František Josef Studnička

O novém spůsobu stanoviti hodnotu transcendentního čísla e

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 2, 61--65

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109229

O novém spůsobu stanoviti hodnotu transcendentního čísla e.

Napsal

prof. dr. F. J. Studnička.

Vedlé Ludolfíny není čísla, jež by tak všestranně vynikalo, jako základ přirozené funkce exponenciální, transcendentní číslo e, ba možná tvrditi, že jen historická tradice zjednává Ludolfíně přednost, jakáž vším právem přísluší našemu e, zasluhujícímu jména *Eulerína*.

Jest tedy záhodno, aby se i hodnota konstanty této znala co možná přesně, i kdyby jiného důvodu nebylo nežli zevnějšího toho, že π jest v poslední době *Shanksem* až 707 míst desetinných určeno (1872), kdežto e sotva 46 místy dosud bylo stanoveno.

Obyčejný spůsob, jakým se vypočítává hodnota jmenované konstanty, zakládá se v přibližném vyčíslení nekonečné řady

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots,$$

kteráž se honosí vzácnou zvláštností, že následující člen tu pouhým dělením číslem přípony plyne z členu předcházejícího, jelikož o nich všeobecně platí patrně

$$u_{k+1} = \frac{u_k}{k+1} \text{ nebo-li } \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} : (k+1).$$

Jiný spůsob stanoviti tuto hodnotu zakládá se buď na Eulerově vzorci řetězcovém

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\dots}}}}$$

anebo na obecném vzorci řetězcovém *)

$$\frac{2}{e^{\frac{2m}{n}}+1}=1-\cfrac{m}{n+\cfrac{m^2}{3n+\cfrac{m^2}{5n+\dots}}}$$

z něhož plyne pro $m=1$, $n=2$ napřed

$$\frac{2}{e+1}=1-f_\infty,$$

zavedeme-li kratší označení

$$f_\infty=\cfrac{1}{2.1+\cfrac{1}{2.3+\cfrac{1}{2.5+\dots}}} \qquad (1)$$

a tedy, řešíme-li podle e, konečně

$$e=\frac{1+f_\infty}{1-f_\infty}.\text{**)}$$

---

*) Viz *Studnička* „Všeobecné tvarosloví algebraické“ pag. 164. a 236.

**) Nazveme-li $q_1, q_2, q_3 \dots$ jmenovatele přibližných hodnot řetězce tohoto, bude

$$f_\infty=\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_1q_2}+\frac{1}{q_2q_3}-\frac{1}{q_3q_4}+\dots$$

což by tu poskytlo řadu velmi rychle konvergující

$$f_\infty=\frac{1}{2}-\frac{1}{2.13}+\frac{1}{13.132}-\frac{1}{132.1861}+\dots;$$

podobně by se obdrželo pro Eulerův řetězec

$$\frac{e-1}{2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1.7}+\frac{1}{7.71}-\frac{1}{71.1001}+\frac{1}{1001.18089}-\dots,$$

takže již prvních 8 míst desetinných přesně poskytují první 4 členové této řady.

Poněvadž nekonečný tento řetězec (1) nelze úplně vyčísliti — vznikl by tu zlomek čítající nekonečně mnoho číslic i v čitateli i ve jmenovateli —, zůstaňme státi při n jeho členech, čímž obdržíme pro e přibližnou hodnotu

$$e_n = \frac{1 + f_n}{1 - f_n}, \tag{2}$$

kteráž se tím méně bude lišiti od hodnoty pravé, čím větší zvolíme číslo pro n.

