Karel Rychlík

Poznámky k theorii interpolace

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 1, 13--44

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109267`

II. Podmínce té se vyhoví též, je-li:
α) $f(x) \equiv 0$, t. j. daná rovnice differenciální je homogenní,[1]
β) aneb je x_0 kořen rovnice $f(x) = 0$.

III. Konečně se vyhoví téže podmínce, je-li

$$\varphi(x_0) + x_0 \psi(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad \psi(x_0) = 0,$$

tedy je-li

α) $$\varphi(x) \equiv 0, \quad \psi(x) \equiv 0$$

za každé x. V případě tomto je tvar dané differenciální rovnice

$$y'' = f(x)$$

a místo středu křivosti (S) je zde opět *dupplikatrix Longchampsa*, aneb musí míti

β) rovnice $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ společný kořen x_0.

Všechny tečny inflexní v bodech přímky $x = x_0$ vedené ke křivkám sítě splývají s tou přímkou.

Poznámky k theorii interpolace.

Napsal **K. Rychlík.**

I.

Uvažujme funkci $f(z)$ proměnné $z = x + iy$ analytickou v oboru (S), omezeném čarou S, a předpokládejme, že známe v n bodech vesměs různých $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, nalézajících se uvnitř oboru (S), hodnoty funkce $f(z)$. Jest možno stanoviti jednoznačně polynom $G_n(z)$, stupně $n-1$, nabývající týchž hodnot jako funkce $f(z)$ totiž $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots f(x_n)$, pro $z = x_1, x_2, \ldots x_n$. Pak přirozeně se vyskytuje otázka, kdy polynom $G_n(z)$ s n rostoucím do nekonečna konverguje k funkci

---

[1]) Srovnej odvození dané ve Zprávách o zasedání Kr. české společnosti nauk 5. května 1905 pro tento případ. Jestliže daná differenciální rovnice jest úplná, neleží střed inflexní na ose X. Pošineme-li osu X o λ, t. j. upotřebíme-li substituce $y = \eta + \lambda$, přejde daná differenciální rovnice (1) v $\eta'' + \varphi(x)\,\eta' + \psi(x)\,\eta = 0$, je-li $f(x) - \lambda\psi(x) = 0$ za $x = x_0$, jest $\lambda = \dfrac{f(x_0)}{\psi(x_0)}$, tím obdržíme opět tytéž souřadnice středu inflexního N jako ve čl. 2. Takto svedeme případ β) na případ α).

$f(z)$, čímž by se způsobem celkem jednoduchým znázornila funkce $f(z)$ posloupností polynomů.*) Úloha ta vede ke zkoumání konvergence zbytku $R_n(z) = f(z) - G_n(z)$ pro n rostoucí do nekonečna. Jako při řadě Taylorově, tak i zde jeví se výhodným vyjádřiti si pomocí Cauchy-ho věty tento zbytek křivočarým integrálem.**)

Postupným použitím identity

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - x_k} + \frac{z - x_k}{\zeta - x_k} \cdot \frac{1}{\zeta - z}$$

obdržíme vztah

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - x_1} + \frac{z - x_1}{(\zeta - x_1)(\zeta - x_2)} + \frac{(z - x_1)(z - x_2)}{(\zeta - x_1)(\zeta - x_2)(\zeta - x_3)}$$
$$+ \ldots + \frac{(z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_n)}{(\zeta - x_1)(\zeta - x_2)\ldots(\zeta - x_n)} \frac{1}{\zeta - z},$$

který možno psáti, zavedeme-li označení

$$g_k(z) = (z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_k),$$

ve tvaru

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{g_1(\zeta)} + \frac{g_1(z)}{g_2(\zeta)} + \frac{g_2(z)}{g_3(\zeta)} + \ldots$$
$$+ \frac{g_{n-1}(z)}{g_n(\zeta)} + \frac{g_n(z)}{g_n(\zeta)} \frac{1}{\zeta - z}.$$

Násobme tuto rovnici na obou stranách $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ a integrujme podél čáry S. Tak obdržíme vzhledem ke Cauchy-ho

---

*) Možnost znázornění funkce analytické v oboru (S) posloupností polynomů konvergující stejnoměrně v každém oboru (S'), který leží uvnitř oboru (S), dokázal Runge (Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Acta mathematica, sv. VI., 1885). Věta ta jest rozšířením věty Weierstrassovy, týkající se znázornění spojitých funkcí reálné proměnné posloupností polynomů.

**) Postup zde vyložený vyskytuje se ve Frobeniově pojednání: Über die Entwickelung analytischer Functionen in Reihen, die nach gegebenen Functionen fortschreiten. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, sv. 73., 1871.) Vyjádření zbytku integrálem křivočarým se však obyčejně přičítá Hermitovi (Sur la formule d'interpolation de Lagrange [Journ. f. d. r. und a. Math., sv. 84., 1878]). Viz také Lerch: Poznámky k theorii interpolace (Rozpravy České Akademie, třída II., ročník I., číslo 32.).

vzorci

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

že

$$f(z) = G_n(z) + R_n(z), \tag{1}$$

kdež kladeno

$$G_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{g_1(\zeta)}\, d\zeta + \frac{g_1(z)}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{g_2(\zeta)}\, d\zeta + \dots$$

$$+ \frac{g_{n-1}(z)}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{g_n(\zeta)}\, d\zeta, \tag{2}$$

$$R_n(z) = \frac{g_n(z)}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{g_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{3}$$

$G_n(z)$ jest skutečně polynom stupně $n-1$, nabývající v bodech $z = x_k$ hodnot $G_n(x_k) = f(x_k)$ $(k = 1, 2, \dots n)$, poněvadž pro ty hodnoty jest $g_n(z) = 0$, tedy také $R_n(z) = 0$.

Jedná se o to, vyjádřiti v příhodném tvaru polynom $G_n(z)$.

Zaveďme označení

$$f_k(x_1, x_2 \dots x_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - x_1)(\zeta - x_2)\dots(\zeta - x_k)}. \tag{4}$$

Pak $f_1(x_1) = f(x_1)$ a $f_k(x_1, x_2, \dots x_k)$ jsou tak zvané funkce interpolační.

Snadno lze ukázati, že $f_k(x_1, x_2, \dots x_k)$ jest symmetrická funkce proměnných $x_1, x_2, \dots x_k$. Poněvadž funkce $f(\zeta)$ jest analytická v oboru (S), má funkce na pravé straně v rovnici (4) se vyskytující jen póly vesměs jednoduché, $x_1, x_2, \dots x_k$. Residua jejich jsou $\frac{f(x_1)}{g'_k(x_1)}, \frac{f(x_2)}{g'_k(x_2)}, \dots \frac{f(x_k)}{g'_k(x_k)}$, integrál pak roven jest součtu residuí, tak že

$$\begin{aligned} f_k(x_1, x_2, \dots x_k) = {} & \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_k)} \\ & + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_k)} \\ & + \dots\dots\dots \\ & + \frac{f(x_k)}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)\dots(x_k - x_{k-1})} \end{aligned} \tag{5}$$

Funkce interpolační možno počítati rekurrentně. Rozložme zlomek v rovnici (4) se vyskytující:

$$\frac{1}{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_k)}$$

$$=\frac{1}{x_k-x_l}\left(\frac{1}{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_{l-1})(z-x_{l+1})\ldots(z-x_k)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_{k-2})(z-x_{k-1})}\right).$$

Z toho vidíme, že

$$f_k(x_1, x_2, \ldots x_k) =$$

$$\frac{f_{k-1}(x_1, x_2, \ldots x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots x_k) - f_{k-1}(x_1, x_2, \ldots x_{k-2}, x_{k-1})}{x_k - x_l} \tag{6}$$

I můžeme funkce interpolační počítati dle schematu:

$$\begin{array}{l|l|l}
f(x_1) & & \\
 & f_2(x_1, x_2) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} & \\
f(x_2) & & f_3(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{f_2(x_2, x_3)-f_2(x_1, x_2)}{x_3-x_1} \\
 & f_2(x_2, x_3) = \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} & \\
f(x_3) & & f_3(x_2, x_3, x_4) = \dfrac{f_2(x_3, x_4)-f_2(x_2, x_3)}{x_4-x_2} \\
 & f_2(x_3, x_4) = \dfrac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3} & \\
f(x_4) & & \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Výraz

$$G_n(z) = f(x_1) + (z-x_1)f_2(x_1, x_2) + (z-x_1)(z-x_2)f_2(x_1, x_2, x_3)$$
$$+ \ldots + (z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n)f_n(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

představuje interpolační vzorec Newtonův.

Všimněme si nyní zbytku $R_n(z)$.

Integrál $\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(\zeta)}{g_n(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta - z}$ v něm se vyskytující jest interpolační funkce $f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots x_n, z)$, kterou můžeme vyjádřiti, užijeme-li vzorce (5), ve tvaru

$$\frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)(x_1 - z)} + \ldots$$
$$+ \frac{f(x_n)}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})(x_n - z)}$$
$$+ \frac{f(z)}{(z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_n)}.$$

Uvážíme-li, že $f(z) = G_n(z) + R_n(z)$, obdržíme z tohoto vzorce přímo interpolační vzorec Lagrange-ův

$$G_n(z) = \frac{(z - x_2)(z - x_3)\ldots(z - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_v)} f(x_1) + \ldots$$
$$+ \frac{(z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})} f(x_n). \tag{8}$$

Z toho vidíme, že interpolační vzorec Newtonův a Lagrange-ův liší se jen formálně a že tedy zbytek v obou případech jest stejný.

