František Josef Studnička

Odvození nových vzorců součtových pro řady smíšené

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 21 (1892), No. 3, 113--119

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109218

Odvození nových vzorců součtových pro řady smíšené.

Napsal

prof. dr. F. J. Studnička.

Představují-li číselné hodnoty

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

arithmetickou řadu stupně m-tého, určenou veličinami rozdílovými

$$\Delta^0 a_1, \Delta^1 a_1, \Delta^2 a_1, \ldots, \Delta^m a_1,$$

takže všeobecně platí o členu n-tém

$$a_n = \sum_{k=0}^{m} (n-1)_k \Delta^k a_1, \qquad (1)$$

a podobně o součtu prvních n po sobě jdoucích členů, symbolem s_n^m vyjádřeném,

$$s_n^m = \sum_{k=0}^{m} (n)_{k+1} \Delta^k a_1, \qquad (2)$$

jest všeobecný člen řady smíšené

$$a_1, a_2 q, a_3 q^2, \ldots, a_n q^{n-1}$$

určen patrně vzorcem

$$u_n = a_n q^{n-1}, \qquad (3)$$

kdežto součet těchto n po sobě jdoucích členů jest vyjádřen přímo výrazem

$$S_n^m = \sum_{k=1}^{n} a_k q^{k-1}, \qquad (4)$$

při čemž nutno pravé straně dáti tvar, jaký se vyskytuje u vzorce (2), aby se i v tomto případě složitém jevil součet býti funkcí veličin

$$m,\ n,\ q,\ \Delta^k a_1,$$

což dosud, jakož známo, nebylo ještě přímo provedeno, jelikož se domáháno součtu tohoto způsobem nepřímým,

$$S_n^m = (\alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \ldots + \alpha_m n^m)\, q^n - \alpha_0$$

kladoucím a hodnoty neurčitých koëfficientů

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$$

pomocí vzorce (1) zvláště vyhledávajícím.

A tu vede k cíli výsledek při řešení téhož úkolu obdržený, kdež však činitelové a_k představují čísla *obrazcová* neboli *figurovaná*, takže všeobecně platí

$$a_k = (m + k - 1)_m, \tag{5}$$

avedeme-li i zde takovéto označení koëfficientů binomických.

Pro tento případ zvláštní platí totiž o součtu

$$\sigma_n^m = \sum_{k=1}^{n} (m + k - 1)_m q^{k-1}, \tag{6}$$

akož se přímo snadno dokáže, *)

$$\sigma_r^k = \frac{1 - q^r}{p^{k+1}} - \frac{q^r}{p^k} \sum_{h=1}^{k} (r + h - 1)_h p^{h-1}, \tag{7}$$

značí-li k vůli krátkosti

$$p = 1 - q, \tag{8}$$

takže platí patrně pro $k = 0$, $r = n$,

$$\sigma_n^0 = \frac{1 - q^n}{p}, \tag{9}$$

což i přímo se jednoduše odvozuje pro součet řady geometrické.

Abychom pak řešili úkol všeobecný, užijme napřed postupně vzorce (1), takže obdržíme tu především

*) Viz *Studnička* „Všeobecné tvarosloví algebraické", pag. 36.

$$a_1 = a_1,$$
$$a_2 = a_1 + \Delta a_1,$$
$$a_3 = a_1 + 2\Delta a_1 + \Delta^2 a_1,$$
$$a_4 = a_1 + 3\Delta a_1 + 3\Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$a_n = a_1 + (n-1)_1 \Delta a_1 + (n-1)_2 \Delta^2 a_1 + \ldots,$$

načež násobíme-li relace tyto, jak po sobě jdou, mocninami stálého poměru příslušného

$$q^0,\ q^1,\ q^2,\ \ldots,\ q^{n-1}$$

a sečteme-li na obou stranách, obdržíme

$$S_n^m = \overset{0}{\sigma}_n a_1 + q\overset{1}{\sigma}_{n-1} \Delta a_1 + q^2 \overset{2}{\sigma}_{n-2} \Delta^2 a_1 + \ldots + q^m \overset{m}{\sigma}_{n-m} \Delta^m a_1,$$

anebo ve kratší formě symbolické

$$S_n^m = \sum_{k=0}^{m} \sigma_{n-k}^k q^k \Delta^k a_1, \tag{10}$$

kdež koëfficienty σ_{n-k}^k podlé vzorce (7) jednotlivě možná přímo stanoviti. Obdržíť se na př.

