotou r, t. j. ve vzdálenosti bodu B od arithmetického středu mnohoúhelníka.

Všem bodům, jimž přináleží totéž r, odpovídá i totéž V. Body o témže r leží na kružnici opsané z bodu S, i lze tedy pronésti větu:

Geometrickým místem všech bodů, jichž součet čtverečných vzdáleností od vrcholů daného mnohoúhelníka je stejný, je kružnice opsaná z arithmetického středu mnohoúhelníka jakožto středu poloměrem r.

Souvislost mezi r a V jest udána rovnicí (3). Jestliže r přechází v nullu, nabývá V své minimální hodnoty

$$V_{min.} = \frac{K}{n}.$$

Kružnice zmíněná se smrskuje na bod S. Z uvedené úvahy lze tedy pronésti další vlastnost bodu S, totiž:

Součet čtverečních vzdáleností libovolného bodu od vrcholů daného mnohoúhelníka nabývá minimální hodnoty, jestliže tento bod se stotožňuje s arithmetickým středem.

II.

Buďtež dány mnohoúhelníky dva, o n_1 a n_2 vrcholech. Chceme určiti geometrické místo bodů, jež hoví podmínce

$$V_1 + \nu V_2 = C,$$

kde V_1 a V_2 značí součet čtverečných vzdáleností libovolného bodu od vrcholů prvého, resp. druhého mnohoúhelníka, ν určitý poměr a C jakousi konstantu.

Užívajíce týchž označení jako v prvé části článku našeho, můžeme napsati žádanou podmínku ve tvaru

$$\frac{K_1}{n_1} + \nu \frac{K_2}{n_2} + n_1 r_1^2 + \nu n_2 r_2^2 = C.$$

Dosazením za

$$r_1^2 = (x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2$$

a

$$r_2^2 = (x - \xi_2)^2 + (y - \eta_2)^2$$

získáme po krátké úpravě rovnice kruhu

$$(n_1 + \nu n_2)(x^2 + y^2) - 2x(n_1 \xi_1 + \nu n_2 \xi_2) - 2y(n_1 \eta_1 + \nu n_2 \eta_2)$$
$$= C - \left(\frac{K_1}{n_1} + \nu \frac{K_2}{n_2}\right) - n_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) - \nu n_2(\xi_2^2 + \eta_2^2).$$

Jest tedy hledaným geometrickým místem bodů hovících hořejší podmínce kružnice.

Střed její S_ν má souřadnice

$$\xi_\nu = \frac{n_1 \xi_1 + \nu n_2 \xi_2}{n_1 + \nu n_2}, \quad \eta_\nu = \frac{n_1 \eta_1 + \nu n_2 \eta_2}{n_1 + \nu n_2}.$$

Na základě těchto souřadnic lze snadno zjistiti, že bod S_ν nachází se na spojnici obou arithmetických středů $S_1 S_2$, a že dělí tuto v poměru

$$\overline{S_1 S_\nu} : \overline{S_2 S_\nu} = - n_2 \nu : n_1. \tag{4}$$

Poloměr zmíněné kružnice jest

$$r^2_\nu = (x - \xi_\nu)^2 + (y - \eta_\nu)^2.$$

Zavedeme-li tuto hodnotu do hořejší rovnice, vyjde po náležité úpravě

$$C = V_1 + \nu V_2 = \frac{\nu K' + K_1 + K_2}{n_1 + \nu n_2} + r^2_\nu (n_1 + \nu n_2), \tag{5}$$

kde K_1 a K_2 značí součty čtverců všech možných spojnic vrcholů prvého, resp. druhého mnohoúhelníka a K' součet čtverců všech možných spojnic vrcholů prvého s vrcholy druhého mnohoúhelníka.

Rovnice tato je svojí formou úplně analogická s rov. (3) a lze tudíž i analogické důsledky z ní plynoucí vyjádřiti.