II.

Budeme se zabývati příkladem pro praktické použití nejdůležitějším, kdy body, v nichž jest funkce dána, leží na ose čísel reálných.*) Předpokládejme, že položeny jsou tak, že

$$a = t_0 \leqq x_1 \leqq t_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq t_{k-1} \leqq x_k \leqq t_k \leqq \ldots x_n = b,$$

kdež $t_k = \chi(s_k)$ jsou hodnoty funkce

$$t = \chi(s), \tag{1}$$

jichž nabývá pro argumenty postupující řadou arithmetickou $s_0 = \alpha$, s_1, s_2, ... $s_n = \beta$; $t = \chi(s)$ nechť jest funkce analytická pro s v intervallu $\alpha \ldots \beta$ **), nabývající v něm hodnot reálných, té vlastnosti, že derivace $\chi'(s) = \frac{d\chi(s)}{ds}$ nemá bodů nullových v intervallu $\alpha \ldots \beta$. Pak jest skutečně možno vyhověti podmínce, aby funkce t pro $\alpha \leqq s \leqq \beta$ neklesala.

---

*) Případem tím v tvaru méně obecném zabývá se Runge (Theorie und Praxis der Reihen, Sammlung Schubert, čís. 32.).

**) Funkce jest »analytická v intervallu«, je-li možno vésti čáru, obklopující úsečku onen intervall znázorňující tak, aby uvnitř této čáry byla funkce analytická.

Uvažujme

$$\sqrt[n]{g_n(z)} = \sqrt[n]{(z - x_1)(z - x_2) \ldots (z - x_n)}.$$

Jest to funkce n značná, která se rozpadne na n větví jednoznačných, vedeme-li řez úsečkou ab. Budeme uvažovati tu větev, která má pro bod z v nekonečnu rozvoj $z + P\left(\frac{1}{z}\right)$, kdež $P\left(\frac{1}{z}\right)$ značí řadu potenční, dle mocností $\frac{1}{z}$ postupující.

Pak bude $log \sqrt[n]{g_n(z)}$ míti pro bod z v nekonečnu rozvoj $log\, z + P_1\left(\frac{1}{z}\right)$, kdež $P_1\left(\frac{1}{z}\right)$ značí opět řadu potenční, dle mocností $\frac{1}{z}$ postupující. Při $log \sqrt[n]{g_n(z)}$ omezíme se na uvažování hodnoty hlavní*), kterou označíme $u_n + iv_n$. Toho docílíme, jak snadno lze nahlédnouti, klademe-li ve výraze

$$w_n(z) = u_n + iv_n = \frac{1}{n}\left(log\,(z - x_1) + log\,(z - x_2) + \ldots \right.$$
$$\left. + \, log\,(z - x_n)\right)$$

za logarithmy $log\,(z - x_k)$ vesměs hlavní hodnoty. Pak bude $w_n(z)$ jednoznačnou analytickou funkcí v rovině, v níž veden řez od $-\infty$ do b.

u_n bude na obou okrajích řezu konvergovati k téže hodnotě. Bude tudíž jednoznačnou spojitou funkcí proměnných x, y v celé rovině.

Blíží-li se bod z shora k úsečce ab do polohy mezi x_m a x_{m+1}, blíží se argumenty $log\,(z - x_1) \ldots log\,(z - x_m)$ hod-

---

*) Hodnotou hlavní rozumíme onu hodnotu logarithmu, jež má část ryze imaginárnou v mezích $-\pi i \ldots + \pi i$, obě meze inclusive. Tím docílíme toho, že $log\,(z - c)$, kdež c jest reálná konstanta, jest jednoznačnou analytickou funkcí v rovině, v níž veden řez od $-\infty$ k c a na horním jeho okraji kladeno

$$log\,(z - c) = log \mid z - c \mid + \pi i,$$

na dolním pak

$$log\,(z - c) = log \mid z - c \mid - \pi i.$$

notě 0, kdežto argumenty $log(z - x_{m+1}) \ldots log(z - x_n)$ se blíží hodnotě π. Bude tedy v_n míti na horním okraji řezu hodnotu

$$\left.\begin{array}{l} v_n = \dfrac{n - m}{n}\,\pi, \\ \text{Podobnou úvahou obdržíme, že na dolním okraji} \\ v_n = -\dfrac{n - m}{n}\,\pi. \end{array}\right\} \quad (2)$$

V části pak řezu, kdež

$$\left.\begin{array}{r} z = x < a \text{ jest na horním okraji řezu } v_n = \pi \\ \text{a na dolním } v_n = -\pi. \end{array}\right\} \quad (2')$$

Uvažujme nyní, co nastane, necháme-li n vzrůstati do nekonečna. Vzhledem k tomu, že $t = \chi(s)$ jest funkce proměnné s analytická v intervallu $\alpha \ldots \beta$, jest

$$\lim_{n=\infty} \frac{t_k - t_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} = \chi'(s_k),$$

a tudíž

$$t_k - t_{k-1} = (s_k - s_{k-1})\left(\chi'(s_k) + \varepsilon\right),$$

kdež

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon = 0.$$

Avšak

$$s_k - s_{k-1} = \frac{\beta - \alpha}{n}$$

a tedy

$$\frac{1}{n} = \frac{t_k - t_{k-1}}{(\beta - \alpha)\left(\chi'(s_k) + \varepsilon\right)}. \quad (3)$$

Poněvadž $\chi'(s)$ jest funkce proměnné s analytická v intervallu $\alpha \ldots \beta$, a nemá nullových bodů, jest i převratná hodnota $\dfrac{1}{\chi'(s)}$ analytická.

Kladme

$$\frac{1}{\chi'(s)} = \frac{\beta - \alpha}{b - a}\,\varphi(t). \quad (4)$$

Pak bude také $\varphi(t)$ analytickou funkcí argumentu t v intervallu ab, v němž bude nabývati stále hodnot reálných kladných.

Bude pak platiti vztah

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \frac{b-a}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta ds = b-a.$$

Klademe-li

$$\frac{1}{(\beta-\alpha)\left(\chi'(s_k)+\varepsilon\right)} = \frac{\varphi(x_k)+\delta}{b-a},$$

shledáme, že také $\lim_{n=\infty} \delta = 0.$

Tím obdržíme ze vzorce (3)

$$\frac{1}{n} = \frac{\left(\varphi(x_k)+\delta\right)(t_k - t_{k-1})}{b-a}. \qquad (3')$$

Na základě této rovnice možno psáti

$$w_n(z) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\varphi(x_k)+\delta\right)\log(z-x_k)(t_k-t_{k-1}).\right]$$

Poněvadž $t = \chi(s)$ jest funkce v intervallu (pro s) $\alpha \ldots \beta$ analytická, jest v něm i spojitá; i jest možno ke každému kladnému číslu ε, jakkoliv malému, nalézti takové kladné číslo η, aby

$$|t_k - t_{k-1}| < \varepsilon, \text{ zvolíme-li } |s_k - s_{k-1}| < \eta.$$

Ježto $s_k - s_{k-1} = \dfrac{\beta-\alpha}{n}$, dosáhneme toho, volíme-li

$$n > \left|\frac{\beta-\alpha}{\eta}\right|.$$

Lze tudíž nalézti ke každému libovolně malému číslu $\varepsilon > 0$ takové číslo $N > 0$, že bude

$$|t_k - t_{k-1}| < \varepsilon, \text{ zvolíme-li } n > N.$$

Vyhovuje tedy rozdělení úsečky $ab : t_0, t_1, t_2 \ldots t_n$ podmínkám, vyžadovaným při definici integrálu omezeného.

Předpokládejme nejprve, že bod z leží vně úsečky ab. Hodnoty $\varphi(x_k)\log(z-x_k)$ vznikají, klademe-li za t čísla x_k ve výraze $\varphi(t)\log(z-t)$, kterýžto výraz se mění spojitě, probíhá-li t úsečku ab. Necháme-li tedy n růsti do nekonečna, obdržíme, že

$$\lim_{n=\infty} w_n(z) = w(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\, log\,(z-t)\, dt$$
$$+ \frac{1}{b-a}\int_a^b \delta\, log\,(z-t)\, dt.$$

O integrálu $\int_a^b \delta\, log\,(z-t)\, dt$ možno pak snadno dokázati, že konverguje k nulle.