$$\sigma_{n-1}^1 = \frac{1 - n_1 q^{n-1} + (n-1)_1 q^n}{(1-q)^2},$$
$$\sigma_{n-2}^2 = \frac{1 - n_2 q^{n-2} + n(n-2) q^{n-1} - (n-1)_2 q^n}{(1-q)^3},$$
$$\sigma_{n-3}^3 = \frac{1 - n_3 q^{n-3} + (3n_3 - n_2) q^{n-2} - [3n_3 - n(n-2)] q^{n-1} + (n-1)_3 q^n}{(1-q)^4},$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

z čehož poznáváme, že pravá strana vzorce (7) představuje se zlomkem, jehož jmenovatelem jest pro $k = m$, $r = n - m$,

$$(1-q)^{m+1},$$

kdežto čitatel jest tvaru

$$1 - k_0 q^{n-m} + k_1 q^{n-m+1} - \ldots + (-1)^{n-1} k_{n-m} q^n,$$

takže všeobecně tu platí

$$k_0 = n_m, \quad k_{n-m} = (n-1)_m,$$
$$1 = k_0 - k_1 + k_2 - \ldots + (-1)^m k_{n-m}.$$

Že možná vyjádřiti zvláštní součet σ^k_{n-k} derivací veličiny σ^0_n pomocí vzorce

$$\sigma^k_{n-k} = \frac{1}{k!} D^k_q \sigma^0_n, \tag{11}$$

poznáme velmi snadno, derivujeme-li podle q postupně na obou stranách původní relace

$$\sigma^0_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1};$$

budeť tu patrně, vyloučíme-li po každé vyskytující se faktory společné,

$$\begin{aligned}
D\sigma^0_n &= 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + (n-1)_1 q^{n-2} = \sigma^1_{n-1} \\
D^2\sigma^0_n &= 2![1 + 3q + 6q^2 + \ldots + (n-1)_2 q^{n-3}] = 2!\,\sigma^2_{n-2} \\
D^3\sigma^0_n &= 3![1 + 4q + 10q^2 + \ldots + (n-1)_3 q^{n-4}] = 3!\,\sigma^3_{n-3} \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
D^k\sigma^0_n &= k![1 + (k+1)_1 q + \ldots + (n-1)_k q^{n-k+1}] = k!\,\sigma^k_{n-k},
\end{aligned}$$

z čehož plyne přímo vzorec (11).

A jak se konečně vytčená tato derivace pohodlně ustanoví, pozná se snadno, užije-li se na místo zlomkového tvaru vzorce původního

$$y = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

relace z něho plynoucí

$$q^n - 1 + (1 - q)\,y = 0$$

a derivuje-li se pak k-kráte po sobě; budeť tu se zřetelem ku vzorci (8)

$$\begin{aligned}
&q^n - 1 + py = 0, \\
&nq^{n-1} \quad - y + py' = 0, \\
&n_2 q^{n-2} \qquad - y' + p\frac{y''}{2} = 0, \\
&n_3 q^{n-3} \qquad\quad - \frac{y''}{2} + p\frac{y'''}{3!} = 0, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&n_k q^{n-k} \qquad\qquad - \frac{y^{(k-1)}}{(k-1)!} + p\frac{y^{(k)}}{k!} = 0.
\end{aligned}$$

