Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

# O výpočtu elliptických integrálů 1. a 2. druhu pomocí středu arithmeticko-geometrického

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 43 (1914), No. 3-4, 332--350

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109235

# O výpočtu elliptických integrálů 1. a 2. druhu pomocí středu arithmeticko-geometrického.

Napsal K. Petr.

Algorithmus početní středu arithmeticko-geometrického byl zaveden do mathematiky hlavně *Gaussem,* který jej také použil ku numerickému vyčíslování elliptických integrálů prvého a druhého druhu. (Viz zejména jeho pojednání „Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exercet planeta si eius massa per totam orbitam ratione temporis quo singulae partes describuntur uniformiter esset dispertita“, z r. 1818, viz Werke, sv. 3., str. 353.) Gauss uvedl zmíněný algorithmus v souvislost s výpočtem elliptických integrálů na základě zvláštní transformace elliptických integrálů (po něm Gaussova transformace zvané). Že též prostřednictvím transformace *Landenovy* lze integrály elliptické 1. druhu vypočítati pomocí arithmeticko-geometrického středu, jest známo; že pomocí téže Landenovy transformace lze při integrálech 2. druhu docíliti výsledky jednodušší (užívající středu arithmeticko-geometrického), než jsou Gaussovy, zdá se býti méně známo. Vůbec pak nenacházím v mathematické literatuře poukaz, že při užití transformace Landenovy, postupujíce oběma možnými různými směry, uvádíme elliptické integrály prvního druhu v závislost na arithmeticko-geometrický střed dvojím různým způsobem. A právě tato dvojí možnost nám dovoluje jednak pro výpočet elliptických integrálů ve středu arithmeticko-geometrickém dáti úplně postačující a jednoduchou pomůcku, jednak výsledky jí docílené nám dovolují na základě arithmeticko-geometrického středu vypočítati pomocí jednoduché formule číslo $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ důležité při inversi elliptických integrálů (a tím zase při výpočtu elliptických integrálů všech tří druhů). *)

*) Zmíněná formule pro výpočet $q$ známa byla již Gaussovi. Uvedena jest zároveň s jinými formulemi týkajícími se středu arithm.-geom. v »Gesammelte Werke, Bd. 3., str 388, řádek 2. V jaké souvislosti k té formuli Gauss dospěl, není z toho, co na citovaném místě jest podáno, pisateli těchto řádků jasno — pravděpodobně na základě theorie arithm.-geom.

Zároveň jsem podal na základě výrazů obdržených odvození Legendrovy relace mezi $E$, $E'$, $K$, $K'$ a předeslal jsem k vůli čtenářům Časopisu stručný výklad o arithmeticko-geometrickém středu a transformaci Landenově, pokud pro porozumění dalším vývodům to bylo užitečno.

## I.

Vezmeme v úvahu dvě řady čísel kladných $b_r$, $c_r$; $r = 0$, 1, 2, 3, ... souvisících navzájem relacemi

$$b_r = \tfrac{1}{2}(b_{r-1} + c_{r-1}), \qquad c_r = \sqrt{b_{r-1}c_{r-1}}; \qquad (1)$$
$$r = 1, 2, 3, \ldots$$

Pak jest $b_r > c_r$ pro $r \geqq 1$ a budeme i o $b_0$, $c_0$ předpokládati, že $b_0 > c_0$. Jest patrno, že, dána-li jsou čísla $b_0$, $c_0$, těmito dvěma jsou všechna ostatní $b_r$, $c_r$ na základě rovnic (1) úplně stanovena. Dále jest patrno, že řada čísel

$$b_0, b_1, b_2, \ldots \qquad (2)$$

jest řadou čísel klesajících, řada pak

$$c_0, c_1, c_2, \ldots \qquad (3)$$

řadou čísel stoupajících a mají tudíž obě dvě řady limitu. Nad to jest

$$b_r - c_r = \tfrac{1}{2}(\sqrt{b_{r-1}} - \sqrt{c_{r-1}})^2 = \tfrac{1}{2}\frac{(b_{r-1} - c_{r-1})^2}{(\sqrt{b_{r-1}} + \sqrt{c_{r-1}})^2} = \qquad (4)$$
$$= \tfrac{1}{2}(b_{r-1} - c_{r-1})\frac{b_{r-1} - c_{r-1}}{b_{r-1} + c_{r-1} + 2\sqrt{b_{r-1}c_{r-1}}};$$

tedy

$$b_r - c_r < \tfrac{1}{2}(b_{r-1} - c_{r-1}). \qquad (5)$$

středu daleko Gaussem propracované ve spojení s theorií elliptických funkcí. Pozoruhodno však jest, že zůstal onen výraz pro $q$ — pokud jest mi ovšem známo — nepovšimnut. Zvláště nezmiňuje se o něm ani Encyklop. der math. Wissensch., ačkoliv formule ta dává jednoduchý a pro numerický výpočet jistě nejpohodlnější prostředek k inversi elliptických integrálů ve II B 3, § 66. tam projednávané a ačkoliv se tamtéž v § 34. o arithm.-geom. středu a jeho některých vztazích ku ellipt. funkcím vykládá.

V novější době byly Gaussovy záznamy o arithm.-geom. středu a to i ty, jež dříve nebyly uveřejněny, předmětem vyšetřování *L. Schlesingra* v Göttingen Nachr. z roku 1912, str. 513 a násl.