Uvažujme nyní případ, že bod z leží na úsečce ab, na př. na horním okraji řezu. Pak $\varphi(t)\, log\,(z-t)$ není spojitou funkcí proměnné t, probíhá-li t úsečku ab. Mysleme si, že bod z se blíží do polohy své na úsečce ab mezi x_m a x_{m+1} a pišme

$$w_n(z) = \frac{1}{b-a}\Big[\sum_{k=1}^{m} log\,(z-x_k)\,(t_k - t_{k-1})\,(\varphi(x_k) + \delta)$$
$$+ \sum_{k=m+1}^{n} log\,(z-x_k)\,(t_k - t_{k-1})\,(\varphi(x_k) + \delta)\Big].$$

Tento výraz, z podobných důvodů jako dříve, konverguje, roste-li n do nekonečna k výrazu

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'} \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{z-\varepsilon} \varphi(t)\, log\,(z-t)\, dt + \int_{z+\varepsilon'}^{b} \varphi(t)\, log\,(z-t)\, dt\right],$$

kdež $\lim_{n=\infty} \varepsilon = \lim_{n=\infty}(z-x_m) = 0$ a $\lim_{n=\infty} \varepsilon' = \lim (x_{m+1} - z) = 0$,

Nad úsečkou $z-\varepsilon \ldots z+\varepsilon'$ opišme polokroužek, probíhající pod úsečkou ab. Snadno možno ukázati, že integrál $\int \varphi(t)\, log\,(z-t)\, dt$, vzatý přes tento kroužek, konverguje k nulle. Výraz $\varphi(t)\, log\,(z-t)$ bude se měniti spojitě, probíhá-li t dráhu, skládající se z úsečky $a \ldots z-\varepsilon$, z polokroužku nad úsečkou $z-\varepsilon \ldots z+\varepsilon'$ a z úsečky $z+\varepsilon' \ldots b$. I možno říci, že

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{g_n(z)} = w(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\, log\,(z-t)\, dt,$$

kdež integrace se vztahuje na dráhu svrchu vytčenou. Mohli bychom však také $w(z)$ vyjádřiti integrálem přímočarým

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\, log\,(z-t)\, dt,$$

kdybychom použili pojmu integrálu nevlastního.

Podobně tomu bude, je-li bod z na úsečce ab na dolním okraji řezu.

Užijeme-li pak věty Cauchy-ho, můžeme říci, že

$$w(z) = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{g_n(z)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\, log\,(z-t)\, dt, \tag{5}$$

při čemž $log\,(z-t)$ vychází z bodu a s hodnotou hlavní a za dráhu integrační zvolíme libovolnou čáru spojující body ab, té vlastnosti, že na ní, ani v oboru omezeném touto čarou a úsečkou ab neleží bod singulární funkce $\varphi(t)$ a probíhající

pod osou čísel reálných, leží-li z nad osou
a nad „ „ „ „ z pod „ .

Pak bude $w(z)$ jednoznačnou funkcí analytickou v rovině, v níž veden řez od $-\infty$ do b.

u, kteréž možno psáti ve tvaru integrálu

$$u = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\, log\, r\, dt, \quad r = |\, z - t\,|\,,$$

bude spojitou, jednoznačnou funkcí proměnných x, y v celé rovině, kdežto v, jakož snadno nalezneme, užijeme-li vzorce (3′) a necháme-li v (2) n růsti do nekonečna, neb konečně přímo ze vzorce (5), má na horním okraji řezu na úsečce ab hodnotu

$$v = \frac{\pi}{b-a}\int_x^b \varphi(t)\, dt,$$

kdežto na dolním okraji řezu na úsečce ab jest (6)

$$v = -\frac{\pi}{b-a}\int_x^b \varphi(t)\, dt;$$

na části pak řezu, kdež

$$\left.\begin{array}{l} x < a \text{ jest na horním okraji } v = \pi \\ \quad\text{a na dolním okraji } v = -\pi. \end{array}\right\} \quad (6')$$

Užíváme-li v integrále

$$w(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\, log\,(z-t)\, dt$$

dráhy, kterou jsme svrchu vytkli, jest dovolena differenciace dle parametru z za znamením integračním, tak že

$$w'(z) = \frac{dw(z)}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{\varphi(t)}{z-t} dt. \quad (7)$$

Pro funkci $w'(z)$ má význam pouze řez vedený úsečkou ab, poněvadž se na části $-\infty \ldots a$ hodnoty $w(z)$ liší pouze o konstantu.

Nalézá-li se bod z mimo úsečku ab, lze voliti za dráhu integrační úsečku ab, tak že

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \dfrac{(x-t)\,\varphi(t)}{(x-t)^2+y^2} dt, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{b-a}\displaystyle\int_a^b \dfrac{\varphi(t)}{(x-t)^2+y^2} dt. \end{array}\right. \quad (8)$$

Pro body na úsečce ab dlužno uvažovati limitu těchto výrazů pro $y = 0$. Z toho plyne přímo, že $\frac{\partial u}{\partial x}$ má touž hodnotu na obou okrajích řezu vedeného úsečkou ab, že tedy jest jednoznačnou, spojitou fnnkcí proměnných x, y v celé rovině. Naproti tomu $\frac{\partial u}{\partial y}$ nabývá hodnot stejných absolutní hodnotou, avšak opačného znamení na okrajích řezu. Ostatně můžeme hodnoty tyto určiti, užijeme-li vzorce (6); z toho obdržíme

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\pi}{b-a}\,\varphi(x) \text{ na horním} \\[2ex] \quad\text{a } -\dfrac{\pi}{b-a}\,\varphi(x) \text{ na dolním okraji.} \end{array}\right\} \quad (9)$$

Ze vzorců (8) a (9) plyne snadno, že $w'(z)$ není nikde v rovině rozříznuté $= 0$.

Jest tudíž také $log\, w'(z)$ jednoznačnou analytickou funkcí v rovině, v níž veden řez $a \ldots b$. Klademe-li $w'(z) = Re^{i\Phi}$, bude vzhledem k tomu, že

$$w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \quad tg\, \Phi = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

a ježto $log\, w'(z) = log\, R + i\Phi$, jest $tg\, \Phi$ jednoznačnou, spojitou funkcí proměnných (x, y) v rovině s řezem $a \ldots b$.

Dále plyne z té okolnosti, že $w(z)$ jest jednoznačnou analytickou funkcí v rovině opatřené řezem $-\infty \ldots b$, v níž není nikde $w'(z) = 0$, že možno definovati z jako jednoznačnou, analytickou funkci proměnné w, pokud se w mění tak, že z nepřekročí řez $-\infty \ldots b$. Položíme-li pak $z = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, budou za stejných podmínek $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ jednoznačné, spojité funkce proměnných u, v.

Uvažujme křivky $u = const.$ Vzhledem k spojitosti funkce u v celé rovině, budou to křivky spojité, a ježto funkce $tg\, \Phi$, kterouž jest směr jejich tečen určen, jest jednoznačná a spojitá v rovině, v níž veden řez $a \ldots b$, nebudou míti bodů mnohonásobných a směr tečny bude se spojitě měniti, vyjímaje v bodech úsečky ab (v nich přejde tečna z polohy jedné do polohy symmetrické). Poněvadž u jest jednoznačná funkce proměnných (x, y), prochází každým bodem roviny jediná křivka $u = const.$ Možno rovnici takové křivky obdržeti, položíme-li v rovnicích $x = \varphi(u, v)$ a $x = \psi(u, v)$ $u = const$ a necháme v měniti. I vidíme, poněvadž $\varphi(u, v)$ a $\psi(u, v)$ jsou jednoznačné, spojité funkce, že $u =$ konst. jsou jednoduché křivky uzavřené. Taková křivka $f(x, y) = 0$ dělí body roviny ve dva obory té vlastnosti, že uvnitř jest

$$f(x, y) < 0, \text{ (resp. } > 0)$$

a vně

$$f(x, y) > 0, \text{ (resp. } < 0).$$

Z rovnice

$$u = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\, log\, r\, dt$$

plyne, ježto $\varphi(t)$ má stále kladnou hodnotu v intervallu $a \ldots b$, že pro dostatečně vzdálené body roviny nabývá u libovolně velikých hodnot kladných. Bude tedy křivka $u = c_1$ obklopovati křivku $u = c_2$, je-li $c_1 > c_2$.

Přistupme nyní k diskussi zbytku $R_n(z)$.

Podíl $\frac{g_n(z)}{g_n(\zeta)}$ konverguje a má za limitu 0, roste-li n do nekonečna, obklopuje-li křivka $u = c_\zeta$, procházející bodem ζ, křivku $u = c_z$, jdoucí bodem z. Jest totiž

$$\lim_{n=\infty} \left| \sqrt[n]{g_n(z)} \right| = e^{c_z}$$

a

$$\lim_{n=\infty} \left| \sqrt[n]{g_n(\zeta)} \right| = e^{c_\zeta},$$

tedy

$$\lim_{n=\infty} \left| \sqrt[n]{\frac{g_n(z)}{g_n(\zeta)}} \right| = e^{c_z - c_\zeta}.$$

Obklopuje-li křivka $u = c_\zeta$ křivku $u = c_z$, jest $c_\zeta > c_z$, $e^{c_z - c_\zeta} < 1$.

Z toho plyne, že možno, volíme-li n dosti veliké, dosíci toho, že

$$\left| \sqrt[n]{\frac{g_n(z)}{g_n(\zeta)}} \right| = k, \text{ kdež } 0 < k < 1.$$

I bude

$$\left| \frac{g_n(z)}{g_n(\zeta)} \right| = k^n \text{ a tedy } \lim_{n=\infty} \left| \frac{g_n(z)}{g_n(\zeta)} \right| = 0.$$

V případě, že křivka $u = c_\zeta$ leží uvnitř křivky $u = c_z$, posloupnost $\frac{g_n(z)}{g_n(\zeta)}$ diverguje.

