Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 21 (1892), No. 3, 134--157

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109220

Úlohy.

Řešení úlohy 1.

(Zaslal p. *Fr. Novotný*, stud. VIII. tř. g. v Čes. Budějovicích.)

Daný součin lze psáti v podobě

$$S = a^{\frac{1}{2}} \,.\, a^{\frac{3}{4}} \,.\, a^{\frac{5}{8}} \,.\, a^{\frac{7}{16}} \ldots \text{ in inf.}$$

čili

$$S = a^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \cdots}.$$

Jde tedy o součet řady

$$R = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \ldots \text{ in inf.}$$

Ježto

$$\frac{1}{2} R = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \cdots,$$

obdržíme, odečtouce tuto řadu od předcházející,

$$\frac{1}{2} R = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \cdots,$$

pročež

$$R = 3, \quad S = a^3.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Josef Čeřovský* ze VII. tř. r. a *Boh. Mikyska* ze VI. tř. g. v Hradci Králové, *Josef Malíř* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Josef Pardubský*, les. technik ve Vídni, *Josef Nesměrák* ze VII. třídy r. v Rakovníce, *Josef Hříbal*, stud. práv v Praze, *Frant. Brejcha* z VIII. tř. g. v Slaném, *Karel Rosa*, *Ant. Zelinka*, *Ant. Musil* z VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze, *Josef Poláček* ze VII. tř. g. v Kolíně, *Václav Skála* a *Josef Klobouček* ze VII. tř. r. v Pardubicích, *Zdeněk J. Sláma* a *Josef Kavan* ze VII. tř. české r. v Praze, *Ladislav Janík*, *Bř. Vejborný* a *Alois Liška* z VIII. tř. g. v Kroměříži a *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. gymn. v Praze.

Řešení úlohy 2.

(Zaslal p. *Josef Pardubský*, les. technik ve Vídni.)

Je-li

(1) $$s_n = 2 - na_n,$$

jest

$$s_{n-1} = 2 - (n-1)\, a_{n-1},$$

a tedy

$$s_n - s_{n-1} = a_n = (n-1)\, a_{n-1} - na_n,$$

(2) $$a_n = \frac{n-1}{n+1}\, a_{n-1}.$$

Snižujíce postupně ukazatele, obdržíme řadu rovnic

$$a_{n-1} = \frac{n-2}{n}\, a_{n-2},$$

$$a_{n-2} = \frac{n-3}{n-1}\, a_{n-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_2 = \frac{1}{3}\, a_1,$$

které vespolek a rovnicí (2) znásobivše, nabudeme po náležitém zkrácení

$$a_n = \frac{2a_1}{n\,(n+1)}.$$

Klademe-li v rovnici (1) $n = 1$, bude

$$s_1 = a_1 = 2 - a_1, \qquad a_1 = 1,$$

tudíž

(3) $$a_n = \frac{2}{n\,(n+1)}.$$

Řada vyznačená rovnicí (1) jest tedy řada převratných hodnot čísel trojúhelníkových

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{15},\ \cdots$$

a součet její

$$s_n = \frac{2n}{n+1}. \tag{4}$$

Řada jest konvergentní a při lim $n = \infty$ jest lim $s_n = 2$.

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Josef Klobouček* a *Václav Skála* ze VII. tř. r. v Pardubicích, *Frant. Brejcha* z VIII. tř. g. v Slaném, *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. g. v Praze, *Josef Hříbal*, právník v Praze, *Josef Čeřovský* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Zdeněk J. Sláma* ze VII. tř. české r. v Praze, *Karel Rosa*, *Ant. Zelinka* a *Ant. Musil* z VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze, *Lad. Janík*, *Bř. Vejborný* a *Alois Liška* z VIII. tř. g. v Kroměříži a *Josef Malíř* z VIII. třídy gymn. v Chrudimi.

Řešení úlohy 3.

(Zaslal p. *Josef Hříbal*, stud. práv v Praze.)

a) Sestrojení. V kružnici dané sestrojme dva navzájem kolmé průměry mn, pq; tečny v bodech m, p nechť se protínají v bodě i. Rozpůlíme-li $\overline{mi}$ bodem j, stanoví spojnice bodu j se středem o na kružnici vrchol a osmiúhelníka žádaného. Ostatní vrcholy b, c, d, e, f, g, h jsou určeny souměrností osmiúhelníka k průměrům mn, pq a osám půlícím úhly těchto průměrů. Předpokládejme je tak, že a, b leží v kvadrantu mp, b blíže ku p; vrcholy další následují v pořádku abecedním.

b) Důkaz. Budiž u střed strany ab, v střed strany ah, t střed strany bc, k průsečík prodloužených stran ah, bc. Dle sestrojení jest $ak = av$, $au = ak \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, $au : av = \sqrt{2} : 2$, tudíž

$$ab : ah = 1 : \sqrt{2}.$$

c) Výpočet. Poloměr kružnice dané označme r, mimo to

$$\overline{au} = x, \quad \overline{av} = x\sqrt{2}, \quad \overline{ov} = 2x\sqrt{2} = y.$$