Jelikož pak rozdíl stejnolehlých členů obou řad (2) a (3) dle (5) konverguje k nulle, mají obě ty řady touž limitu, jež sluje se zřetelem ku tvaru základních rovnic (1) střed *arithmo-geometrický* z čísel $b_0, c_0$. Označíme jej $M(b_0, c_0)$, t. j. klademe

$$\lim_{r=\infty} b_r = \lim_{r=\infty} c_r = M(b_0, c_0). \tag{6}$$

Abychom blíže seznali rychlost, s jakou čísla $b_r, c_r$ konvergují ke společné limitě, vezměme v úvahu ještě rovnici (4), kterou na základě (1) napíšeme ve tvaru

$$b_r - c_r = \frac{(b_{r-1} - c_{r-1})^2}{8b_{r+1}}$$

aneb

$$\frac{b_r - c_r}{c_{r+1}} = \frac{(b_{r-1} - c_{r-1})^2}{8c_{r+2}^2} < \frac{(b_{r-1} - c_{r-1})^2}{8c_{r+1}^2}.$$

Je-li tedy $r$ již takové, aby $c_{r+1}$ bylo blízké ku $M(b_0, c_0)$, jest odtud patrno, že relativní velikost rozdílu $b_r - c_r$ (vzhledem ku číslu $M(b_0, c_0)$ jest přibližně rovna osmině ze čtverce relativní velikosti rozdílu předcházejícího $b_{r-1} - c_{r-1}$. Jest tudíž rychlost konvergence neobyčejně veliká.

Pro následující jest účelno zavésti zároveň čísla $a_r$ rovnicí

$$a_r^2 + c_r^2 = b_r^2; \qquad a_r \gtreqq 0 \tag{7}$$

pro tato platí na základě (1) další vztahy

$$a_r + b_r = b_{r-1}, \quad 4a_r b_r = a_{r-1}^2, \quad b_r - a_r = c_{r-1}, \tag{8}$$

ze kterýchž zejména jednak plyne

$$\lim_{r=\infty} a_r = \lim_{r=\infty} (b_{r-1} - b_r) = 0,$$

jednak (na základě druhého vztahu) lze o rychlosti, s jakou $a_r$ konverguje k nulle, učiniti obdobnou poznámku jako svrchu o konvergenci čísel $b_r, c_r$ ku $M(b_0, c_0)$.

## II.

Landenovu transformaci budu užívati na integrály tvaru

$$\int_0^{\Phi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad \int_0^{\Phi_0} \frac{a_0^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}}. \tag{9}$$

Zavedeme-li místo proměnné $\varphi$ proměnnou $\varphi_1$ rovnicí

$$tg\,\varphi_1 = \frac{b_1 \sin 2\varphi}{a_1 + b_1 \cos 2\varphi}, \tag{10}$$

kde $a_1$, $b_1$ souvisí s $a_0$, $b_0$ vztahem (1) a kteroužto rovnici můžeme též psáti ve tvaru

$$tg\,(\varphi_1 - \varphi) = \frac{c_0}{b_0}\, tg\,\varphi\,^*),$$

dostaneme snadným počtem

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{2}\,\frac{d\varphi_1}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2 \sin^2\varphi}} \tag{11}$$

a tedy

$$\int_0^{\Phi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{2}\int_0^{\Phi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2 \sin^2\varphi}}, \tag{12}$$

při čemž $\Phi_1$ závisí rovnicí

$$tg\,(\Phi_1 - \Phi_0) = \frac{c_0}{b_0}\, tg\,\Phi_1 \tag{12'}$$

na $\Phi_0$ a stanoví se jednoznačně známým způsobem. Opakujeme-li tuto transformaci po sobě $r$-kráte, obdržíme po $r$-tém kroku

$$\int_0^{\Phi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{2^r}\int_0^{\Phi_r} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_r^2 - a_r^2 \sin^2\varphi}}, \tag{12''}$$

při čemž

$$tg\,(\Phi_k - \Phi_{k-1}) = \frac{c_{k-1}}{b_{k-1}}\, tg\,\Phi_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots r$$

a čísla $a_r$, $b_r$, $c_r$ souvisí spolu rovnicemi odstavce předcházejícího. Jelikož však $\lim\limits_{r=\infty} a_r = 0$, $\lim\limits_{r=\infty} b_r = M(b_0, c_0)$, vidíme — máme-li zejména na zřeteli rychlost, s jakou čísla tato ku vyznačeným limitám konvergují —, že rovnici poslední můžeme psáti ve tvaru

$$\int_0^{\Phi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2\varphi}} = \frac{\Phi_r}{2^r M(b_0, c_0)} + \frac{\varepsilon_r}{2^r},$$

---

*) Užitím rovnic (8) a (10) a konečně formule

$$tg\,(\varphi_1 - \varphi) = \frac{tg\,\varphi_1 - tg\,\varphi}{1 + tg\,\varphi_1\, tg\,\varphi}.$$

kde $\lim\limits_{r=\infty} \varepsilon_r = 0$ a tedy v limitě, klademe-li $\lim \frac{\Phi_r}{2^r} = \overline{\Phi}$,

$$\int\limits_0^{\Phi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\overline{\Phi}}{M(b_0, c_0)}. \tag{13}$$

Pro integrály kompletní, při nichž $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$, jest $\Phi_1 = \pi$, $\Phi_2 = 2\pi, \ldots, \Phi_r = 2^{r-1}\pi$ a tedy $\overline{\Phi} = \frac{\pi}{2}$, jest

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2M(b_0, c_0)}. \tag{14}$$

Tím odvozeny v (13) a (14) známé a pro numerické výpočty často používané výrazy integrálů elliptických prvního druhu.