Snadno nahlédneme, že posloupnost podílů $\frac{g_n(z)}{g_n(\zeta)}$ konverguje stejnoměrně k nulle pro ζ na každé čáře, probíhající vně křivky $u = c_z$. Pak totiž existuje křivka $u = \gamma$ té vlastnosti, že křivka $u = c_z$ leží uvnitř a čára uvažovaná vně, a klademe-li $e^{c_z - \gamma} = k$, budou členy posloupnosti $\left| \frac{g_n(z)}{g_n(\zeta)} \right|$ od jistého n počínaje vesměs menší než členy konvergentní posloupnosti k^n.

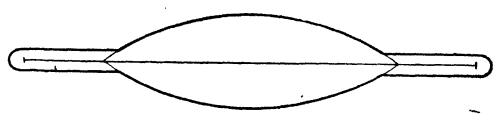
Ve zbytku

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \frac{g_n(z)}{g_n(\zeta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

dlužno za dráhu integrační S zvoliti čáru, která obklopuje úsečku ab a uvnitř které leží bod z, tak aby na ní i uvnitř funkce $f(z)$ byla analytická. Aby pak posloupnost $\frac{g_n(z)}{g_n(\zeta)}$ konvergovala, dlužno dráhu S voliti tak, aby probíhala vně křivky $u = c_z$, jdoucí bodem z. Pak bude na této dráze posloupnost $\frac{g_n(z)}{g_n(\zeta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ konvergovati stejnoměrně. Budou totiž členy posloupnosti $\left|\frac{g_n(z)}{g_n(\zeta)}\right|$ od jistého n vesměs menší než členy konvergentní posloupnosti k^n, a označíme-li M horní mez funkce $|f(\zeta)|$, probíhá-li ζ dráhu S a ϱ nejkratší vzdálenost bodu z od čáry S, bude

$$\left| \frac{g_n(z)}{g_n(\zeta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| < k^n \frac{M}{\varrho},$$

$\int\limits_S \frac{g_n(z)}{g_n(\zeta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ bude rovněž konvergovati a absolutní hodnota jeho bude $< k^n \frac{Ms}{\varrho}$, kdež s značí délku dráhy integrační S. Bude tudíž $\lim\limits_{n=\infty} R_n(z) = 0$. Dráha S vyžadovaných vlastností existuje vždy, nalézá-li se bod z uvnitř křivky $u = C$ jdoucí



Obr. 1.

bodem singulárním, tak že uvnitř jest funkce $f(z)$ analytická. Mohou zde nastati dva případy. Obklopuje-li křivka $u = C$ úsečku ab, pak možno zvoliti za čáru S křivku $u = const$, ležící uvnitř křivky $u = C$ a obklopující úsečku ab, tak že uvnitř leží bod z. Protíná-li pak křivka $u = C$ úsečku ab, zvolíme za čáru S čáru takto utvořenou. Bude pozůstávati z křivky

$u = const$, ležící uvnitř křivky $u = C$ a v nitru bod z obsahující v části jdoucí až velmi blízko k bodu, kde ta křivka úsečku ab protíná. Zde nastavíme kličku, která objímá část úsečky ab, ležící vně oné křivky $u = const.$

Poněvadž pak funkce $f(z)$ jest analytická na úsečce ab, jest možno vždy dosíci toho, aby byla analytická uvnitř takto sestrojené čáry S.*)

III.

Obraťme se nyní k speciálním případům. Aby zbytek

$$R_n(z) = \frac{g_n(z)}{2\pi i} \int_S \frac{f(z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{g_n(\zeta)}$$

učinil co možná nejmenším, aniž by bylo třeba činiti nějaké supposice o funkci $f(z)$, odporučuje Čebyšev zvoliti za $g_n(z)$ polynom, který se v daném intervallu $a \ldots b$ co nejméně od nully vzdaluje (t. j. má v onom intervallu ze všech polynomů stupně n-tého, které mají při nejvyšší mocnosti proměnné koefficient 1, nejmenší horní mez.**)

Ukážeme, že při této volbě dostačí, má-li posloupnost polynomů interpolačních $G_n(z)$ konvergovati k $f(z)$ s n rostoucím do nekonečna pro body z ležící na úsečce ab, aby funkce $f(z)$ byla na této úsečce analytická.***)

Omezíme-li se na intervall $-1 \ldots +1$, což nebude na ujmu všeobecnosti, poněvadž k obecnému případu možno snadno lineární substitucí přejíti, bude polynom hledané vlastnosti

$$g_n(z) = \frac{\cos(n \operatorname{arc} \cos z)}{2^{n-1}},$$

*) V připojeném obrazci znázorněna takto sestrojená draha integrační S pro případ dělení ekvidistantního.

**) Viz Oeuvres de Tchebychef par Markoff et Sonin:

8. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes.

15. Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions.

***) Teixeira v pojednání: Sur la convergence d'interpolation de Lagrange, Gauss, etc. (Journal für d. r. u. ang. Mathematik, sv. 126., 1903, Obras sobre Mathematica, sv. I., XIII.) činí požadavek, aby funkce $f(z)$ byla analytická v kruhu opsaném nad ab jako průměrem.

neboli $g_n(z) = (z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_n),$

kdež

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{2n},\ x_2 = \cos\frac{3\pi}{2n},\ x_3 = \frac{5\pi}{2n}, \dots x_n = \frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

I vidíme, že čísla $x_1, x_2, \dots x_n$ vzniknou, klademe-li do $t = \chi(s) = \cos s$ za s členy řady arithmetické.

Pak nalezneme snadno, že

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sin s} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$w(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log(z-t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \log(z - \cos s)\,ds.\ ^{*})$$

K vyčíslení $\int_0^\pi \log(z - \cos s)\,ds$ užijeme známého integrálu

$$\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos\varphi + a^2)\,d\varphi,$$

který má hodnotu 0, je-li $|a| \leqq 1$.

Klaďme $z - \cos s = c\,(1 - 2a\cos s + a^2)$,

což vyžaduje, aby

$$z = c\,(1 + a^2)$$
$$1 = 2ac$$

Jest tedy a kořenem rovnice

$$a^2 - 2az + 1 = 0$$

a c polovičním kořenem druhým.

---

*) Poněvadž body 1 a -1 jsou body singulárními pro funkci $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, dlužno uvažovati vlastně intervall $1-\varepsilon \dots -1+\varepsilon'$, kdež $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$, $\lim \varepsilon = 0$, $\lim \varepsilon' = 0$. V tomto intervallu možno $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ jednoznačně definovati. $\lim\limits_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon'=0}} \int_{-1+\varepsilon'}^{1-\varepsilon}\frac{\log(z-t)}{\sqrt{1-t^2}}$, kteráž existuje, označíme pak $\int_{-1}^{+1}\frac{\log(z-t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$

Rovnice ta má kořeny $z \pm \sqrt{z^2 - 1}$ a neleží-li bod z na úsečce $-1 \ldots +1$, má jeden z nich absolutní hodnotu > 1, druhý < 1.*)

Leží-li tedy bod z mimo úsečku $-1 \ldots +1$, zvolme za a ten kořen, při němž $|a| < 1$, tak že $|2c| > 1$.

Pak bude

$$\int_0^\pi log\,(z - cos\,s)\,ds = \int_0^\pi log\,c\,(1 - 2a\,cos\,s + a^2)\,ds =$$

$$= \int_0^\pi log\,c\,ds + \int_0^\pi log\,(1 - 2a\,cos\,s + a^2)\,ds = \pi\,log\,c$$

a tedy

$$w(z) = log\,\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2},$$

kdež při logarithmu zvolena hodnota hlavní a odmocnina vzata s takovým určením, aby $|z + \sqrt{z^2 - 1}| > 1$.

Z dřívějších úvah obecných víme, že $w(z)$ jest analytickou funkcí v rovině, v níž veden řez od $-\infty$ do 1; hodnotu na úsečce $-1 \ldots +1$ obdržíme, klademe-li $z = cos\,\zeta + i\varepsilon$ a necháme ε konvergovati k nulle.

$$|z + \sqrt{z^2 - 1}| = 1 + \frac{\varepsilon}{sin\,\zeta} + \text{členy s vyšší mocností } \varepsilon;$$

i vidíme, že, aby se vyhovělo podmínce

$$|z + \sqrt{z^2 - 1}| > 1,$$

nutno zvoliti ζ tak, aby $\frac{\varepsilon}{sin\,\zeta} > 0$.

Bude pak na úsečce $-1 \ldots +1$

na horním okraji řezu $w(z) = -\,log\,2 + i\zeta$,
na dolním „ „ $w(z) = -\,log\,2 - i\zeta$,

kdež $\zeta = arc\,cos\,z \quad 0 < \zeta < \pi$.