Potom jest v trojúhelníku avo

$$r^2 = (x\sqrt{2})^2 + (2x\sqrt{2})^2,$$

tedy

$$x=\frac{r}{\sqrt{10}}, \quad y=\frac{2r}{\sqrt{5}}.$$

Vypočítáme-li plochy

$$\triangle\, abk = x^2 = \frac{r^2}{10},$$

$$\square\, otkv = y^2 = \frac{4r^2}{5},$$

bude plocha osmiúhelníka

$$\mathrm{P} = 4\,(y^2 - x^2) = \frac{14}{5}\,r^2.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Karel Rosa*, *Ant. Musil* a *Ant. Zelinka* z VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze, *Frant. Brejcha* z VIII. tř. g. v Slaném, *Josef Malíř* z VIII. tř. gymn. v Chrudimi, *Zdeněk J. Sláma* ze VII. tř. české r. v Praze, *Josef Čeřovský* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Boh. Vávra* z VIII. tř. g. ve Spálené ulici v Praze, *Jan Matoušek* ze VII. tř., *Ladislav Janík*, *Alois Liška* a *Bř. Vejborný* z VIII. tř. g. v Kroměříži, *Karel Vrba* ze VII. tř. a *Maxmilián Pick* z VIII. tř. g. v Něm. Brodě, *Ant. Plánička* ze VII. tř. g. v Čes. Budějovicích, *Josef Klobouček* ze VII. tř. r. v Pardubicích, *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. g. v Praze a *Josef Nesměrák* ze VII. tř. r. v Rakovníce.

Řešení úlohy 4.

(Zaslal p. *Frant. Brejcha*, stud. VIII. tř. g. v Slaném.)

Do kružnice poloměru r vepsán buď čtyrúhelník ABCD, jehož strany jsou $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{BC} = b$, $\mathrm{CD} = c$, $\mathrm{DA} = d$ a jehož úhlopříčky

$$\mathrm{AC} = m, \quad \mathrm{BD} = n$$

protínají se v bodě O, svírajíce úhel ω.

Hledaná mocnosť bodu O jest součin

$$\Pi = \mathrm{OA}\,.\,\mathrm{OC} = \mathrm{OB}\,.\,\mathrm{OD}.$$

Přísluší-li k stranám a, b, c, d po řadě středové úhly 2α, 2β, 2γ, 2δ, jest

$$\mathrm{OA} = \frac{a \sin \delta}{\sin \omega} = \frac{ad}{2r \sin \omega}, \quad \mathrm{OC} = \frac{b \sin \gamma}{\sin \omega} = \frac{bc}{2r \sin \omega},$$

tedy

$$\Pi = \frac{abcd}{4r^2 \sin^2 \omega}.$$

Zbývá ještě nahraditi v tomto výrazu hodnoty r a $\sin \omega$ náležitými úkony stran. Jest však plocha čtyrúhelníka ABCD

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2} mn \sin \omega$$

a dle věty Ptolemaiovy

$$mn = ac + bd,$$

pročež

$$\sin \omega = \frac{2\mathrm{P}}{ac + bd}.$$

Mimo to známo,*) že poloměr kružnice opsané o čtyrúhelník dán jest výrazem

$$r = \frac{1}{4\mathrm{P}} \sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}.$$

Užijeme-li těchto vztahů, obdržíme posléze

$$\Pi = \frac{abcd\,(ac + bd)}{(ab + cd)(ad + bc)}.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Josef Malíř* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. g. v Praze, *Bř. Vejborný*, *Lad. Janík*, *Alois Liška* z VIII. tř. a *Jan Matoušek* ze VII. tř. g. v Kroměříži, *Josef Čeřovský* ze VII. tř. r. v Hradci Králové a *Karel Rosa* z VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze.

Řešení úlohy 5.

(Zaslal p. *Frant. Hoffman*, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové.)

Hledaný mnohoúhelník měj stran n a budiž

*) Viz ku př. Šandovo Měřictví pro vyšší třídy středních škol, 2. vyd. str. 215.

$$\alpha = \frac{2R}{n}.$$

Otáčeje se kolem své osy souměrnosti vytvořuje mnohoúhelník ten těleso povrchu

$$P = 2\pi\varrho\left(\varrho + \frac{\varrho}{\cos\alpha}\right) + \pi\varrho^2 \operatorname{tg}^2\alpha$$

čili

$$R = \pi\varrho^2\left(\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2,$$

kdež ϱ jest poloměr vepsané koule a povrch této

$$K = 4\pi\varrho^2.$$

Z podmínky

$$P : K = 5 : 4$$

plyne rovnice

$$\left(\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = 5,$$

které vyhovuje ostrý úhel α maje

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

To jest však cos 36^0, protož $n = 5$.

K témuž výsledku dospějeme, srovnávajíce obsahy obou těles.

Mnohoúhelník dané vlastnosti jest tedy pravidelný pětiúhelník.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Josef Poláček* ze VII. tř. g. v Kolíně, *Karel Fritsche* z VIII. tř. g. v Příbrami, *Josef Nesměrák* ze VII. tř. r. v Rakovníce, *Ant. Zelinka* a *Karel Rosa* z VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze, *Josef Čeřovský* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. g. v Praze, *Bř. Vejborný, Alois Liška*, *Lad. Janík* z VIII. tř. a *Jan Matoušek* ze VII. tř. g. v Kroměříži.

Řešení úlohy 6.

(Zaslal p. *Karel Rosa*, stud. VIII. tř. g. Městské stř. školy v Praze.)

Umístěme daný lichoběžník rovnoramenný *abcd* v pravoúhlé soustavě souřadnic tak, aby střední příčka jeho byla osou X, osa souměrnosti osou Y. I budou pak souřadnice vrcholů

$a(p-m, n)$, $b(m-p, n)$, $c(-p-m, -n)$, $d(p+m, -n)$.