## III.

Abych provedl transformaci druhého integrálu z (9), stačí vypočísti $\sin^2 \varphi$ z rovnice (10); dostanu

$$\sin^2 \varphi = \frac{b_1 + a_1 \sin^2 \varphi_1 - \cos \varphi_1 \sqrt{b_1^2 - a_1^2 \sin^2 \varphi_1}}{2b_1};$$

dosadíme-li tento výraz, máme používajíce (11) jakož i vztahu $a_0^2 = 4a_1 b_1$ ihned

$$\int\limits_0^{\Phi_0} \frac{a_0^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}} = \int\limits_0^{\Phi_1} \frac{a_1 (b_1 + a_1 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi - a_1 \int\limits_0^{\Phi_1} \cos \varphi \, d\varphi,$$

kde mezi $\Phi_0$ a $\Phi_1$ jest opět vztah (12').

Vztah nalezený lze psáti též ve tvaru

$$\int\limits_0^{\Phi_0} \frac{a_0^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}} = a_1 b_1 \int\limits_0^{\Phi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2 \sin^2 \varphi}} + \int\limits_0^{\Phi_1} \frac{a_1^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2 \sin^2 \varphi}} - a_1 \sin \Phi_1. \tag{15}$$

Obecněji jest v označení odst. I.

$$\int_0^{\Phi_{r-1}} \frac{a_{r-1}^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_{r-1}^2 - a_{r-1}^2 \sin^2 \varphi}} = a_r b_r \int_0^{\Phi_r} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_r^2 - a_r^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$+ \int_0^{\Phi_r} \frac{a_r^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_r^2 - a_r^2 \sin^2 \varphi}} - a_r \sin \Phi_r$$

$$r = 1, 2, 3, \ldots$$

anebo se zřetelem ku (12″)

$$\int_0^{\Phi_{r-1}} \frac{a_{r-1}^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_{r-1}^2 - a_{r-1}^2 \sin^2 \varphi}} = 2^r a_r b_r \int_0^{\Phi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$+ \int_0^{\Phi_r} \frac{a_r^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_r^2 - a_r^2 \sin^2 \varphi}} - a_r \sin \Phi_r.$$

Sčítáme-li tudíž rovnice právě odvozené pro $r = 1, 2, 3, \ldots \lambda$, dostaneme

$$\int_0^{\Phi_0} \frac{a_0^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}} = \tag{16}$$

$$= \int_0^{\Phi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}} \, [2a_1 b_1 + 2^2 a_2 b_2 + \ldots + 2^\lambda a_\lambda b_\lambda]$$

$$- [a_1 \sin \Phi_1 + a_2 \sin \Phi_2 + \ldots + a_\lambda \sin \Phi_\lambda] + r_\lambda,$$

kde zbytek $r_\lambda$

$$r_\lambda = \int_0^{\Phi_\lambda} \frac{a_\lambda^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_\lambda^2 - a_\lambda^2 \sin^2 \varphi}}$$

s rostoucím $\lambda$ velmi rychle konverguje k nulle a kde tudíž řady v závorkách hranatých uvedené mohou rozšířeny býti v řady nekonečné. Uvážíme-li ještě, že $a_k = b_{k-1} - b_k$, a zavedeme-li pro krátkost označení

$$P(b_0, c_0) = 2b_1(b_0 - b_1) + 2^2 b_2 (b_1 - b_2) \tag{17}$$
$$+ 2^3 b_3 (b_2 - b_3) + \ldots,$$

máme

$$\int_0^{\Phi_0} \frac{a_0^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}} = P(b_0, c_0) \int_0^{\Phi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi}} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \Phi_k; \tag{18}$$

pro integrál pak druhého druhu v normálním tvaru a označení Legendreově *)

$$b_0 E\left(\frac{a_0}{b_0}, \Phi_0\right) = [b_0^2 - P(b_0, c_0)] \frac{1}{b_0} F\left(\frac{a_0}{b_0}, \Phi_0\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \Phi_k. \tag{19}$$

Zvláště pak pro úplný integrál $\left(\Phi_0 = \frac{\pi}{2}, \ \Phi_1 = \pi, \ \Phi_2 = 2\pi, \ldots\right)$ máme

$$b_0 E\left(\frac{a_0}{b_0}, \frac{\pi}{2}\right) = [b_0^2 - P(b_0, c_0)] \frac{1}{b_0} F\left(\frac{a_0}{b_0}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi (b_0^2 - P(b_0, c_0))}{2M(b_0, c_0)}. \tag{20}$$

Výrazu $b_0^2 - P(b_0, c_0)$ můžeme na základě rovnic (1), ze kterých plyne $b_k(b_{k-1} - b_k) = \frac{1}{16}(b_{k-2} - c_{k-2})^2$, $k \geq 2$, dáti tvar

$$b_0^2 - P(b_0, c_0) = \tfrac{1}{4}[(b_0 + c_0)^2 - 2(b_1 - c_1)^2 - 2^2(b_2 - c_2)^2 \ldots]$$

pro praktické počítání zvláště vhodný.