---

*) Abychom ukázali, že jedině na úsečce $-1 \ldots +1$ jest

$$|z \pm \sqrt{z^2 - 1}| = 1,$$

kladme $z = cos\,\zeta$. Pak $|z \pm \sqrt{z^2 - 1}| = |cos\,\zeta \pm i\,sin\,\zeta| = |e^{\pm i\zeta}|$. Má-li $|e^{\pm i\zeta}| = 1$, musí ζ býti číslo reálné a tudíž z číslo reálné a $|z| \leqq 1$.

Ze vzorce $w(z) = log \frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2}$, plyne, klademe-li

$u' = u + log\,2$ $\qquad z + \sqrt{z^2 - 1} = e^{u'+iv}$,

z čehož obdržíme $\qquad z - \sqrt{z^2 - 1} = e^{-u'-iv}$

a sečtením $\qquad 2z \qquad = e^{u'+iv} + e^{-u'-iv}$.

Z toho plynou pro reálné součásti rovnice $x = cos\,hu'\,cos\,v$,
$y = sin\,hu'\,sin\,v$.

I vidíme, že křivky $u = const$ jsou konfokální ellipsy o ohniskách -1 a $+1$, jež mají rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kdež kladeno na okamžik $a = cos\,hu'$, $b = sin\,hu'$. Hodnotě $u' = 0$, t. j. $u = -log\,2$, bude odpovídati úsečka $-1 \ldots +1$ sama. Ostatní ellipsy pak budou úsečku $-1 \ldots +1$ obklopovati.

I kdyby bod $z_1 = x_1 + iy_1$ ležel sebe blíže úsečce $-1 \ldots +1$, t. j. byl to bod takový, že

$$\alpha)\quad |x_1| \leqq 1 \quad \text{a} \quad y_1 = \pm \varepsilon$$

neb

$$\beta)\quad |x_1| = 1 + \varepsilon \quad \text{a} \quad y_1 = 0,$$

kdež ε jest libovolně malé číslo kladné, jest možno vésti ellipsu uvažované soustavy $u = const$, tak aby úsečku $-1 \ldots +1$ obklopovala a bod z_1 ležel vně.

V případě α) toho docílíme, zvolíme-li osu vedlejší b tak, aby $b < \varepsilon$, což jest možno vzhledem k tomu, že $\lim_{u'=0} sin\,hu' = 0$ v případě β) pak, je-li možno zvoliti hlavní osu a tak, aby $a < 1 + \varepsilon$, což opět lze provésti, ježto $\lim_{u'=0} cos\,hu' = 1$.

Poněvadž pak v tomto případě $\lim_{n=\infty} G_n(z) = f(z)$ pro body z, ležící uvnitř ellipsy $u = const$, jdoucí bodem singulárním, tak že uvnitř jest funkce $f(z)$ analytická, bude jistě posloupnost polynomů interpolačních $G_n(z)$ konvergovati pro body z ležící na úsečce $-1 \ldots +1$, je-li funkce $f(z)$ na této úsečce analytická, ať již bod singulární leží jakkoliv blízko této úsečce.

To však můžeme dokázati velmi snadno přímo. Poněvadž

$$g_n(z) = \frac{\cos(n \arccos z)}{2^{n-1}},$$

jest

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\cos(n \arccos z)}{\cos(n \arccos \zeta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Kladme $\qquad \arccos z = p + iq,$

tedy $\qquad z = \cos(p + iq).$

Je-li $q \gtrless 0$, možno vzhledem k tomu, že *cos* jest funkce sudá učiniti o q předpoklad, že $q > 0$.

Uvažujme konformní zobrazení dané relací

$$z = x + iy = \cos(p + iq) = \cos p \cos hq - i \sin p \sin hq.$$

Z ní plyne, že

$$x = \cos p \cos hq,$$
$$y = - \sin p \sin hq$$

a

$$\frac{x^2}{\cos h^2 q} + \frac{y^2}{\sin h^2 q} = 1,$$
$$\frac{x^2}{\cos^2 p} - \frac{y^2}{\sin^2 p} = 1.$$

I vidíme, že křivky $q = const$ jsou ellipsy a křivky $p = const$ hyperboly, vesměs konfokální o ohniskách -1 a $+1$. Každým bodem roviny prochází jediná. Je-li $q = 0$, pak $y = 0$, $x = \cos p$, tedy stále $|x| \leq 1$. Odpovídá tudíž hodnotě $q = 0$ úsečka $-1 \ldots +1$. Poněvadž $\cos h^2 q$ a $\sin h^2 q$ jsou funkce stále rostoucí v intervallu pro q $0 \ldots \infty$, bude ellipsa, při níž q jest větší, ellipsu s q menším objímati a naopak, všechny pak budou obklopovati úsečku $-1 \ldots +1$.

Je-li bod z mimo úsečku $-1 \ldots +1$, jest

$$\cos(n \arccos z) = \cos(np + niq) = \frac{e^{nip-nq} + e^{nip+nq}}{2}.$$

Vzhledem k předpokladu $q > 0$ bude $\lim\limits_{n=\infty} e^{-nq} = 0$, následkem čehož $|\cos(n \arccos z)| = \frac{1}{2} e^{nq} + \varepsilon_n$, kdež $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$.

Je-li bod z na úsečce $-1 \ldots +1$, má $\cos(n \arccos z)$ hodnotu reálnou a $|\cos(n \arccos z)| \leqq 1$.

Zvolme nyní ve zbytku

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\cos(n \arccos z)}{\cos(n \arccos \zeta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

za dráhu integrační S ellipsu uvažované soustavy, obklopující úsečku $-1 \ldots +1$, tak aby uvnitř i na ní byla funkce $f(z)$ analytická; že taková ellipsa vždy existuje, plyne z předpokladu, že funkce $f(z)$ jest na úsečce $-1 \ldots +1$ analytická.

Pak bude $|\cos(n \arccos \zeta)| = \frac{1}{2}e^{nq} + \varepsilon'_n$, $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon'_n = 0$, klademe-li $\zeta = \cos(p' + iq')$; probíhá-li pak bod ζ ellipsu S, bude q' konstantní.

Uvažujme nejprve případ, že bod z leží uvnitř ellipsy S mimo úsečku $-1 \ldots +1$. Bude jím procházeti ellipsa soustavy uvažované, jejíž $q < q'$, tak že

$$\left|\frac{\cos(n \arccos z)}{\cos(n \arccos \zeta)}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}e^{nq} + \varepsilon_n}{\frac{1}{2}e^{nq'} + \varepsilon'_n}\right| = \left|\left(\frac{e^q}{e^{q'}}\right)^n + \eta_n\right|,$$

kdež $\lim\limits_{n=\infty} \eta_n = 0$.

Poněvadž pak $q < q'$, jest $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{e^q}{e^{q'}}\right)^n = 0$, tedy i

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{\cos(n \arccos z)}{\cos(n \arccos \zeta)}\right| = 0.$$

Je-li bod z na úsečce $-1 \ldots +1$, jest $\cos(n \arccos z) \leqq 1$, kdežto $|\cos(n \arccos \zeta)| = \frac{1}{2}e^{nq'} + \varepsilon'_n$ roste s n do nekonečna, takže i nyní

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{\cos(n \arccos z)}{\cos(n \arccos \zeta)}\right| = 0.$$

Užijeme-li pak vzorce

$$|R_n(z)| < \frac{s}{2\pi} M,$$

kdež s značí délku dráhy integrační a M horní mez funkce

$$\left|\frac{\cos(n \arccos z)}{\cos(n \arccos \zeta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right|,$$

probíhá-li ζ dráhu S, poznáme snadno, poněvadž na dráze S jest funkce $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ analytická, že skutečně $\lim_{n=\infty} R_n(z) = 0$.

Jiný případ tohoto druhu interpolace nastává, užijeme-li rozdělení intervallu ab, které odporučil Gauss při mechanické kvadratuře. Zvolme opět za intervall $-1 \ldots +1$. Pak budou body dělící $x_1, x_2 \ldots x_n$ kořeny Legendrova polynomu $X_n = 0$, které jsou vesměs reální a v mezích $-1 \ldots +1$ obsaženy.

Jak Bruns *) ukázal, jsou kořeny ty v intervallu $-1 \ldots +1$ rozloženy tak, že

$$\cos\frac{2k\pi}{2n+1} < x_k < \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}.$$

Z toho plyne snadnou úvahou, že do každého z intervallů

$$\cos\frac{\pi}{2(2n+1)} \ldots \cos\frac{5\pi}{2(2n+1)} \ldots \cos\frac{9\pi}{2(2n+1)} \ldots$$

$$\cos\frac{(4n-3)\pi}{2(2n+1)} \ldots \cos\frac{(4n+1)\pi}{2(2n+1)}$$

připadne jeden kořen.

Klademe-li tedy $s_k = \frac{4k+1}{2(2n+1)}\pi$, $t_k = \cos s_k$, budou s_k tvořiti řadu arithmetickou a bude

$$t_0 > x_1 > t_1 > x_2 \ldots > x_n > t_n,$$

takže, položíme-li $t = \chi(s) = \cos s$ převeden případ tento na případ předcházející. **)

---

*) Bruns: Zur Theorie der Kugelfunctionen. Journal f. d. r. u. ang. Math., sv. 90.