Je-li $s(x, y)$ kterýkoli bod roviny, mají přímky sa, sb, sc, sd směrnice

$$A = \frac{y-n}{x-p+m}, \quad B = \frac{y-n}{x+p-m}, \quad C = \frac{y+n}{x+p+m},$$

$$D = \frac{y+n}{x-p-m}.$$

Značí-li pak

$$\varphi = \measuredangle asc, \quad \psi = \measuredangle bsd,$$

hledáme geometrické místo bodu s za podmínkou

$$\operatorname{tg}\varphi \mp \operatorname{tg}\psi = 0.$$

Podmínku tuto lze též vyjádřiti rovnicí

$$\frac{A-C}{1+AC} \mp \frac{B-D}{1+BD} = 0,$$

která po dosazení hodnot směrnic a odstranění zlomků nabývá tvaru

$$U \pm V = 0,$$

kdež

$$\begin{aligned} U \equiv\ & (x^2+y^2)(py-nx) + mnx^2 - 2mpxy - mny^2 \\ & + (py-nx)(m^2-n^2-p^2) + 2m^2nx - mn(m^2-n^2-p^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V \equiv\ & (x^2+y^2)(py+nx) + mnx^2 + 2mpxy - mny^2 \\ & + (py+nx)(m^2-n^2-p^2) - 2m^2nx - mn(m^2-n^2-p^2). \end{aligned}$$

Hledané geom. místo skládá se z těchto částí:

(a) $$\begin{aligned} U + V \equiv\ & py(x^2+y^2) + mn(x^2-y^2) \\ & + (py-mn)(m^2-n^2-p^2) = 0. \end{aligned}$$

Jest to křivka K cirkulárná stupně třetího, souměrná ku ose Y a procházející vrcholy daného lichoběžníka.

(b) $$U - V \equiv x[nx^2 + ny^2 + 2mpy - n(m^2+n^2+p^2)] = 0.$$

Tato část geometrického místa rozpadá se v osu Y a kružnici L danému lichobežníku opsanou.

Zvláštní případy:

a) Při $m = 0$ přechází lichoběžník v rovnoběžník pravoúhlý a uvažované místo geometrické skládá se z obou os souřadných a z kružnice rovnoběžníku opsané.

b) Při $n = 0$ přejde lichoběžník ve dvě stejné úsečky $ac = bd$ na ose X a geom. místo rozpadá se opět v osy X, Y a určitou kružnici.

c) Při $p = 0$ jsou body a, b, c, d vrcholy rovnoběžníka k osám X, Y souměrného, ac a bd pak dvě jeho protější strany. V případě tomto (o němž viz Mathesis, 1890, p. 152) složeno jest příslušné geometrické místo z osy Y, z kružnice opsané a z rovnostranné hyperboly jdoucí vrcholy danými.

Správné řešení úlohy této zaslal též p. *Josef Malíř* z VIII. tř. g. v Chrudimi.

Řešení úlohy 7.

(Zaslal p. *Karel Chlum,* stud. VIII. tř. g. v Roudnici.)

Rovnici danou lze psáti:

$$(\sqrt[3]{x+2}-3)\sqrt[3]{x+2}+4(\sqrt[3]{x+2}-3)\sqrt[3]{x-3}=0$$

čili

$$(\sqrt[3]{x+2}-3)(\sqrt[3]{x+2}+4\sqrt[3]{x-3})=0,$$

načež z rovnic

$$\sqrt[3]{x+2}-3=0$$

$$\sqrt[3]{x+2}+4\sqrt[3]{x-3}=0$$

najdeme kořeny

$$x=25,\quad 2\frac{12}{13}.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *František Mosler* z VIII. tř. g. v Opavě, *Jaroslav Skála*, *Bohumír Pruše* a *Josef Studený* ze VI. tř. r. v Prostějově, *Zdeněk J. Sláma* ze VII. tř. české r. v Praze, *Josef Kloboučěk* ze VII. tř. r. v Pardubicích, *Karel Fritsche* z VIII. tř. g. v Příbrami, *Bohumil Vávra* z VIII. tř. g. ve Spálené ulici v Praze, *K. Vrba* st. ze VII. tř. g. v Německém Brodě, *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. g. v Praze, *Arnošt Drkoš* ze VII. tř. a *Karel Slavík* ze VI. tř. g. v Litomyšli, *Karel Rosa*, *Ant. Zelinka*, *Václav Sýkora* z VIII. třídy a *Eduard Půlpán* ze VII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze, *Ladislav Janík*, *Alois Liška* z VIII. tř., *Jan Matoušek*, *Ant. Marydánek* a *Frant. Očadlík* ze VII. tř. g. v Kroměříži, *Josef Poláček* ze VII. tř. g. v Kolíně, *Josef Malíř* a *Miloš A. Švácha* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Josef Čeřovský* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Jan Vykruta* ze VII. tř. g. v Jindř. Hradci, *Zd. V. Tobolka* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Ant. Starosta* ze VII. tř. r. v Brně a *Jos. Jonák* ze VII. tř. g. v Roudnici.

Řešení úlohy 8.

(Zaslal p. *Josef Poláček*, stud. VII. tř. g. v Kolíně.)