*Gauss* ku vyjádření ellipt. integrálu pomocí arithmeticko-geometrického středu užívá l. c. (v „Determinatio attractionis") substituce tvaru

$$(m - n) \sin T \sin T'^2 = 2m \sin T' - (m + n) \sin T$$

---

*) *Legendre* užívá pro integrály elliptické 1. a 2. druhu tyto základní tvary a označení

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = F(k, \Phi), \quad \int_0^{\Phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = E(k, \Phi).$$

Integrály (9) jsou tedy dle tohoto označení

$$\frac{1}{b_0} F\left(\frac{a_0}{b_0}, \Phi_0\right), \ b_0 F\left(\frac{a_0}{b_0}, \Phi_0\right) - b_0 E\left(\frac{a_0}{b_0}, \Phi_0\right).$$

kde $T$ jest původní, $T'$ nová integrační proměnná. Pro integrály prvého druhu a pro integrály úplné druhého druhu dostává výsledky podstatně stejné; pro integrály druhého druhu neúplné dostává výraz poněkud složitější, neboť místo řady $\Sigma a_k \sin \Phi_k$ má řadu

$$a_1 \cos T \sin T' + a_2 \cos T' \sin T'' + a_3 \cos T'' \sin T''' + \ldots *)$$

IV.

Výsledky v předcházejících odstavcích odvozené dávají sice řady vždy konvergentní, hodí se však hlavně v tom případě, kdy modul $\frac{a_0^2}{b_0^2}$ elliptických integrálů není blízký 1. Avšak i pro tento případ lze odvoditi prakticky účelné formule *a užiti algorithmu středu arithmo-geometrického* a to, budeme-li transformovati dané integrály substitucí inversní k té, jíž jsme svrchu použili. Budeme tedy transformovati integrál (zvolíme si nyní, abychom se vyhnuli zmatkům, poněkud jiné označení)

$$\int_0^{\psi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2 \varphi}}$$

substitucí

$$tg\, \varphi = \frac{b'_0 \sin 2\varphi_1}{a'_0 + b'_0 \cos 2\varphi_1};$$

anebo v poněkud jiné úpravě (po odstranění zlomků)

$$\sin (2\varphi_1 - \varphi) = \frac{a'_0}{b'_0} \sin \varphi.$$

Dostaneme pak na základě (12) vztah

$$\int_0^{\psi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2 \varphi}} = 2 \int_0^{\psi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{21}$$

*) Mezi formulemi však získanými od Gausse na základě středu arithm.-geom. jest však na str. 392. (Werke, Bd. 3., str. 302) uvedena pro neúplný elliptický integrál druhého druhu rovnice, která ve formě a také asi v podstatě jest blízka rovnici (19). Formule (19) odvozená pomocí Landenovy transformace nachází se v *Cayley*, Elliptic fonctions, str. 331.

kdež dle (8) jest

$$\overline{b}_1 = a'_0 + b'_0, \qquad \overline{a}_1^2 = 4a'_0 b'_0 \tag{22}$$

a

$$\sin(2\Psi_1 - \Psi_0) = \frac{a'_0}{b'_0} \sin \Psi_0.$$

Abychom dosáhli souvislosti s arithmeticko-geometrickým středem, stačí klásti

$$\overline{b}_1 = 2b'_1, \qquad \overline{a}_1 = 2a'_1.$$

Touto substitucí se (21) a (22) změní v rovnice

$$\int_0^{\Psi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\Psi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{b'^2_1 - a'^2_1 \sin^2 \varphi}}, \tag{23}$$

$$b'_1 = \tfrac{1}{2}(a'_0 + b'_0), \qquad a'_1 = \sqrt{a'_0 b'_0} \tag{24}$$

a dostáváme obecně

$$\int_0^{\Psi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\Psi_r} \frac{d\varphi}{\sqrt{b'^2_r - a'^2_r \sin^2 \varphi}}, \tag{25}$$

kde

$$\sin(2\Psi_r - \Psi_{r-1}) = \frac{a'_{r-1}}{b'_{r-1}} \sin \Psi_{r-1}; \tag{25'}$$

$$b'_r = \tfrac{1}{2}(a'_{r-1} + b'_{r-1}), \qquad a'_r = \sqrt{a'_{r-1}\, b'_{r-1}}.$$

Čísla $b'_r$, $a'_r$ konvergují ku arithmeticko-geometrickému středu $M(b'_0, a'_0)$; přejdeme-li tudíž v (25) ku limitě pro $\lim r = \infty$, máme značíce $\lim \Psi_r = \overline{\Psi}$,

$$\int_0^{\Psi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{M(b'_0, a'_0)} \int_0^{\overline{\Psi}} \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

$$= \frac{\log \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\overline{\Psi}}{2}\right)}{M(b'_0, a'_0)}$$

a v označení Legendreově

$$\frac{1}{b'_0} F\left(\frac{a'_0}{b'_0}, \Psi_0\right) = \frac{\log \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\overline{\Psi}}{2}\right)}{M(b'_0, a'_0)}. \tag{26}$$

V.

Při výpočtu integrálů úplných můžeme se však vyhnouti používání funkcí goniometrických, volíme-li $\Psi_0 = 2^{r-1} . \pi$; roste-li $\Psi_0$ od 0 spojitě do $2^{r-1}\pi$, kolísá pravá strana rovnice (25′) při $r = 1$ mezi $\frac{a_0}{b_0}$ a $-\frac{a_0}{b_0}$ a končí hodnotou nullovou. Přísluší-li tudíž výrazu $2\Psi_1 - \Psi_0$, jenž se spojitě s $\Psi_0$ mění, počáteční hodnota nullová, jest i konečná hodnota jeho rovna nulle; t. j. při $\Psi_0 = 2^{r-1}\pi$ jest $\Psi_1 = 2^{r-2}\pi$. Obdobně jest $\Psi_2 = 2^{r-3}\pi, \ldots, \Psi_r = \frac{\pi}{2}$. (Hodnoty $\Psi_{r+1}, \Psi_{r+2}, \ldots$ jestliže $r$ jest již dosti veliké, aby $\frac{a_r}{b_r}$ bylo málo od 1 rozdílné, liší se pak málo od $\frac{\pi}{2}$.)