**) Ostatně mohli bychom jako při rozdělení Čebyševově i zde vésti důkaz přímo, kdybychom použili asymptotické hodnoty pro polynom Legendrův $P^{(n)}(z)$, udané v pojednání p. Lercha, Elementárné stanovení asymptotické hodnoty Legendreových mnohočlenů, uveřejněném v Rozpravách České Akademie, tř. II., roč. I., čís. 8. $P^{(n)}(z) = \frac{(z+\sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{2\pi n}}\sqrt{\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}}}$ $(1+\varepsilon_n)$, $\lim \varepsilon_n = 0$, za předpokladu $|z+\sqrt{z^2-1}| > 1$. Položili bychom $z = x + iy = \cos(p+iq)$; předpokladem $|z+\sqrt{z^2-1}| > 1$, z něhož plyne, že $q > 0$, jsou vyloučeny body na úsečce $-1 \ldots +1$. Pro tyto jest $q = 0$ a $P^{(n)}(\cos p) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin p}} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)p + \frac{\pi}{4}\right)$. (Heine: Theorie der Kugelfunctionen I. 2. vyd. str. 175.)

IV.

Další případ speciální, kterým se budeme zabývati, nastane, když $t = \chi(s) = s$, $a = \alpha$, $b = \beta$, $\varphi(t) = 1$. Úsečka ab rozdělena jest na rovné díly a v každém z nich leží jeden z bodů x_k. Sem náleží samozřejmě případ, kdy body, v nichž funkce jest dána, jsou ekvidistantní.*) V případě uvažovaném

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{g_n(z)} = w(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \log(z-t)\, dt.$$

Primitivní funkce

$$\int \log x\, dx = x(\log x - 1);$$

uvážíme-li pak, po jaké dráze dlužno integrovati, shledáme, že

$$w(z) = \frac{(z-a)\log(z-a) - (z-b)\log(z-b)}{b-a} - 1,$$

kdež u obou logarithmů dlužno vzíti hodnoty hlavní. Pak bude

$$u = \frac{(x-a)\log r_a - (x-b)\log r_b + y\varphi}{b-a} - 1,$$

při čemž r_a, r_b, φ mají jednoduchý význam, užijeme-li grafického znázornění. r_a značí průvodič od bodu a k bodu z, r_b průvodič od bodu b k bodu z a φ úhel mezi těmito průvodiči, počítaný kladně nad osou úseček, záporně pod ní. Na ose x jest $\varphi = 0$ vně úsečky ab, na úsečce ab přechází φ nespojitě od π k $-\pi$, prochází-li bod z úsečku ab shora dolů. Snadno nalezneme, že

$$w'(z) = \frac{1}{b-a} \log \frac{z-a}{z-b},$$

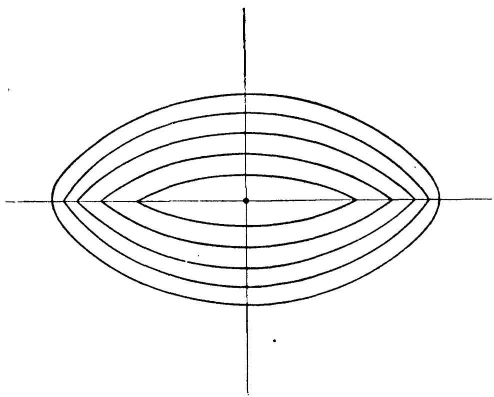
a z toho

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{b-a} \log \frac{r_a}{r_b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\varphi}{b-a}.$$

*) Případem tímto zabývá se Runge v pojednání: Über empirische Functionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten (Zeitschrift f. Math. u. Phys. sv. 46., 1901).

Křivky $u = const$ jsou symmetrické v tomto případě nejen vzhledem k ose x, ale také vzhledem k ose souměrnosti úsečky ab. Křivka $u = log \frac{b-a}{2} - 1$ redukuje se na bod, úsečku ab půlící. Body a, b prochází jediná křivka $u = log\,(b-a) - 1$. Křivky $u = const$ uvnitř křivky $u = log\,(b-a) - 1$ ležící mají podobu dvou kruhových oblouků. Křivka $u = log\,(b-a) - 1$ a všechny křivky $u = const$ ji obklopující mají podobu ellips, které, roste-li konstanta, nabývají stále více podoby kruhové.



Obr. 2.

Snadno se můžeme přesvědčiti o tom, že, provedeme-li lineární transformaci

$$x = \alpha x' + \beta,\ y = \alpha y',$$

kladouce zároveň

$$a = \alpha a' + \beta,\ b = \alpha b' + \beta,$$

dostaneme soustavu křivek $u = const$ původní podobných. Stačí tedy při uvažování křivek $u = const$ voliti za a, b hodnoty speciální, na př. klásti $a = -1$, $b = +1$, při čemž vzhledem k symmetrii možno se omeziti na jeden kvadrant. Píšeme-li pak konstantu ve tvaru $log\ 2p - 1$, bude rovnice $u = const$ míti tvar

$$(1 + x)\ log\ r_a + (1 - x)\ log\ r_b + y\varphi = 2\ log\ 2p.$$

Závislost pak mezi x, y, p možno znázorniti řadou křivek odpovídajících různým hodnotám p.*)

Numericky pak lze ji znázorniti tabulkou. V tomto případě jest výhodné, zavésti logarithmy briggické a psáti pak závislost ve tvaru

$$(1+x)\log r_a + (1-x)\log r_b + y\varphi \log e = 2\log 2p = k$$

a do tabulky, dle x, y postupující, zanášeti přímo k.**)

	$y = 0$	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6
$x = 0$	0·000	0·132	0·225	0·370	0·477	0·576	0·670
0·2	0·017	0·149	0·272	0·386	0·492	0·591	0·683
0·4	0·071	0·203	0·324	0·435	0·538	0·633	
0·6	0·167	0·297	0·414	0·520	0·616	0·704	
0·8	0·320	0·445	0·550	0·641	0·724		
1	0·602	0·670	0·734				

Poněvadž křivky $u = const$ pro $p < 1$ úsečku ab protínají, může se státi, že posloupnost polynomů $G_n(z)$ nekonverguje pro všechny body na úsečce ab. Uvažujme na př. funkci $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ pro interval $a = -12 \, .. \, b = +12$. Funkce ta má póly $+i$ a $-i$, kterýmiž prochází jediná křivka $u = const$.

Poněvadž protíná osu x v bodech $\pm$ 5·9282, bude v intervallu obsaženém mezi těmito body posloupnosti polynomů $G_n(z)$ konvergovati, vně tohoto intervallu divergovati.

Z tohoto příkladu jest patrno, že interpolace taková nemůže vésti k theoremu Weierstrassovu, dle něhož možno funkci spojitou v intervallu $a \ldots b$ znázorniti posloupností polynomů.***)

*) Viz obrazec, kde bodu středovému odpovídá hodnota $p = 0{\cdot}5$, ostatním pak křivkám po řadě hodnoty $p = 0{\cdot}6$, 0·7, 0·8, 0·9 a 1, kteráž přísluší křivce, jdoucí body ab.

**) Tabulka, vyňatá z pojednání Rungova, obsahuje x, y, k pro interpolaci v užším slova smyslu (nikoliv extrapolaci).

***) K témuž výsledku dospěl neodvisle od práce Rungovy Borel a dokázal jej příkladem jiného rázu. (Viz E. Borel: Leçons sur les fonctions de variables réelles, Paříž 1905, Gauthier-Villars.)

Ukážeme nyní, proč divergence polynomů interpolačních není na závadu při numerickém počítání, užíváme-li vzorce, odvozeného z formule Newtonovy.

Nechť jsou body, v nichž funkce je dána, a, $a + h$, $a + 2h \ldots a + (n - 1)h = b_0$, $b_0 > a$.

Zaveďme označení $f(a + kh) = y_k$, $f(a) = y_0$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, $\Delta^2 y_k = \Delta_{k+1} - \Delta y_k, \ldots$

Klademe-li ve vzorci I. (7) $x_1 = a$, $x_2 = a + h, \ldots x_n = a + (n - 1)h$, shledáme na základě rovnice I. (6), že funkce interpolační

$$f_k(x_1, x_2, \ldots x_k) = \frac{\Delta^{k-1} y_0}{(k-1)!\, h^{k-1}}.$$

Jest tedy

$$G_n(z) = y_0 + \frac{z-a}{h} \Delta y_0 + \frac{(z-a)(z-a-h)}{h^2 \,.\, 2!} \Delta^2 y_0 + \ldots$$
$$+ \frac{(z-a)(z-a-h) \ldots (z-a-(n-1)h)}{h^n \,.\, n!} \Delta^n y_0, \tag{1}$$

kterýžto vzorec, klademe-li $\frac{z-a}{h} = m$, tedy $z = a + mh$ a označíme-li symbolem $\binom{m}{k}$ binomiálního součinitele, možno psáti v tvaru

$$G_n(z) = y_0 + \binom{m}{1} \Delta y_0 + \binom{m}{2} \Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{m}{n} \Delta^n y_0. \tag{1'}$$

Předpokládejme, že posloupnost polynomů $G_n(z)$ diverguje, roste-li n do nekonečna.