Rovnici prvé lze dáti podobu

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$$

aneb

$$(x+y)^2 - 2xy + z^2 = (x+y)^3 - 3xy\,(x+y) + z^3. \tag{1}$$

Ježto

$$x + y = -z, \qquad xy = \frac{2}{z},$$

nabude (1) tvaru

$$z^3 - 3z - 2 = 0$$

čili

$$(z-2)(z+1)^2 = 0.$$

Jest tedy

$$z_1 = -1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = 2,$$

načež

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = -1,$$
$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Josef Čeřovský* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Zdeněk J. Sláma* ze VII. tř. české r. v Praze, *Josef Malíř* a *Miloš Ant. Švácha* z VIII. tř. gym. v Chrudimi, *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. g. v Praze, *Karel Fritsche* z VIII. tř. g. v Příbrami, *Ladisl. Janík*, *Alois Liška* z VIII. tř., *Frant. Očadlík*, *Jan Matoušek* a *Ant. Maryánek* ze VII. tř. g. v Kroměříži, *Karel Rosa* a *Václ. Sýkora* z VIII. tř. g. Městské střední šk. v Praze.

Řešení úlohy 9.

(Zaslal p. *Arnošt Drkoš*, stud. VII. tř. g. v Litomyšli.)

Nazveme-li první člen řady geometrické x, podíl y, jest

$$(1) \qquad x(1+y+y^2+y^3)=15,$$
$$(2) \qquad x^2(1+y^2+y^4+y^6)=85$$

aneb

$$(1') \qquad x(1+y)(1+y^2)=15,$$
$$(2') \qquad x^2(1+y^2)(1+y^4)=85.$$

Dělíme-li (2′) rovnici (1′)

$$(3) \qquad \frac{x(1+y^4)}{1+y}=\frac{17}{3};$$

odečteme-li rovnici (2) od (1), kterou dříve zdvojmocníme

$$(4) \qquad x^2y^2(1+y)^2+x^2y(1+y^4)=70.$$

Vzhledem rovnice (3) nabude (4) formy

$$x^2y^2(1+y)^2+\frac{17}{3}xy(1+y)=70$$

a řešením

$$(5) \qquad xy(1+y)=6,-\frac{35}{3},$$

t. j. součet prostředních dvou členů $=6$, proto součet krajních členů dle rovnice (1)

$$(6) \qquad x(1+y^3)=15-6=9.$$

Dělíme-li (6) rovnicí (5), nabudeme rovnice kvadratické, mající kořeny $y=2$, $\frac{1}{2}$, načež z (5) $x=1$, $x=8$.

Hledaná čísla jsou: 1, 2, 4, 8.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. g. v Praze, *Josef Malíř* a *Miloš Ant. Švácha* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Josef Čeřovský* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Karel Fritsche* z VIII. tř. g. v Příbrami, *Jan Matoušek*, *Ant. Marydánek*, *Frant. Očádlík* ze VII. tř., *Alois Liška* a *Ladislav Janík* z VIII. tř. g. v Kroměříži, *Ant. Starosta* ze VII. tř. r. v Brně, *Josef Poláček* ze VII. tř. g. v Kolíně, *Zdeněk J. Sláma* ze VII. tř. české r. v Praze, *Josef Klobouček* ze VII. tř. r. v Pardubicích, *Ant. Zelinka*, *Karel Rosa* a *Václav Sýkora* z VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze, *Jaroslav Skála* a *Josef Studený* ze VI. tř. r. v Prostějově, *Bohumil Vávra* z VIII. tř. g. ve Spál. ul. v Praze a *Jos. Jonák* ze VII. tř. g. v Roudnici.

Řešení úlohy 10.

(Zaslal p. *Zdeněk J. Sláma*, stud. VII. tř. české r. v Praze.)

Řadu danou lze uvésti patrně v podobu

$$S = \frac{a-1+2}{2} + \frac{a-1+4}{4} + \frac{a-1+8}{8} + \ldots + \frac{a+2^n-1}{2^n}$$

$$= \frac{a-1}{2} + \frac{a-1}{4} + \frac{a-1}{8} + \ldots + \frac{a-1}{2^n} + n$$

a tudíž

$$S = \frac{2^n-1}{2^n}(a-1) + n.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. g. v Praze, *Ladislav Janík*, *Alois Liška* z VIII. tř., *Jan Matoušek*, *Frant. Očadlík* a *Ant. Marydánek* ze VII. tř. g. v Kroměříži, *Boh. Vávra* z VIII. tř. g. ve Spálené ulici v Praze, *Miloš A. Švácha* a *Josef Malíř* z VIII. tř. gym. v Chrudimi, *Josef Čeřovský* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Frant. Mosler* z VIII. tř. g. v Opavě, *Jos. Klobouček* ze VII. tř. r. v Pardubicích, *Ant. Zelinka* a *Karel Rosa* z VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze, *Josef Chvála*, stud. ve Vídni, *Karel Fritsche* z VIII. tř. g. v Příbrami a *Josef Poláček* ze VII. tř. g. v Kolíně.

Řešení úlohy 11.

(Zaslal p. *Jos. Malíř*, stud. VIII. tř. v Chrudimi.)

Číslo psané pěti stejnými číslicemi jest násobkem čísla $11111 = 41 \,.\, 271$. Jde tedy o řešení rovnice

$$x\,(x + 16) = 11111\,y$$

čísly celými. Píšeme-li ji v podobě

$$y = \frac{x\,(x + 16)}{41 \,.\, 271}$$

a uvážíme-li, že 41 a 271 jsou čísla kmenná i nesoudělná, poznáváme, že jest buď

$$a)\quad x = 271\,u\,, \quad x + 16 = 41\,v$$

aneb

$$b)\quad x = 41\,u\,, \quad x + 16 = 271\,v,$$

kdež opět u, v jsou čísla celá.