Můžeme tudíž psáti

$$\frac{1}{b'_0} F\left(\frac{a'_0}{b'_0}, 2^{r-1}\pi\right) = \frac{1}{b'_r} F\left(\frac{a'_r}{b'_r}, \frac{\pi}{2}\right)$$

aneb též

$$\frac{1}{b'_0} F\left(\frac{a'_0}{b'_0}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^r b'_r} F\left(\frac{a'_r}{b'_r}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Jest však, jak známo,*)

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = log\frac{4}{k'} + \eta, \qquad k'^2 = 1 - k^2,$$

kde $\eta$ konverguje k nulle, když $k$ konverguje k jedné a tedy $k'$ k nulle.

---

*) Vztah tento můžeme odvoditi následovně. Transformujeme-li integrál $F(k, \Delta)$ substitucí

$$tg\,\varphi \,.\, tg\,\varphi' = \frac{1}{k}, \qquad k'^2 = 1 - k^2, \qquad (\alpha)$$

dostaneme snadno

$$F(k, \Delta) = \int_0^{\Delta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \int_{\Delta'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - F(k, \Delta');$$

Tedy

$$F\left(\frac{a'_0}{b'_0}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{b'_0}{2^r b'_r}\left(\log\frac{4b'_r}{c'_r} + \eta_r\right), \tag{27}$$

kde $c'^2_r = b'^2_r - a'^2_r$ a kde $\lim\limits_{r=\infty} \eta_r = 0.$

Máme však (dle (24))

$$\log c'_r = \tfrac{1}{2}\log(b'^2_r - a'^2_r) = \tfrac{1}{2}\log\tfrac{1}{4}(b'_{r-1} - a'_{r-1})^2$$
$$= \log(b'^2_{r-1} - a'^2_{r-1}) - \log 4b'_r$$

---

tedy

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = F(k, \varDelta) + F(k, \varDelta').$$

Při tom jsou $\varDelta$ a $\varDelta'$ spjaty rovnicí ($\alpha$). Zvolíme si $\varDelta$ v prvním kvadrantu a tak, aby $\varDelta = \varDelta'$; pak jest $tg^2\,\varDelta = \frac{1}{k'}$ a

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 2F(k, \varDelta) = 2\int\limits_0^{\varDelta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = 2\int\limits_0^{\varDelta} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + k'^2 \sin^2\varphi}}.$$

Rozvineme-li $(\cos^2\varphi + k'^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = \cos^{-1}\varphi\,(1 + k'^2\, tg^2\,\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ dle binomické věty, obdržíme řadu stejnoměrně konvergentní v intervalu integračním; integrací pak dostaneme řadu, která konverguje aspoň s takovou rychlostí jako řada geometrická s kvocientem $k'$, jak téměř na prvý pohled jest zjevno a jak čtenář snadno zevrubně dokáže. Členové té řady od druhého počínaje konvergují tedy vesměs k nulle pro $\lim k' = 0$. Můžeme tudíž psáti

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 2\int\limits_0^{\varDelta} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \eta'; \quad \lim_{k'=0} \eta' = 0.$$

Avšak

$$2\int\limits_0^{\varDelta} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = 2\log\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varDelta}{2}\right) = \log\frac{4}{k'} + \eta''; \quad \lim_{k'=0} \eta'' = 0.$$

Tak jest v celku

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \log\frac{4}{k'} + \eta' + \eta'' = \log\frac{4}{k'} + \eta,$$

což jest rovnice v textu uvedená.

Jiné odvození této rovnice viz Jacobi, Werke, sv. I., str. 522 a násl. a Cayley, Elliptic fonctions, r. 1876, str. 46.

t. j.

$$\log c'_r = 2 \log c'_{r-1} - \log 4b'_r,$$
$$\log c'_{r-1} = 2 \log c'_{r-2} - \log 4b'_{r-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\log c'_1 = 2 \log c'_0 - \log 4b'_1.$$

Z těchto rovnic vyplývá

$$\log c'_r = -\log 4b'_r - 2 \log 4b'_{r-1} - \ldots - 2^{r-1} \log 4b'_1 + 2^r \log c'_0.$$

Po dosazení pak do (27) a snadné úpravě obdržíme

$$\frac{1}{b'_0} F\left(\frac{a'_0}{b'_0}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{b'_r}\left[\log 4 - \frac{1}{2} \log (b'^2_0 - a'^2_0) + \frac{1}{2} \log b'_1 + \frac{1}{2^2} \log b'_2 + \ldots + \frac{1}{2^r} \log b'_r + \frac{1}{2^r} \log b'_r + \eta_r\right]$$

aneb též, upravíme-li závorku tak, abychom mohli přejíti k limitě pro $\lim r = \infty$,

$$F\left(\frac{a'_0}{b'_0}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{b'_0}{M(b'_0, a'_0)}\left[\log \frac{4}{k'} - \log \frac{b'_0}{b'_1} - \frac{1}{2} \log \frac{b'_1}{b'_2} - \frac{1}{2^2} \log \frac{b'_2}{b'_3} - \ldots\right], \quad (28)$$

$$k' = \sqrt{1 - \frac{a'^2_0}{b'^2_0}},$$

čímž dána formule vhodná pro výpočet úplného integrálu pro ten případ, že $k$ jest blízko 1 a při níž jest použito toliko čísel vyskytujících se při výpočtu středu arithmo-geometrického z $a'_0$, $b'_0$.

