Augustin Pánek

Řešení Laurentovy úlohy z počtu pravděpodobnosti

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 2, 94--97

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109223

vhodnou kombinací rovnic (6) a (8) vztah:

$$2S(2P_n^2Q_n^2-1)=S(2y^{4n-4}-1)-2S(2y^{4n}-1)+S(2y^{4n+4}-1), \quad (18)$$

jehož jest rovnice (13) zvláštním případem. Není pochyby, že bychom podrobnějším studiem rovnic (6), (8), (10) ještě mnohé zajímavé relace objevili; k dalším, skrytějším vztahům poukazuje možnost, vyjádřiti v některých případech číslo Π přece pouhými řadami S, jako na př. pomocí rovnice (14). Spojíme-li první rovnice soustav (7) a (11), obdržíme Π vyjádřené pouze dvěma řadami S, tedy formalně nejjednodušší výraz pro Π:

$$\Pi=20S(5+4\sqrt{2})-8S(33+24\sqrt{2}). \quad (19)$$

Jednoduchosť ta jest však vykoupena menší konvergencí první řady výrazu tohoto. Celkem lze říci, že vzorek (19) vyžaduje výpočet menšího počtu členů nežli vzorek (14); při přesnosti 20místné na př. nutno počítati 16 členů rovnice (19), 18 členů rovnice (14), při přesnosti 100místné 77, resp. 88 členů. Z druhé strany poskytne rovnice (14) některé výhody zejmena při výpočtu vzdálenějších členů, jež rovnice (19) nepodává v téže míře.

Řešení Laurentovy úlohy z počtu pravděpodobnosti.*)

Studujícím napsal

Augustin Pánek.

Úlohu tu podáváme v rouše tomto: *Dva členové „Jednoty českých mathematiků" se umluví, že v určitý den se sejdou ve svých místnostech, nestanovíce přesněji času schůzky, toliko to, že má se konati mezi 5. a 6. hodinou odpolední, a že každý z nich jest ochoten, přijde-li dříve, čekati na druhého 10 minut. Pokládajíc, že všechny okamžiky v ustanovené pro schůzku době mají stejnou pravděpodobnosť, stanoviti jest všeobecným řešením pravděpodobnosť, že schůzka bude.*

---

*) *H. Laurent, Traité du calcul des probabilités.* Paříž, 1873, str. 67. Přesné řešení úlohy té podal angličan *Miller* r. 1880.

I. K všeobecnému řešení této otázky pokládejme interval časový (rozsáhlosť mezní), pro schůzku ustanovený, za jednotku časovou. Dejme tomu, že x jest doba po smluveném čase (ve zvláštním případě po 5. hod.), ve které osoba A přijde do vytčených místností, a y doba pro osobu B, pak může x jakož i y, počítají-li se od počátku doby, míti všecky hodnoty mezi 0 a 1. Přihlížíme-li k soustavě dvouosé, znázorňuje počet případů, jediných a sobě rovně možných, všecky možné kombinace hodnot x a y, jež pokládáme za souřadnice bodů, ležících uvnitř anebo na obvodě čtverce OABC, jehož strana OA $=$ OC $= 1$. Obor možných případů omezuje tedy čtverec plochy 1.*)

Mají-li se osoby ty setkati, třeba uvážiti dva případy:

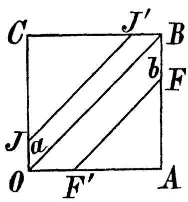
1. Osoba A přijde dříve a čeká na druhou interval doby a; schůzka se stane, když

$$(\alpha) \qquad x < y < x + a.$$

2. Osoba B přijde dříve a čeká dobu b, a schůzka nastane, když

$$(\beta) \qquad y < x < y + b.$$

Abychom blíže omezili obor pro případy příznivé, jehož body vyhovují buď podmínce (α) aneb (β), učiňme OJ $= a$,



BF $= b$ (viz obr.) a veďme přímky JJ' a FF' rovnoběžně k ose souměrnosti OB čtverce, jejíž rovnice má tvar

$$x = y.$$

Přijde-li osoba A dříve, jest v platnosti (α). Body, pro které $x < y$, leží nad přímkou

$$\text{OB} \equiv x - y = 0$$

a body, pro které $y < x + a$, leží pod přímkou

$$\text{JJ}' \equiv x - y + a = 0;$$

*) Srovnej: *A. A. Cournot, Die Grundlehre der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, německý překlad ten pořízený *Schnusem*. V Brunšviku, 1849, str. 107.

body tedy, pro které jest v platnosti (α), leží v lichoběžníku OBJ′J, pro každý pak z těchto bodů dostaneme jedno x a jedno y, které uvažovanému zjevu je příznivo — že osoby se setkají. Plocha tohoto lichoběžníku vyhovuje tudíž případům příznivým.