Ukážeme, že pak existuje za jistých supposic posloupnost polynomů

$$G_n^{(k)}(z) = y_0 + \binom{m}{1} \Delta y_0 + \binom{m}{2} \Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{m}{k} \Delta^k y_0, \tag{2}$$

v níž k závisí na n a která konverguje k $f(z)$, roste-li n do nekonečna. Má tedy řada (1'), vyjadřující $G_n(z)$, charakter řady asymptotické v tom smyslu, že součet jistého počtu členů počátečních vyjadřuje $f(z)$ s přesností, kterou možno libovolně stupňovati, volíme-li n dosti veliké.

Sestrojíme-li polynom $G_n^{(k)}(z)$, provádíme interpolaci v intervallu $a \ldots a + (k - 1) h = b$, kratším než jest intervall původní $a \ldots b$. Zbytek

$$R_n^{(k)}(z) = f(z) - G_n^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{g_k(z)}{g_k(\zeta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

bude s n rostoucím do nekonečna konvergovati k nulle, zvolíme-li za dráhu integrační čáru u *), která přísluší k bodům a, b **), té vlastnosti, že bod z bude ležeti uvnitř, body singulární vně.

Uvažujme případ krajní, a hledejme takový bod b, aby křivka u, která přísluší k bodům a, b, procházela bodem z a bodem singulárním $z' = x' + iy'$, tak aby uvnitř byla funkce $f(z)$ analytická.

Poněvadž pro bod z nastává divergence, vezmeme-li celý intervall $a \ldots b_0$, leží bod z vně křivky $u = u_0 = u(x', y', a, b_0)$, jdoucí bodem z' a náležející bodům a, b_0; jest tudíž

$$u(x', y', a, b_0) < u(x, y, a, b_0).$$

Podmínka, aby bodem z a z' procházela táž křivka k bodům a, b náležející, jest

$$u(x', y', a, b) = u(x, y, a, b).$$

Jedná se tudíž o to, rozhodnouti, existují-li hodnoty b ležící mezi a a b_0 a vyhovující rovnici

$$u(x', y', a, b) - u(x, y, a, b) = 0.$$

Tytéž kořeny má v uvažovaném intervallu rovnice

$$F(b) = (b - a)\big(u(x', y', a, b) - u(x, y, a, b)\big) = 0.$$

Snadno nalezneme, že

$$F(b) = (x' - a) \log r'_a - (x' - b) \log r'_b + y'\varphi$$
$$- (x - a) \log r_a + (x - b) \log r_b - y\varphi,$$

při čemž r'_a, r'_b, φ' má význam obdobný významu veličin r_a, r_b, φ.

---

*) Při tom ovšem k ní, je-li to zapotřebí, připojíme kličky, tak aby dráha integrační úsečku ab obkłopovala.

**) Význam slov těch, jakož i označení $u(x, y, a, b)$, jest patrný.

$F(b)$ jest funkce spojitá pro všechny reálné (a konečné) hodnoty argumentu b. Derivace $F'(b) = log \frac{r'_b}{r_b}$ jest funkce spojitá pro všechny reálné hodnoty argumentu b, vyjímaje případ, kdy $r_b = 0$, což se stane, leží-li bod z na ose úseček pro $b = z = x$. Pak roste $F'(b)$ do nekonečna, nabývajíc s obou stran libovolně velikých hodnot kladných. $F'(b) = 0$ jedině pro $r'_b = r_b$; takový bod existuje jen jeden a obdržíme jej jako průsek osy souměrnosti bodů z, z' s osou úseček.

Z nerovnosti svrchu napsané $u(x', y', a, b_0) < u(x, y, a, b_0)$ plyne přímo, že $F(b_0) < 0$. Pro $b = a$ jest $F(a) = 0$; bude tedy o znamení při $F(a + \varepsilon)$, kdež $\varepsilon > 0$ jest číslo dostatečně malé, rozhodovati $F'(a) = log \frac{r'_a}{r_a}$, tak že $F'(a)$ a tedy i $F(a + \varepsilon) \gtreqless 0$ dle toho, je-li $r'_a \gtreqless r_a$. Je-li $r'_a = r_a$, bude $F'(a) = 0$ a o znamení při $F(a + \varepsilon)$ i $F'(a + \varepsilon)$ rozhodne $F''(a) = \frac{x - x'}{r_a^2}$. Zde může nastati pouze případ $x - x' < 0$, poněvadž bod z vzhledem k rovnici $r'_a = r_a$ leží na kružnici jdoucí bodem z' a mající střed v bodě a, a mimo to musí ležeti vně křivky $u = u_0$.

Předpokládejme nejprve, že bod z leží mimo úsečku a, b_0. Pak $F(b)$ i $F'(b)$ jsou v celém intervallu $a \ldots b_0$ spojité a konečné. $F(b_0) < 0$ a $F(a + \varepsilon) \gtreqless 0$ dle toho, je-li $r'_a \gtreqless r_a$. V případě $r'_a > r_a$ leží tedy mezi a a b_0 lichý počet kořenů rovnice $F(b) = 0$, v případě $r'_a < r_a$ sudý (neb žádný). Poněvadž pak derivace se může v onom intervallu jen jedenkrát annulovati, jest dle věty Rolleovy v prvém případě mezi a a b_0 kořen jeden, v druhém dva neb žádný; poněvadž však v tomto případě $F'(a) < 0$, ubývá funkce $F(b)$ v bodě a, tak že vzhledem k tomu, že $F(a) < 0$, $F(b_0) < 0$, není mezi a a b_0 žádný kořen. Sem spadá také případ $r'_a = r_a$. Pak totiž $F(a + \varepsilon) < 0$, $F'(a + \varepsilon) < 0$.

Obraťme se nyní ku případu, že bod z leží na úsečce ab_0. Funkce $F(b)$ jest pak v celém intervallu $a \ldots b_0$ spojitá, $F'(b)$ se stává v bodě $b = x$ nekonečnou, jinde však jest spojitá. Rozložme tedy intervall $a \ldots b_0$ na intervally $a \ldots x$ a $x \ldots b_0$.

Rozeznávejme případy $r'_a > r_a$ a $r'_a < r_a$. (Případ $r'_a = r_a$ zde nastati nemůže.) Je-li $r'_a > r_a$, a tedy $F(a + \varepsilon) > 0$, pak se zřetelem k tomu, že křivka $u = u_0$ jest stále konkávní vzhledem k ose x, bude $r'_{b_0} < r_{b_0}$, tedy $F'(b_0) < 0$. Leží-li b v intervallu $x \ldots b_0$ dostatečně blízko u x, jest $F'(b) > 0$. Má tedy rovnice $F'(b)$ v intervallu $x \ldots b_0$ jistě kořen. Pro $b < x$ a x dostatečně blízké jest rovněž $F'(b) > 0$ a poněvadž rovnice $F'(b)$ připouští pro reálné hodnoty b jediný kořen, bude pro celý intervall $x \ldots b_0$ $F'(b) > 0$. Bude tedy funkce $F(b)$ v intervallu $a \ldots x$ s rostoucím b stoupati, a poněvadž $F(a + \varepsilon) > 0$, bude $F(x) > 0$. Z týchž důvodů jako dříve bude mezi x a b_0 ležeti jeden a jen jeden kořen rovnice $F(b) = 0$. Je-li $r'_a < r_a$, jest $r'_{b_0} > r_{b_0}$ a tedy $F'(b_0) > 0$. Pro $b > x$ a dostatečně x blízké jest jistě $F'(b) > 0$, jest tedy v celém intervallu $x \ldots b_0$ $F'(b) > 0$, tak že funkce $F(b)$ v tomto intervallu stále stoupá. Poněvadž $F(b_0) < 0$ jest $F(x) < 0$. Ježto pak $F(a + \varepsilon) < 0$, nemá rovnice $F(b) = 0$ kořenů ani v intervallu $a \ldots x$, ani v intervallu $x \ldots b_0$.

I vidíme, že rovnice $F(b) = 0$ má v intervallu $a \ldots b_0$ kořen (a to jediný), je-li $r'_a > r_a$, t. j. leží-li bod z uvnitř kruhu, jenž má střed v bodě a a bodem z' prochází.

Zvolíme-li pak b menší než tento kořen, bude $F(b) > 0$, poněvadž $F(a + \varepsilon) > 0$. To znamená, že bude

$$u(x', y', a, b) > u(x, y, a, b),$$

neboli že bod z bude ležeti uvnitř křivky, jdoucí bodem z' a náležející k bodům a, b. Je-li vedle toho splněna podmínka, že uvnitř té křivky není již singulárních bodů funkce $f(z)$, bude integrál

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{g_k(z)}{g_k(\zeta)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

na onu křivku vztahovaný, konvergovati k nulle. Bude pak posloupnost polynomů $G_n^{(k)}(z)$ konvergovati k $f(z)$ s n rostoucím do nekonečna, volíme-li k tak, aby číslo b leželo mezi $a + (k - 1)\,h$ a $a + kh$, při čemž číslo $b > a$ jest menší než kořen rovnice $F(b) = 0$.