## VI.

Abychom odvodili obdobnou formuli pro integrály elliptické druhého druhu, stačí (jako jsme to učinili při integrálech prvního druhu) dosaditi do formule (15)

$$a_1 = a'_0, \ b_1 = b'_0, \ a_0 = 2a'_1, \ b_0 = 2b'_1, \ \Phi_1 = \Psi_0, \ \Phi_0 = \Psi_1.$$

Dostaneme ihned

$$\int_0^{\Psi_0} \frac{a'^2_0 \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2 \varphi}} = - a'_0 b'_0 \int_0^{\Psi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2 \varphi}}$$

$$+ a'_0 \sin \Psi_0 + 2 \int_0^{\Psi_1} \frac{a'^2_1 \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b'^2_1 - a'^2_1 \sin^2 \varphi}}$$

a obecně

$$\int_0^{\Psi_{r-1}} \frac{a'^2_{r-1} \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b'^2_{r-1} - a'^2_{r-1} \sin^2 \varphi}} = - a'_{r-1} b'_{r-1} \int_0^{\Psi_{r-1}} \frac{d\varphi}{\sqrt{b'^2_{r-1} - a'^2_{r-1} \sin^2 \varphi}}$$

$$+ a'_{r-1} \sin \Psi_{r-1} + 2 \int_0^{\Psi_r} \frac{a'^2_r \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b'^2_r - a'^2_r \sin^2 \varphi}}$$

anebo též vzhledem ku (25)

$$\int_0^{\Psi_{r-1}} \frac{a'^2_{r-1} \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b'^2_{r-1} - a'^2_{r-1} \sin^2 \varphi}} = - a'_{r-1} b'_{r-1} \int_0^{\Psi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2 \varphi}}$$

$$+ a'_{r-1} \sin \Psi_{r-1} + 2 \int_0^{\Psi_r} \frac{a'^2_r \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b'^2_r - a'^2_r \sin^2 \varphi}} .$$

Sčítáním rovnic takto vzniklých při $r = 1, 2, \ldots \lambda$, násobených dříve faktorem $2^{r-1}$, obdržíme

$$\int_0^{\Psi_0} \frac{a'^2_0 \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2 \varphi}} = - [a'_0 b'_0 + 2 a'_1 b'_1 + 2^2 a'_2 b'_2 + \ldots \tag{29}$$

$$+ 2^{\lambda-1} a'_{\lambda-1} b'_{\lambda-1}] \int_0^{\Psi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2 \varphi}}$$

$$+ [a'_0 \sin \Psi_0 + 2 a'_1 \sin \Psi_1 + \ldots + 2^{\lambda-1} a'_{\lambda-1} \sin \Psi_{\lambda-1}]$$

$$+ 2^{\lambda} \int_0^{\Psi_\lambda} \frac{a'^2_\lambda \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{b'^2_\lambda - a'^2_\lambda \sin^2 \varphi}} .$$

Pro poslední integrál máme

$$\lim_{\lambda=\infty}\int_0^{\Psi_\lambda}\frac{a'^2_\lambda \sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{b'^2_\lambda - a'^2_\lambda \sin^2\varphi}} = M(b'_0, a'_0)\int_0^{\overline{\Psi}}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi} =$$

$$- M(b'_0, a'_0)\sin\overline{\Psi} + M(b'_0, a'_0)\log\cot\left(\frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\overline{\Psi}\right).$$

K téže limitě konverguje též (při $\lim \lambda = \infty$, viz odst. IV. (26))

$$- a'_\lambda \sin \Psi_\lambda + a'_\lambda b'_\lambda \int_0^{\Psi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2\varphi}}.$$

Označíme-li

$$r'_\lambda = 2^\lambda\Bigg[\int_0^{\Psi_\lambda}\frac{a'^2_\lambda \sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{b'^2_\lambda - a'^2_\lambda \sin^2\varphi}}$$

$$+ a'_\lambda \sin \Psi_\lambda - a'_\lambda b'_\lambda \int_0^{\Psi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2\varphi}}\Bigg],$$

můžeme rovnici (29) psáti následovně

$$\int_0^{\Psi_0}\frac{a'^2_0 \sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2\varphi}} = - [a'_0 b'_0 + 2a'_1 b'_1 + \ldots$$

$$+ 2^{r-1}a'_{\lambda-1}b'_{r-1} - 2^r a'_\lambda b'_\lambda]\int_0^{\Psi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2\varphi}} \qquad (30)$$

$$+ [a'_0 \sin \Psi_0 + 2a'_1 \sin \Psi_1 + \ldots + 2^{\lambda-1}a'_{\lambda-1} \sin \Psi_{\lambda-1}$$
$$- 2^\lambda a'_\lambda \sin \Psi_\lambda] + r'_\lambda.$$

Závorce hranaté lze dáti (i se zřetelem k jejímu znaménku) tvar

$$a'_0 b'_0 + 2(a'_1 b'_1 - a'_0 b'_0) + 2^2(a'_2 b'_2 - a'_1 b'_1) + \ldots$$
$$+ 2^\lambda (a'_\lambda b'_\lambda - a'_{\lambda-1} b'_{\lambda-1}).$$

Výraz tento může prodloužen býti do nekonečna, dostaneme řadu nekonečnou velmi rychle konvergentní, kterou můžeme psáti na základě relací

$$2^l(a'_l b'_l - a'_{l-1} b'_{l-1}) = 2^l[(2b'_{l+1} - b'_l)\, b'_l - (2b'_l - b'_{l-1})\, b'_{l-1}]$$
$$= 2^{l+1}\, b'_l(b'_{l+1} - b'_l) + 2^l(b'_{l-1} - b'_l)^2$$

ve tvaru

$$b'^2_0-2(b'_0-b'_1)\,b'_1-2^2(b'_1-b'_2)\,b'_2-2^3(b'_2-b'_3)\,b'_3-\ldots$$

což jest dle označení odst. III. $b'^2_0 - P(b'_0, a'_0)$.