Případ a) vyžaduje řešení rovnice

$$271\,u + 16 = 41\,v.$$

Známými methodami najdeme

$$u = 41\,\lambda + 1\,, \quad v = 271\,\lambda + 7$$
$$x = 271\,(41\,\lambda + 1)\,, \quad y = (41\,\lambda + 1)(271\,\lambda + 7).$$

Ježto dle smyslu úlohy má býti

$$0 < y < 10\,,$$

třeba klásti $\lambda = 0$ a bude pak

$$x = 271\,, \quad y = 7\,,$$

tudíž

$$271 \,.\, 287 = 77777.$$

V případě b) přijdeme toutéž cestou k výsledku

$$(-287) \,.\, (-271) = 77777.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Josef Čeřovský* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Zdeněk J. Sláma* ze VII. tř. české r. v Praze, *Karel Vrba* ze VII. tř. gym. v Německém Brodě, *Karel Fritsche* z VIII. tř. g. v Příbrami, *Vladimír Janků* z VIII.

tř. akad. g. v Praze, *Ladislav Janík*, *Alois Liška* z VIII. tř., *Jan Matoušek*, *Frant. Očadlík* a *Ant. Maryánek* ze VII. tř. g. v Kroměříži, *Jos. Poláček* ze VII. g. v Kolíně, *Boh. Vávra* z VIII. tř. g. ve Spálené ul. v Praze, *Miloš A. Švácha* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Karel Rosa* z VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze, *Jaroslav Skála* a *Josef Studený* ze VI. třídy real. v Prostějově.

Řešení úlohy 12.

(Zaslal p. *Karel Vrba* st., stud. VII. tř. g. v Německém Brodě.)

Žádaná čísla buďtež

$$A = 247\,x, \quad B = 437\,y.$$

Ježto

$$A - B = 19\,(13\,x - 23\,y),$$

bude nejmenší možná hodnota rozdílu

$$A - B = 19,$$

tedy

$$13\,x - 23\,y = 1.$$

Řešíce tuto rovnici methodou Lagrangeovou (užitím zlomků řetězových) čísly celými, najdeme

$$x = 23\,u - 7, \quad y = 13\,u - 4,$$

pročež

$$A = 5681\,u - 1729$$
$$B = 5681\,u - 1748.$$

Chceme-li za A i B míti hodnoty kladné a takové, aby bylo

$$A + B < 10000,$$

jest nám voliti $u > 0$ a dle podmínky

$$11362\,u < 13477,$$

tedy $u = 1$. Potom obdržíme

$$A = 3952 = 16 \,.\, 247$$
$$B = 3933 = 11 \,.\, 437.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. gym. v Praze, *Josef Čeřovský* ze VII. tř. real. v Hradci Králové, *Josef Malíř* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Karel Rosa* z VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze, *Josef Poláček* ze VII. tř. g. v Kolíně a *Boh. Vávra* z VIII. tř. g. ve Spálené ul. v Praze.

Řešení úlohy 13.

(Zaslal p. *Zdeněk J. Sláma,* stud. VII. tř. české r. v Praze.)

Užijeme-li vzorce

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

obdržíme, dosadíce hodnoty dané,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\sqrt{3},$$

protož

$$\alpha+\beta=120^{0}.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. gym. v Praze, *Jos. Čeřovský* ze VII. tř. real. v Hradci Králové, *Josef Malíř* a *Miloš Ant. Švácha* z VII. tř. g. v Chrudimi, *Josef Kloućek* ze VII. tř. r. v Pardubicích, *Karel Fritsche* z VIII. tř. g. v Příbrami, *Ant. Maryánek*, *Jan Matoušek*, *Frant. Očadlík* ze VII. tř., *Alois Liška* a *Lad. Janík* z VIII. tř. g. v Kroměříži, *Ant. Zelinka*, *Karel Rosa* a *Václav Sýkora* z VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze.

Řešení úlohy 14.

(Zaslal p. *Ant. Zelinka,* stud. VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze.)

Násobíme-li výraz

$$8\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\text{ zlomkem }\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}},$$

bude

$$8 \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} = \frac{4 \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7}}$$

$$= \frac{4 \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}} = \frac{2 \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}}.$$

Položíme-li $\alpha = \frac{4\pi}{7}$, $\beta = \frac{3\pi}{7}$ do známého vzorce

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta),$$

obdržíme

$$2 \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} = \sin \pi + \sin \frac{\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7},$$

a tedy je pravá strana daného výrazu $= 1$.

Druhé řešení úlohy 14.

(Zaslal p. *Ladislav Janík*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.)

Násobíme-li hořejší výraz $\frac{\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}}$ a užijeme-li vzorce

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha,$$

bude

$$8 \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} = 4 \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}}$$

$$= 2 \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \frac{\sin\left(\pi - \frac{3}{7}\pi\right)}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{2 \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{6\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}}$$

$$= \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = 1.$$

Řešení úlohy této zaslali pp.: *K. Rosa* z VIII. tř. g. Měst. stř. šk. v Praze, *Josef Čeřovský* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. g. v Praze, *Alois Liška* z VIII. tř. g. v Kroměříži a *Miloš A. Švácha* z VIII. tř. gymn. v Chrudimi.

Řešení úlohy 15.

(Zaslal p. *Jan Vykruta*, stud. VII. tř. g. v Jindř. Hradci.)