Úvahy tuto provedené možno bezprostředně použíti, jsou-li body singulární funkce $f(z)$ v okolí úsečky ab isolovány. V každém však případě možno místo bodu singulárního zvoliti bod z' tímto způsobem:

Nechť $u = u_0$ jest křivka u k bodům a, b_0 příslušící, uvnitř které jest funkce $f(z)$ analytická. Tato křivka nechť leží uvnitř křivky $u = \log(b_0 - a) - 1$, která k bodům a, b_0 přísluší a jimi prochází. Bod z pak leží vně křivky $u = u_0$, nechť však leží zároveň uvnitř kružnice k o středu a, v jejímž nitru jest funkce $f(z)$ analytická. Protne-li kružnice k křivku $u = u_0$, zvolme jeden z těch průsečíků za bod z' (vzhledem k symmetrii dle osy x nepadá volba ta na váhu), neprotne-li, zvolíme za bod z' průsečík kružnice k s úsečkou ab_0. Ustanovme pak b z rovnice $F(b) = 0$. Pak bude křivka, probíhající bodem z, a která přísluší k bodu a a bodu b, pro který jest $b <$ onen kořen rovnice $F(b) = 0$, procházeti jistě oborem, v němž jest funkce $f(z)$ analytická. Kdyby z něho vyšla, mohlo by se tak státi jedině v bodech, ležících vně křivky $u = u_0$ a kružnice k, která má střed a a bodem z' prochází, z čehož by následovalo, že rovnice $F(b) = 0$ má kořen v intervallu ab_0 i pro body z, ležící vně kružnice k, což jest dle dřívějšího nemožno.

V.

Provedeme ještě výpočet $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{g_n(z)}$ pro případ dělení ekvidistantního pomocí theorie funkce gamma.

Budeme nyní klásti

$$g_n(z) = (z - x_0)(z - x_1) \ldots\ldots (z - x_n)$$

a předpokládati pro jednoduchost, že

$$x_0 = -1, \quad x_n = +1, \quad \text{tedy obecně } x_k = -1 + \frac{2k}{n}.$$

Pak bude možno psáti $g_n(z)$ ve tvaru

$$g_n(z) = \left(-\frac{2}{n}\right)^n (z-1) \prod_{k=}^{n-1} \left(k - \frac{n}{2}(z+1)\right).$$

Uvážíme-li, že

$$\Gamma(z + k) = (z + k - 1)(z + k - 2) \ldots z\,\Gamma(z),$$

bude
$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(k - \frac{n}{2}(z+1)\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}(1-z)\right)}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}(1+z)\right)},$$

kterážto rovnice má význam pro všechna z, nesplývající se žádným z čísel $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$.

Bude tudíž

$$g_n(z) = \left(-\frac{2}{n}\right)^n (z-1)\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}(1-z)\right)}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}(1+z)\right)}.$$

Uvažujme $log\, g_n(z)$, omezujíce se při tom na hlavní hodnotu logarithmu. K tomu potřebujeme znáti výraz pro logarithmus funkce gamma.

1. Je-li reálná část z kladná, jest

$$log\, \Gamma(z) = log\sqrt{2\pi} + \left(z - \frac{1}{2}\right) log\, z - z + \omega(z),$$

kdež $\omega(z)$ jest tak zvaná funkce Binetova, která pro $|z|$ rostoucí do nekonečna konverguje k nulle a dá se vyjádřiti asymptotickou řadou Stirlingovou.

2. Je-li reálná část z záporná, pak

$$log\, \Gamma(z) = log\sqrt{2\pi} + \left(z - \frac{1}{2}\right) log\, z - z$$
$$+ \omega(z) - log\,(1 - e^{\pm 2\pi i z}),$$

kdež při posledním členu dlužno zvoliti znamení + neb — dle toho, nalézá-li se bod z nad neb pod osou čísel reálných. (Při logarithmech předpokládány opět hlavní hodnoty.) *)

Abychom obě funkce

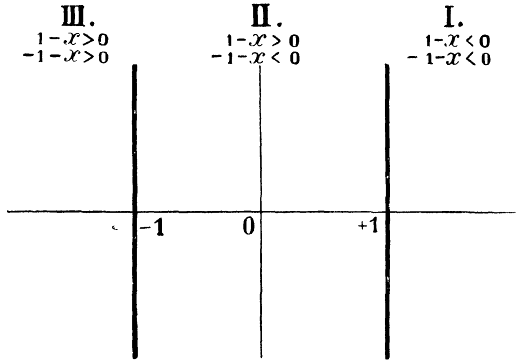
$$log\, \Gamma\left(\frac{n}{2}(1-z)\right) \text{ a } log\, \Gamma\left(-\frac{n}{2}(1+z)\right)$$

mohli takto vyjádřiti, veďme si v rovině čísel komplexních body — 1 a + 1 přímky s osou čísel ryze imaginárních rovnoběžné. Tím se rozpadne rovina ve tři obory, které označíme I., II., III.

V oboru I. bude $1 - x < 0, \quad -1 - x < 0,$
„ „ II. „ $1 - x > 0, \quad -1 - x < 0,$
„ „ III. „ $1 - x > 0, \quad -1 - x > 0.$

*) Viz E. Lindelöf: Le calcul des résidus. Chap. IV, Paříž 1905. Gauthier-Villars.

V oboru III. nastává pro obě funkce případ 1., v oboru I. pro obě případ 2., avšak v obou případech obdržíme týž výraz pro $\log g_n(z)$, poněvadž v oboru I. členy vzniklé z $\log\left(1 - e^{\pm 2\pi i z}\right)$ se zruší.



Obr. 3.

Snadným výpočtem nalezneme, že

$$\log g_n(z) = nw(z) + \log(z^2 - 1) + \omega\left(\frac{n}{2}(1 - z)\right) + \omega\left(\frac{n}{2}(1 + z)\right),$$

poněvadž, vzhledem k tomu, že $\omega(z)$ jest funkce lichá,

$$\omega\left(-\frac{n}{2}(1 + z)\right) = -\omega\left(\frac{n}{2}(1 + z)\right).$$

$w(z)$ jest větví funkce analytické, kterou obdržíme, zvolíme-li ve výraze

$$\frac{(z + 1)\log(z + 1) - (z - 1)\log(z - 1)}{2} - 1$$

při logarithmech hodnoty hlavní. Členy

$$\omega\left(\frac{n}{2}(1 - z)\right) \text{ a } \omega\left(\frac{n}{2}(1 + z)\right)$$

konvergují s n rostoucím do nekonečna k nulle.

V oboru II. nastane pro $\log \Gamma\left(\frac{n}{2}(1 - z)\right)$ případ 1., pro $\log \Gamma\left(\frac{n}{2}(1 + z)\right)$ případ 2., bude tudíž $\log g_n(z)$ roven stejnému výrazu jako dříve, k němuž však dlužno připojiti pro body nad osou čísel reálných člen $log\,(1 - (-1)^n e^{+\pi inz})$ a pro body pod osou čísel reálných člen $log\,(1 - (-1)^n e^{-\pi inz})$. Tyto členy mají však za limitu nullu, roste-li n do nekonečna.

Bude tudíž

$$log\, g_n(z) = nw(z) + log\,(z^2 - 1) + \omega\left(\frac{n}{2}(1-z)\right)$$
$$+ \omega\left(\frac{n}{2}(1+z)\right) + log\,\mu,$$

kdež $\mu = 1$ v oboru I. a III.

a $\quad \mu = 1 - (-1)^n e^{\pm \pi inz}$ v oboru II.

Definujeme-li pak $\sqrt[n]{g_n(z)}$ jako jsme to v oddílu II. učinili, bude

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{g_n(z)} = w(z) = \frac{(z+1)\,log\,(z+1) - (z-1)\,log\,(z-1)}{2} - 1.$$

Zcela elementární důkaz Pelzova rozšíření Daudelinovy věty.

Napsal **Frant. Kadeřávek**, kand. professury.

Buďtež T_1, T_2 tečny kuželosečky o ohniscích f, f' (obr. 1.). Spojme tato ohniska s průsečíkem v tečen T_1, T_2 přímkami T'_1, T'_2, pak, jak známo, platí věta, že úhel sevřený přímkami T_1, T'_1 rovná se neb jest výplňkem úhlu přímek T_2, T'_2. Spusťme na ramena těchto úhlů s libovolně zvoleného bodu F kolmice a označme jejich paty písmenami p_1, p_2, π_1, π_2, tu, poněvadž úhly pravé při těchto bodech stojí nad touž úsečkou vF, leží body v, F, p_1, p_2, π_1 a π_2 na kružnici nad úsečkou vF co průměrem popsané. Obvodové úhly $\pi_1 F p_1$, $\pi_2 F p_2$ této kružnice, jichž ramena stojí kolmo k příslušným ramenům úhlů sevřených přímkami $T_1 T'_1$ a $T_2 T'_2$, jsou buď stejné neb se vyplňují, a proto stojí tyto úhly nad stejnými oblouky. Jest tedy $\widehat{p_1\pi_1} = \widehat{p_2\pi_2}$. Sestrojme si bod o tak, aby byl od bodů π_1, π_2 stejně vzdálen, pak vzhledem k rovnostem $\widehat{p_1\pi_1} = \widehat{p_2\pi_2}$ a $\widehat{\pi_1 o} = \widehat{\pi_2 o}$ a souměrnému položení těchto částí ke kružnici K plyne i rovnost $p_1 o = p_2 o$, jíž později použijeme.