Píšeme-li i druhou hranatou závorku ve formě řady nekonečné, máme se zřetelem k tomu, že $\lim r_\lambda = 0$

$$\int_0^{\Psi_0} \frac{a'^2_0 \sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2\varphi}} = [b'^2_0 - P(b'_0, a'_0)] \int_0^{\Psi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b'^2_0 - a'^2_0 \sin^2\varphi}}$$
$$- [a'_0 \sin \Psi_0 + 2(a'_1 \sin \Psi_1 - a'_0 \sin \Psi_0) \tag{31}$$
$$+ 2^2(a'_2 \sin \Psi_2 - a'_1 \sin \Psi_1) + \ldots],$$

kterážto rovnice převádí výpočet integrálu druhého druhu na integrál prvního druhu. Pro integrály v normálním tvaru Legendrově z ní následuje:

$$b'_0 E\left(\frac{a'_0}{b'_0}, \Psi_0\right) = P(b'_0, a'_0) \frac{1}{b'_0} F\left(\frac{a'_0}{b'_0}, \Psi_0\right)$$
$$+ [a'_0 \sin \Psi_0 + 2(a'_1 \sin \Psi_1 - a'_0 \sin \Psi_0) + \ldots].$$

Abychom odvodili si výraz užitečný pro integrály úplné druhého druhu, klademe opět (jako v odst. V.)

$$\Psi_0 = 2^{r-1}\pi, \text{ tedy } \Psi_1 = 2^{r-2}\pi, \ldots \Psi_{r-1} = \pi,\ \Psi_r = \frac{\pi}{2}.$$

Pak závorka hranatá se redukuje na

$$2^r a'_r + \varepsilon_r,$$

kde $\varepsilon_r$ s rostoucím $r$ konverguje k nulle. Provedeme-li dosazení uváživše, že

$$E\left(\frac{a'_0}{b'_0}, 2^{r-1}\pi\right) = 2^r E\left(\frac{a'_0}{b'_0}, \frac{\pi}{2}\right),$$
$$F\left(\frac{a'_0}{b'_0}, 2^{r-1}\pi\right) = 2^r F\left(\frac{a'_0}{b'_0}, \frac{\pi}{2}\right),$$

máme dělíce ještě číslem $2^r$

$$b'_0 E\left(\frac{a'_0}{b'_0}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{b'_0} P(b'_0, a'_0)\, F\left(\frac{a'_0}{b'_0}, \frac{\pi}{2}\right) + a'_r + \frac{\varepsilon_r}{2^r},$$

aneb konečně, necháme-li $r$ vzrůstati nade všecky meze,

$$b'_0 E\left(\frac{a'_0}{b'_0}, \frac{\pi}{2}\right) = M(b'_0, a'_0) + \frac{1}{b'_0} P(b'_0, a'_0)\, F\left(\frac{a'_0}{b'_0}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{32}$$

VII.

Z rovnic pro úplné integrály druhého druhu odvozených vyplývá nejprve důležitá relace, zvaná *Legendreova*. Označme pro stručnost

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = K, \; F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = K', \; E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = E,$$

$$E\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = E',$$

a klaďme $k = \frac{a_0}{b_0}$ a tedy $k' = \frac{c_0}{b_0}$. Pak jest dle (20)

$$E = \frac{b_0^2 - P(b_0, c_0)}{b_0^2} K$$

a dle (32) (zavedeme li $b'_0 = b'_0$, $a'_0 = c_0$)

$$E' = \frac{M(b_0, c_0)}{b_0} + \frac{P(b_0, c_0)}{b_0^2} K'.$$

Jest tedy

$$EK' + E'K = \frac{1}{b_0} M(b_0, c_0) K + KK',$$

použijeme-li pak ještě rovnice (14)

$$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2},$$

což jest hledaná relace mezi úplnými integrály.

VIII.

Další použití odvozených formulí, mající význam praktický, jest výpočet čísla

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

důležitého při inversi elliptických integrálů a při výpočtu elliptických integrálů všech tří druhů příslušných modulu $k$.

Užíváme-li označení předcházejícího odstavce a formulí (14) a (28), máme

$$\frac{1}{b'_0} \cdot K = \frac{\pi}{2M(b_0, c_0)},$$

$$\frac{1}{b'_0} K' =$$

$$\frac{1}{M(b_0, c_0)} \left[ log \frac{4}{k} - log \frac{b_0}{b_1} - \frac{1}{2} log \frac{b_1}{b_2} - \frac{1}{2^2} log \frac{b_2}{b_3} - \ldots \right];$$

$$k = \frac{a_0}{b_0}, \quad k' = \frac{c_0}{b_0},$$

ze kterých ihned vyplývá po dosazení

$$q = \frac{k^2}{16} \cdot \frac{b_0^2}{b_1^2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \left(\frac{b_2}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{b_3}{b_4}\right)^{\frac{1}{2^2}} \ldots \tag{33}$$

součin, který rychle konverguje a pro numerický výpočet čísla $q$ jest vhodnější než obvyklé methody výpočtu, zejména než výpočet řadou

$$q = \frac{k^2}{16} + \frac{1}{32} k^4 + \frac{21}{1024} k^6 + \frac{31}{2048} k^8 + \ldots$$