Budiž ABC žádaný trojúhelník, $2R = AC$ průměr kružnice, kolem něho opsané, $BK = v$ výška na podponu, $AK = q$, $KC = p$ průměty odvěsen na podponu. Obvod s trojúhelníka bude pak

$$s = 2R + \sqrt{v^2 + p^2} + \sqrt{v^2 + q^2},$$

a máme-li zření, že

$$v^2 = pq, \quad p + q = 2R,$$

obdržíme po krátké redukci

$$\frac{s}{2} = R + \sqrt{R(R + v)}. \qquad (1)$$

Prodloužíme-li podponu 2R přes C o výšku $v = CD$, a sestrojíme-li nad AD jakožto průměrem polokruh, který protíná v bodě F přímku EF, vedenou kolmo na AC středem O obepsané kružnice, bude $EF = \frac{s}{2}$.

Znamená-li p plochu hledaného trojúhelníka, jest

$$r = \frac{2p}{s} = \frac{Rv}{R + \sqrt{R(R + v)}} = \sqrt{R(R + v)} - R. \qquad (2)$$

Jest tedy poloměr $r = FH$.

Z výsledků těchto vyplývá správnosť následujícího sestrojení:

Od polovice daného obvodu s odečteme daný poloměr r vepsané kružnice. Zbytek bude podponou a zároveň průměrem 2R kružnice, opsané kolem něho. Opíšeme-li ještě kružnici kolem středu ležícího na podponě, která by procházela jedním koncem A podpony a bodem F na konci $\frac{s}{2}$, utneme od podpony, prodloužené přes druhý její konec C, délku CD, rovnou výšce hledaného trojúhelníka. Z podpony a výšky na podponu snadno pak sestrojíme žádaný trojúhelník.

Obvod trojúhelníka vždy jest větší než obvod vepsané do něho kružnice. Nejmenší obvod má pravoúhlý trojúhelník, je-li rovnoramenný, a sice jest

$$\frac{s}{2} = (3 + 2\sqrt{2})\, r.$$

Žádaný trojúhelník je tedy možný, je-li

$$\frac{s}{2} \geqq (3 + 2\sqrt{2})\, r,$$

což snadno zjistiti výkresem.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Josef Čeřovský* ze VII. třídy r. v Hradci Králové, *Karel Rosa* a *Antonín Zelinka* z VIII. tř. g. Městské střední šk. v Praze, *Alois Liška* z VIII. tř. a *Jan Matoušek* ze VII. třídy g. v Kroměříži, *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. g. v Praze, *Bohumil Vávra* z VIII. tř. g. ve Spálené ulici v Praze.

Řešení úlohy 16.

(Zaslal p. *Karel Fritsche*, stud. VIII. tř. g. v Příbrami.)

Je-li plocha trojúhelníka p, rameno a, základna b a výška v, bude poloměr r vepsané do něho kružnice

$$r = \frac{2p}{2a + b} = \frac{bv}{2a + b} = \frac{3}{10}\, b,$$

tedy

$$\frac{v}{2a + b} = \frac{3}{10}.$$

Spojíme-li s rovnicí touto ještě vztah

$$a = \sqrt{v^2 + \frac{b^2}{4}},$$

najdeme

$$v = \frac{15}{16} b,$$

pročež

$$a = \frac{17}{16} b.$$

Tudíž

$$a : b : v = 17 : 16 : 15.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Jos. Čeřovský* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Zdeněk J. Sláma* ze VII. tř. české r. v Praze, *Josef Malíř* a *Miloš A. Švácha* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. gymn. v Praze, *K. Vrba* starší ze VII. tř. g. v Německém Brodě, *Vítězslav M. Pavlousek* ze VII. tř. g. v Ml. Boleslavi, *L. Janík*, *Alois Liška* z VIII. tř., *Ant. Maryánek*, *Frant. Očadlík* a *Jan Matoušek* ze VII. tř. g. v Kroměříži, *Ant. Zelinka* a *Karel Rosa* z VIII. tř. g. Městské střední šk. v Praze.

Řešení úlohy 17.

(Zaslal p. *Josef Čeřovský*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Znamená-li p plochu, R poloměr kružnice opsané trojúhelníku, a nazveme-li strany jeho a, b, c, bude

$$p = \frac{abc}{4R}.$$

Naznačíme-li ω úhel, sevřený základnou a tížnicí t, bude

$$p = 2 \cdot \frac{bt}{4} \sin\omega; \quad \text{tedy } \frac{ac}{4R} = \frac{t}{2} \sin\omega,$$

a že má býti $ac = t^2$, musí $\frac{t}{2R} = \sin\omega$ čili $t = 2R\sin\omega$.

Jelikož jsou dány základna b a protější úhel β, je snadno sestrojiti příslušnou kružnici o průměru 2R. Abychom pak k t a 2R sestrojili úhel ω, vztyčme ve středu D základny kolmici DS $=$ R a opišme z S kružnici o poloměru R, která první kružnici protíná ve dvou bodech. Každý tento průsečík B neb B′ je vrcholem žádaného trojúhelníka; neboť úhel β jest, jakožto úhel obvodový, v první kružnici stálý, a prodloužíme-li kolmici DS na průměr DE $=$ 2R, a spojíme-li přímkou BE jeho konec E s průsečíkem B, bude úhel $\varepsilon =$ BED určen rovnicí

$$t = 2\mathrm{R} \sin \varepsilon .$$

Že konečně $\varepsilon = \omega$, vyhovuje sestrojení požadavku

$$t = 2\mathrm{R} \sin \omega .$$

Z trojúhelníků ABD, BCD plyne

$$a : t = \sin \omega : \sin \gamma$$
$$c : t = \sin \omega : \sin \alpha ,$$

tedy

$$ac : t^2 = \sin \omega^2 : \sin \alpha \sin \gamma .$$

Ježto $ac = t^2$, jest

$$\sin \omega = \sqrt{\sin \alpha \sin \gamma} .$$

Správné řešení úlohy této zaslal též p. *Karel Rosa* z VIII. tř. gymn. Městské stř. šk. v Praze.