Jestliže jest poměr ν při téže absolutní hodnotě jednou positivní, jednou negativní, nabýváme 2 kružnic o středech S_ν' a S_ν'', jež jsou harmonicky sdruženy dle středů S_1 a S_2, čili

$$\frac{\overline{S_1S_\nu'}}{\overline{S_2S_\nu'}} = -\frac{\overline{S_1S_\nu''}}{\overline{S_2S_\nu''}}.$$

Pro zvláštní případy obdržíme:

Je-li $\nu = 1$:

$$V_1 + V_2 = \frac{K_1 + K_2 + K'}{n_1 + n_2} + (n_1 + n_2)\, r^2_\nu.$$

Pro $\nu = -1$:

$$V_1 - V_2 = \frac{K_1 + K_2 - K'}{n_1 - n_2} + (n_1 - n_2)\, r^2_\nu.$$

Je-li mimo to v druhém případě ještě $V_1 = V_2$, nabývá r_ν hodnoty

$$r^0_\nu = \frac{\sqrt{K' - K_1 - K_2}}{n_1 - n_2}.$$

Střed této kružnice S^0_ν nalézá se na spojnici S_1S_2, dělíc ji v poměru $\overline{S_1S^0_\nu} : \overline{S^0_\nu S_2} = n_2 : n_1$, jak z rov. (4) vysvítá.

Je-li pak ještě $n_1 = n_2$, uniká střed kružnice do nekonečna a kružnice transformuje se na přímku kolmou ke spojnici S_1S_2. Pata této přímky dělí spojnici $\overline{S_1S_2}$ v poměru

$$\frac{K' - 2K_2}{-K' + 2K_1}.$$

Budiž zde uvedena ještě následující relace:

$$s^2 = \frac{K'}{n_1 n_2} - \left(\frac{K_1}{n_1^2} + \frac{K_2}{n_2^2}\right), \tag{6}$$

kde $s = \overline{S_1S_2}$.

Této relace získá se tím způsobem, že vyjádří se součet čtverečných vzdáleností vrcholů prvého od vrcholů druhého mnohoúhelníka dotyčnými souřadnicemi, načež užitím věty (2) přicházíme k uvedené relaci. Ještě jednodušeji vede k cíli základní věta (3). (Dokonč.)

O zjevech resonance u parníků a železnic.

Kapitola z technické fysiky.

Podává s. doc. Dr. B. Kučera.

Vysoký stupeň vývoje, k němuž dospěly v posledních dobách vědy technické, je organicky podmíněn intensivním upotřebením poznatků „čistých" věd, v prvé řadě ovšem fysiky a chemie. Když *Faraday* r. 1831 objevil elektrický proud indukcí vzbuzený, dobře tušil, že nalezl nejvýhodnější cestu, jak lze mechanickou práci — pohyb magnetů — proměňovati v el. proud, leč ponechal velkomyslně zužitkování svého tak důležitého objevu technice. Jak veliký však rozdíl mezi prvým magnetoelektrickým strojem *Pixiiovým* (1832), jehož model leckde ještě ve sbírkách fysikálních straší, u něhož nemotorně otáčely se póly permanentního podkovovitého magnetu pod dvěma cívkami, z nichž proud odváděn, a mezi dnešními, tak grandiósní obnosy mechanické práce v elektrickou energii přeměňujícími stroji dynamoelektrickými. Teprve technik *Werner von Siemens* r. 1866 umožnil tento převrat applikací tak všeobecně známého zjevu, že železo, i měkké, když jednou bylo zmagnetisováno, neztrácí magnetismus svůj úplně, nýbrž zůstává alespoň v malé míře remanentně magnetickým. Tento remanentní magnetismus v elektromagnetech dynama stačí k tomu, aby, uvedeme-li dynamo v chod, vzbudil slabý proud elektrický ve vinutí kotvy, který zase sesiluje magnetismus v elektromagnetech, takže po několika málo vteřinách dynamo počne pracovati normálně.

Jak dlouhou dobu potřebovala technika k využití *Faradayova* objevu! Dnes je tomu jinak. Hned ve šlépějích badatele fysikálního, nebo ještě spíše ruku v ruce s ním jdou muži technicky školení, aby výzkumů vědeckých využitkovali pro průmysl a tím i pro život obecný. Před očima nám vzrůstá nové odvětví vědy, fysika technická neboli applikovaná, a v čilém Německu,