Pak-li přijde osoba B dříve, jest podmínka (β). Body, pro které $y < x$, leží pod přímkou OB a body, pro které $x < y + b$ leží nad přímkou

$$\mathrm{FF'} \equiv x - y - b = 0;$$

tu pak, jako svrchu, vyhovují případům příznivým veškeré body, stanovené x, y, v ploše lichoběžníku OF′FB ležící.

Sečteme-li oba lichoběžníky, obdržíme šestiúhelník OF′FBJ′J, jehož body vyhovují buď (α) aneb (β). Jak z obr. zřejmo, jest ploský obsah tohoto šestiúhelníka

$$\square\,\mathrm{OABC} - \triangle\,\mathrm{F'AF} - \triangle\,\mathrm{JJ'C} = 1 - \frac{1}{2}(1-b)^2 - \frac{1}{2}(1-a)^2$$

$$= a + b - \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Jest tedy hledaná pravděpodobnosť

$$\mathrm{P} = \frac{\text{pl. OF'FBJ'J}}{\text{pl. OABC}} = a + b - \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Když $b = a$, nabudeme

$$\mathrm{P} = 2a - a^2$$

a v našem zvláštním případě pro $a = \frac{1}{6}$, bude pravděpodobnosť, že ke schůzce dojde

$$\mathrm{P} = \frac{11}{36}.$$

II. Při řešení úlohy dané lze vésti si též takto:

Náhoda, že osoba A dostaví se mezi časem x a $x + dx$, jest dx, a že B dostaví se mezi časem y a $y + dy$, jest dy. Jsou-li všechny možné sestavy proměnných hodnot x, y v oboru daném O, vyhovující případům jediným a sobě rovně možným, a všecky hodnoty x, y kombinované a z daných podmínek vyvozené v oboru O′, vyhovující případům příznivým, bude, jak známo, hledaná pravděpodobnosť

$$\mathrm{P} = \frac{\int\int dx\,dy \ \text{(obsah oboru O')}}{\int\int dx\,dy \ \text{(obsah oboru O)}}.$$

Vyjádříme-li interval času, pro schůzku ustanovený, v minutách, mohou míti x, y všechny možné hodnoty od 0 do 60. Pravděpodobnosť žádaná

$$P = \frac{1}{60^2}\left\{\int_0^{10}\int_0^{x+10} dx\,dy + \int_{10}^{50}\int_{x-10}^{x+10} dx\,dy + \int_{50}^{60}\int_{x-10}^{60} dx\,dy\right\}$$

$$= \frac{1}{60^2}\left[\int_0^{10}(x+10)\,dx + 20\int_{10}^{50} dx + \int_{50}^{60}(70-x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1100}{60^2} = \frac{11}{36}.$$

O středech křivosti evoluty kuželosečky.

Podává

F. Machovec,

professor v Karlíně.

Po vydání svého spisu „Zobrazování tečen a středů křivosti křivek na zákl. nové methody“ neměl jsem v úmyslu podávati nové příspěvky k důkazu, že methoda v tomto spise vyložená stačí vždy k sestrojení tečen a středů křivosti křivky, jejíž každý bod, nechť již jeho poloha závisí na proměnlivé délce, nebo úhlu, atd. dovedeme sestrojiti, — mělť jsom tuto věc za úplně dokázanou.

Od tohoto úmyslu odvrátily mne články, které se objevují často v mathematických časopisech anebo i v samostatných spisech, články mající účel odvoditi konstrukce středů křivosti některých křivek způsobem více nebo méně geometrickým, aniž podávají obecnou methodu k řešení této úlohy. Tak příslušná stať ve Wienerově deskriptivní geometrii přiměla mne k sepsání článků o souvislosti středů křivosti dvou křivek kollinearných v bodech sdružených a o středech křivosti drah vytvořených body obrazce, který se libovolným způsobem v rovině pohybuje*) a článek, jejž uveřejnil d'Ocagne v „Nouvelles Annales de mathématiques 1888“ měl vliv na můj článek „O středech křivosti křivky integrální“ uveřejněný v loňském ročníku tohoto časop.

---

*) „Beiträge zur Construction der Tangenten und der Krümmungsmittelpunkte ebener Curven.“ (Zpráva král. spol. nauk z r. 1888.)