Rozřešení úlohy 18.

(Zaslal p. *Alois Liška*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.)

Poněvadž jest daná strana b společnou vnitřní tečnou obou kružnic, rovná se délce zevní jejich společné tečny. Sestrojme tedy dané kružnice tak, aby se dotýkaly libovolné přímky na téže straně v bodech ve vzdálenosti b. Druhá zevní a jedna vnitřní tečna těchto kružnic utvoří s první přímkou žádaný trojúhelník.

Dotýká-li se vepsaná kružnice základny b sestrojeného trojúhelníka ABC v bodě D a připsaná v bodu E, jest

$$\mathrm{b} = \mathrm{AD} + \mathrm{CD} = \mathrm{AD} + \mathrm{AE} = r \cot \frac{\alpha}{2} + \mathrm{R} \cot \frac{\pi - \alpha}{2} ,$$

kdežto α znamená kterýkoli k základně b přilehlý úhel tohoto trojúhelníka. Z rovnice této nabudeme

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4Rr}}{2R}.$$

Je-li hořejší znaménko v tomto výrazu pro úhel α, bude dolní míti platnosť pro úhel γ, přilehlý též k základně. Aby byl tedy trojúhelník rovnoramenný, musí býti

$$b = 2\sqrt{Rr};$$

a má-li býti pravoúhlý, vzhledem

$$\frac{\alpha}{2} = 45^0, \text{ tedy } b + \sqrt{b^2 - 4R} = 2R, \text{ musí býti } b = R + r.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Karel Rosa* z VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze, *Josef Čeřovský* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. g. v Praze, *Lad. Janík* z VIII. tř. a *Jan Matoušek* ze VII. tř. g. v Kroměříži a *Boh. Vávra* z VIII. tř. g. ve Spálené ulici v Praze.

Řešení úlohy 19.

(Zaslal p. *Vladimír Janků*, stud. VIII. tř. akad. gymn. v Praze.)

Označme krátce

$$\overline{ap} = a, \quad \overline{bp} = b, \quad \overline{cp} = c, \quad \sphericalangle bac = \alpha.$$

Jest pak

$$\overline{om} = a \operatorname{tg} \alpha + c$$
$$\overline{on} = b \operatorname{cotg} \alpha + c,$$

tedy

$$\frac{1}{om} + \frac{1}{on} = \frac{a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{cotg} \alpha + 2c}{ab + (a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{cotg} \alpha)\, c + c^2}.$$

Poněvadž však $ab = c^2$, lze psáti

$$\frac{1}{om} + \frac{1}{on} = \frac{a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{cotg} \alpha + 2\sqrt{ab}}{(a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{cotg} \alpha)\sqrt{ab} + 2ab} = \frac{1}{\sqrt{ab}},$$

tudíž, jak bylo dokázati,

$$\frac{1}{om}+\frac{1}{on}=\frac{1}{op}.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Josef Čeřovský* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Frant. Mosler* z VIII. tř. g. v Opavě, *Lad. Janík* a *Alois Liška* z VIII. třídy g. v Kroměříži, *Karel Rosa* a *Ant. Zelinka* z VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze.

Řešení úlohy 20.

(Zaslal p. *Jaroslav Skála*, stud. VI. tř. r. v Prostějově.)

Dle sestrojení jest

$$\Delta' = \Delta + \frac{1}{4}(a^2 \operatorname{tg}\alpha + b^2 \operatorname{tg}\beta + c^2 \operatorname{tg}\gamma),$$

značí-li a, b, c délky stran daného trojúhelníka.

Mimo to jest

$$\sin\alpha = \frac{2\Delta}{bc}, \quad \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

pročež

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4\Delta}{b^2+c^2-a^2};$$

obdobné hodnoty mají $\operatorname{tg}\beta$ a $\operatorname{tg}\gamma$.

Jest tedy

$$\Delta' = \Delta\left(1+\frac{a^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2-b^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2-c^2}\right).$$

Sloučivše členy v závorce, najdeme

$$\Delta' = \Delta \cdot \frac{4a^2b^2c^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

a vrátivše se ku vzorcům hořejším:

$$\Delta' = \frac{\Delta}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Poznámka. Je-li r poloměr kružnice opsané trojúhelníku abc, O' pak obvod trojúhelníka $a'b'c'$, jest

$$O' = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\cos\beta} + \frac{c}{\cos\gamma} = \frac{\Delta}{r\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Zdeněk J. Sláma* ze VII. tř. české r. v Praze, *Frant. Mosler* z VIII. tř. gymn. v Opavě, *Karel Rosa* a *Ant. Zelinka* z VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze, *Josef Čeřovský* ze VII. třídy r. v Hradci Králové, *Jos. Malíř* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. g. v Praze, *Ant. Maryánek*, *Frant. Očadlík*, *Jan Matoušek* ze VII. tř., *Lad. Janík* a *Alois Liška* z VIII. tř. gymn. v Kroměříži.