Jelikož postačí $\left(\text{vzhledem ku možné lineární transformaci theta-funkcí } \left(\tau, -\frac{1}{\tau}\right)\right)$ omeziti se při výpočtu čísla $q$ na případ $k \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$, postačí, jak z vývodů numerických odst. následujícího vyplývá, při výpočtu čísla $q$ formulí (33) ponechati si 4 prvé faktory a klásti $b_3 = b_4 = b_5 \ldots$, chceme-li $q$ vypočítati přesně na 9 cifer. Při tom můžeme položiti $b_0 = 1$ a tedy

$$b_0 = 1, \quad c_0 = k'; \quad b_1 = \frac{1 + k'}{2}, \quad c_1 = \sqrt{k'}; \ldots$$

## IX.

V předcházejícím byly vyloženy dvě methody pro výpočet elliptických integrálů pomocí středu arithmo-geometrického. První vede rychleji k cíli, když $k = \frac{a_0}{b_0}$ jest blízko 0; druhá, když

$k' = \sqrt{1 - k^2}$ jest blízko nulle. Obě poskytnou řady přibližně stejně konvergentní, když $k = k'$, t. j. když $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Můžeme tudíž pokládati tento případ $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ jakožto krajní a první methody používati, když $k$ jest v intervalu $(0, \frac{1}{2}\sqrt{2})$, druhé pak, když $k'$ jest v tom intervalu. Pak jest případ $k = k' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ pro počítání elliptických integrálů na základě vyložených method nejnepříznivější a vyšetřením rychlosti konvergence v tomto případě získáme si i orientaci o tom, kolik článků nejvýše jest vyčísliti v ostatních případech, jednak při počítání středu arithmo-geometrického, jednak při sčítání příslušných řad, vyskytujících se ve vyjádřeních elliptických integrálů (chceme-li dosíci jisté přesnosti).

Podávám z té příčiny v následujícím výsledky výpočtu arithmo-geometrického středu z čísel $\sqrt{2}$, 1. Dostáváme při počítání 14-timístném

$$
\begin{aligned}
b_0 = \sqrt{2} &= 1{\cdot}4142135623731, \\
c_0 &= 1{\cdot}\,; \\
b_1 &= 1{\cdot}2071067811865, \\
c_1 &= 1{\cdot}1892071150027; \\
b_2 &= 1{\cdot}1981569480946, \\
c_2 &= 1{\cdot}1981235214931; \\
b_3 &= 1{\cdot}1981402347939, \\
c_3 &= 1{\cdot}1981402346773; \\
M(b_0, c_0) &= 1{\cdot}1981402347356\ldots
\end{aligned}
$$

$b_4$ a $c_4$ liší se, jak z výrazů pro $b_3$, $c_3$ patrno, až na 21. desetinném místě. $b_3$ a $c_3$ pak o méně než $2 \,.\, 10^{-10} \,.\, M(b_0, c_0)$, takže při 8ciferném počítání můžeme již klásti s přesností dostatečnou $b_3 = c_3 = M(b_0, c_0)$.

Pro výpočet 8-ciferný postačí tudíž, ať počítáme kterýkoliv elliptický integrál pomocí formulí svrchu uvedených, počítati toliko dva geometrické středy a lze klásti s dostatečnou přesností $b_3 \doteq c_3 \doteq b_4 \doteq c_4 \doteq \ldots M(b_0, c_0)$.

Tak ku př. pro délku kvadrantu elliptického, je-li její numerická výstřednost menší než $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a její poloosy $A$, $B$, dostáváme s přesností jistě 8-ciferní tento výsledek dle (20)

$$\frac{\pi}{8}\cdot\frac{(A+B)^2-2(A_1-B_1)^2}{A_3},$$

kde

$$A_1=\frac{A+B}{2},\quad B_1=\sqrt{AB},\quad A_2=\frac{A_1+B_1}{2},$$

$$B_2=\sqrt{A_1B_1},\quad A_3=\frac{A_2+B_2}{2};$$

obdobnou pak formuli (obsahující přirozené logarithmy) i v případě, že $k>\frac{1}{\sqrt{2}}$, obdržíme z (32).

---

# Studie o řadách Laméových vytvořených cyklidami Dupinovými.

L. Seifert, professor reálky v Praze-I.

Tvoří-li tři řady ploch system třikráte orthogonální, jest každá plocha jedné z těchto řad protata plochami ostatních dvou řad v obou systemech čar křivosti (*theorèm Dupinův*). Dle Darbouxa zoveme pak *řadou Laméovou* takovou řadu ploch, jež může býti součástí systemu třikráte orthogonálního. S hlediska geometrického nejvíce zajímavosti poskytují řady vytvořené cyklidami Dupinovými důsledkem té okolnosti, že čáry křivosti obou systemů jsou kruhové. Theorie těchto řad, dík slavným pracím Darbouxovým, Haagovým a Demoulinovým (Comptes Rendus 147, 148) jest již téměř ukončena, ale výsledky její, získané počtem infinitesimálním, jsou takové, že takřka nabádají k tomu, aby se odvodily též způsobem čistě geometrickým. O to pokusil jsem se v této práci užívaje centrální projekce prostoru čtyrrozměrného na obyčejný prostor trojrozměrný. Tak úplně bez počtu lze odvoditi všechny známé věty a vnitřní souvislost jejich stává se zde ještě patrnější, než jest počtem vůbec možno.

Zejména však zajímavým se zdá odvození systemu třikrát orthogonálního složeného vesměs z cyklid Dupinových a způsob, jakým se zde dospěje k transformaci Ribacourově.