A poněvadž o hodnotě řetězce našeho platí

$$f_n = \frac{č_n}{j_n},$$

kdež čitatel $č_n$ a jmenovatel j_n ustanovuje se rekurrentně podlé vzorce známého

$$č_n = a_n č_{n-1} + č_{n-2},$$
$$j_n = a_n j_{n-1} + j_{n-2},$$

značí-li a_n v řetězci (1) jmenovatele n-tého, totiž

$$a_n = 2(2n - 1),$$

promění se vzorec (2) napřed v

$$e_n = \frac{j_n + č_n}{j_n - č_n};$$

a poněvadž dle našich vzorců rekurrentních jest

$$j_n + č_n = a_n (j_{n-1} + č_{n-1}) + (j_{n-2} + č_{n-2}),$$

možná složiti nového čitatele $Č_n$ a jmenovatele J_n podlé vzorců

$$j_n + č_n = Č_n,$$
$$j_n - č_n = J_n,$$

načež bude o nich obdobně platiti

$$Č_n = 2(2n - 1)\, Č_{n-1} + Č_{n-2},$$
$$J_n = 2(2n - 1)\, J_{n-1} + J_{n-2},$$

a přímo se konečně obdrží vzorec

$$e_n = \frac{Č_n}{J_n}, \quad \frac{1}{e_n} = \frac{J_n}{Č_n}. \tag{3}$$

Abychom si tedy zjednali nějakou přibližnou hodnotu čísla e, sestavme si pomocí jmenovatelů řetězce (1) schema

	2	6	10	14	18	22	...
$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{2721}{1001}$	$\frac{49171}{18089}$	$\frac{1084483}{398959}$	...
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	...

při čemž zároveň patrno, že tu všeobecně platí

$$e_{2n-1} > e < e_{2n}.$$

Výpočet poskytuje tu přibližně

$$\begin{aligned} e_1 &= 3, \\ e_2 &= 2{\cdot}714\ldots, \\ e_3 &= 2{\cdot}7183\ldots, \\ e_4 &= 2{\cdot}7182817\ldots, \\ e_5 &= 2{\cdot}7182818287\ldots, \\ e_6 &= 2{\cdot}718281828458\ldots, \\ e_7 &= 2{\cdot}7182818284590458\ldots, \end{aligned}$$

z čehož jde na jevo, jak rychle se tímto spůsobem dospívá *přímo* k hodnotě veličiny e na určitý počet míst desetinných obmezené, takže e_{16} by nejméně 50 míst takových poskytlo.

Dosud byla tato hodnota, jakož svrchu připomenuto, pouze 46 místy desetinnými určena, a sice obdrželo se

$$\begin{aligned} e = 2{\cdot}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874 \\ 71352\ 66249\ 77572\ 47692\ 8\ldots. \end{aligned}$$

Konečně budiž ještě připomenuto, že možná $Č_n$ i J_n independentně vyjádřiti, užije-li se tvaru determinantního; budeť tu

$$Č_n = \begin{vmatrix} 3, & -1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 1, & 2.3, & -1, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & 2.5, & \ldots, & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 2(2n-1) \end{vmatrix} \tag{4}$$

což představuje řetězcový determinant stupně n-tého, kdežto

$$J_n = \begin{vmatrix} 1, & -1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 1, & 2.3, & -1, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & 2.5, & \ldots, & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 2(2n-1) \end{vmatrix} \tag{5}$$

vyjadřuje se podobným determinantem téhož stupně. Poměr obou se nejlépe pozná, rozložíme-li je podlé prvků prvního sloupce; vznikne tu

$$\check{C}_n = 3\alpha + \beta,$$
$$J_n = \alpha + \beta,$$

takže podle vzorce (3) tu bude též

$$e_n = 2 + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, \tag{6}$$

při čemž značí α subdeterminant stupně prvého

$$\alpha = (2.3,\ 2.5,\ \ldots,\ 2[2n-1])$$

a β subdeterminant stupně druhého

$$\beta = (2.5,\ 2.7,\ \ldots,\ 2[2n-1]),$$

užijeme-li označení Binetova.

Jde-li tedy α i β do nekonečna, představuje zlomek ve vzorci (6) obsažený číslo místy desetinnými u čísla e zastoupené, takže platí se zřetelem k naší řadě původní

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{\alpha_\infty - \beta_\infty}{\alpha_\infty + \beta_\infty},$$

v čemž právě založena irracionálnost i transcendentnost naší konstanty e.*)

*) Vyňato z II. dílu „Algebraické analysi“ do tisku právě chystané.