Řešeni úlohy 21.

(Zaslal p. *Bohumil Vávra*, stud. VIII. tř. g. ve Spálené ulici v Praze.)

Jsou-li x, y poloměry základen, jest obsah kužele komolého

$$K = \frac{\pi v}{3}(x^2 + xy + y^2)$$

a obsah dvojkužele

$$K' = \frac{\pi v}{3}(x^2 - xy + y^2),$$

tedy dle podmínky v úloze

$$\frac{K}{K'} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{79}{37}. \tag{1}$$

Plášť kužele komolého jest

$$P = \pi\,(x + y)\sqrt{(x - y)^2 + v^2}$$

a plášť dvojkužele

$$P' = \pi\,\frac{x^2 + y^2}{x + y}\sqrt{(x + y)^2 + v^2},$$

pročež

$$\frac{P}{P'} = \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}\sqrt{\frac{(x - y)^2 + 225}{(x + y)^2 + 225}} = \frac{34}{29}. \tag{2}$$

Rovnici (1) lze upraviti na podobu

$$21y^2 - 58xy + 21x^2 = 0,$$

ze které za podmínkou $x > y$ plyne $y = \frac{3}{7}x$. Dosadivše tuto hodnotu do rovnice (2), obdržíme

$$\sqrt{\frac{16x^2 + 11025}{100x^2 + 11025}} = \frac{17}{25}$$

a vypočítáme odtud $x = 14$, načež $y = 6$. Poloměry základen jsou tedy 14 *cm* a 6 *cm*.

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Zdeněk J. Sláma* ze VII. tř. české r. v Praze, *Alois Liška*, *Ladislav Janík* z VIII. třídy, *Jan Matoušek*, *Ant. Marydánek* a *Frant. Očadlík* ze VII. tř. g. v Kroměříži, *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. g. v Praze, *Josef Čeřovský* ze VII. tř. realky v Hradci Králové, *Jos. Malíř* z VIII. tř. g. v Chrudimi a *Karel Rosa* z VIII. tř. g. Městské stř. šk. v Praze.

Řešení úlohy 22.

(Zaslal p. *Jos. Klobouček*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

Znamená-li e lineární výstřednosť ellipsy

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

budou rovnice průvodičů hledaného bodu (ξ, η),

$$y = \frac{\eta}{\xi + e}(x + e) \quad \text{a} \quad y = \frac{\eta}{\xi + e}(x - e);$$

aby stály na sobě kolmo, musí býti

$$\frac{\eta}{\xi + e} = \frac{e - \xi}{\eta} \quad \text{čili} \quad \xi^2 + \eta^2 = e^2.$$

Žádaný bod jest tedy průsečíkem dané ellipsy se soustřednou kružnicí o poloměru e.

Z obou těchto rovnic dostaneme pro souřadnice hledaného bodu

$$\xi = \pm\frac{a}{e}\sqrt{a^2 - 2b^2} \quad \text{a} \quad \eta = \pm\frac{b^2}{e}.$$

Jsou-li ϱ_1 a ϱ_2 průvodiče tohoto bodu, jest plocha jimi určeného trojúhelníka

$$p = \frac{1}{2}\varrho_1\varrho_2 = \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{e^2\xi^2}{a^2}\right),$$

a vzhledem ξ,

$$p = \frac{1}{2}(a^2 - a^2 + 2b^2) = b^2.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Zdeněk J. Sláma* ze VII. tř. české r. v Praze, *Ant. Starosta* ze VII. tř. r. v Brně, *Karel Rosa* a *Ant. Zelinka* z VIII. tř. g. Městské střední školy v Praze, *Josef Čeřovský* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Karel Fritsche* z VIII. tř. gymn. v Příbrami, *Miloš A. Švácha* a *Josef Malíř* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Vlad. Janků* z VIII. tř. akad. gymn. v Praze, *Lad. Janík* a *Alois Liška* z VIII. tř. g. v Kroměříži, *Boh. Vávra* z VIII. tř. gymn. ve Spálené ulici v Praze a *Frant. Mosler* z VIII. tř. g. v Opavě.

Věstník literární.

Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Essai d'une théorie générale. Règles pratiques. Exemples d'application, *par Maurice d'Ocagne, ingénieur des ponts et chaussées. Paris 1891.*

Aby se uspořilo času a práce, jichž vymáhá počtářské řešení rozmanitých úloh praktického života, sestrojují se vedle tabulek numerických i *tabulky grafické*, jimiž od veličin daných k veličinám neznámým dospíváme pouhým pohledem neb aspoň prostou manipulací. Takové grafické tabulky, *abaky,* výhodné zvláště v praxi technické, založeny jsou na různých relacích měřických; auktor spisu svrchu jmenovaného pak podnikl srovnavací studium jednotlivých method k tomu konci, aby vyvinul obecné zásady, z nichžto všeliké ony spůsoby vyplývají. Předložený spis snaží se tedy podati jakous obecnou theorii abaků, doloženou přiměřenými příklady; theorii tu zove auktor *nomografií* ($\nu \acute{o} \mu o \varsigma$ = zákon) přihlédaje k tomu, že tu jde o grafické vyjadřování zákonů, jimiž jsou vázány dané veličiny proměnné — zákonů, jichž analytickým výrazem jsou rovnice.

V kapitole I. obírá se rovnicemi, jež neobsahují více než 3 proměnné. Obsahuje-li rovnice čáry mimo souřadnice (Carte-