Vyloučíme-li tedy z této řady $(k+1)$ relací takto vzniklých veličiny, jichž jest co do počtu k, a sice

$$y,\ y',\ \frac{y''}{2},\ \ldots,\ \frac{y^{(k-1)}}{(k-1)!},$$

a řešíme-li pak podlé $y^{(k)}$, zjednáme si po krátké transformaci

$$\frac{y^{(k)}}{k!} = \sigma^k_{n-k} = \frac{(-1)^{k+1}}{p^{k+1}} \begin{vmatrix} q^n-1, & p, & 0, \ldots, & 0 \\ n_1 q^{n-1}, & -1, & p, \ldots, & 0 \\ n_2 q^{n-2}, & 0, & -1, \ldots, & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ n_k q^{n-k}, & 0, & 0, \ldots & -1 \end{vmatrix}, \quad (12)$$

takže pomocí tohoto nového vzorce determinantního se obdrží místo (10) krátce

$$S^m_n = \sum_{k=0}^{m} q^k \delta_{k+1} \Delta^k a_1, \quad (13)$$

označíme-li pravou stranu vzorce (12) jednoduchým δ_{k+1}.

Porovnání determinantu tohoto s tvarem determinantním, jakým se i vzorec (7) vyjadřuje,*) poučuje nás nejlépe o mnohotvárnosti výrazů, kteréž při řešení úkolu zde svrchu vytknutého jsou prostředníky.

Jak ze složení vzorce (10) a (13) patrno, jest řada členů na pravé straně podlé differencí arithmetické řady postupujících tím kratší, čím nižšího stupně řadu představují součinitelové a_k, takže v konkretních případech jen třeba se zřetelem k určité dané hodnotě čísla m zjednati si hodnoty ze vzorce (12) plynoucí a dosaditi je do vzorce (13).

Konečně možná tu poznamenati, že smíšená řada přejde v arithmetickou, položí-li se

$$q = 1,$$

ve kterémžto případě pak platí

$${}^{q}/{}^{1}\,\sigma^k_{n-k} = \frac{0}{0} = (n)_{k+1},$$

*) ibid. pag. 35.

jakož možná hned s předu tvrditi aneb i spůsobem obvyklým odůvodniti, načež se vzorec (10) promění přímo v (2); a taktéž možná řadu arithmetickou stupně m-tého

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

proměniti ve smíšenou

$$b_1, b_2 q, b_3 q^2, \ldots, b_n q^{n-1},$$

zvolí-li se určitá hodnota pro q a položí-li se pak

$$b_k = \frac{a_k}{q^{k-1}},$$

jakož na první pohled patrno.

Určena-li na př. čtyřmi hodnotami číselnými

$$1, 4, 12, 28$$

arithmetická řada stupně třetího a položíme-li

$$q = 2,$$

stane se smíšenou a sice

$$1, 2.2, 3.2^2, {}^7/_2 . 2^3,$$

takže příslušná řada koëfficientů b_k bude

$$1, 2, 3, 3^1/_2,$$

načež se snadno obdrží

$$a_1 = 1, \Delta a_1 = 1, \Delta^2 a_1 = 0, \Delta^3 a_1 = -{}^1/_2$$

a tedy bude pro $n = 6$ napřed

$$\sigma_6^0 = 63, \sigma_5^1 = 129, \sigma_3^3 = 49,$$

takže znásobíme-li tyto hodnoty, jak po sobě jdou, koëfficienty vzorcem (10) naznačenými

$$1, 2.1, 8.-{}^1/_2,$$

obdržíme co součet prvních šestí členů řady této konečně

$$S_6^3 = 63 + 2.129 - 4.49 = 125,$$

což ostatně i přímo lze krátce stanoviti. Výhoda vzorce součtového jeví se v praksi zřejmě při velkých hodnotách ukazovatele n, kde přímé sečtení řadových členů stává se obtížným.

O jednoduché methodě k určení fazového rozdílu mezi oběma hlavními složkami ve světle odraženém.

Píše

Dr. **Fr. Koláček,**

prof. při c. k. české universitě v Praze.

(Předneseno v týd. schůzi Jednoty Č. mathem. dne 30. ledna 1892.)

Děj odrazu doprovázen jest změnami faze a intensity, jichž vysvětlení tvoří obsah staroslavného problemu reflexe a lomu, jejž s úspěchem, do jisté míry dosud nepřekonaným ponejprv rozřešil Fresnel. Theorie jeho podává, aspoň v hlavních obrysech správný obraz zjevů skutečných, jde-li o odraz na hmotách úplně průhledných. Avšak již zde ukazují se odchylky od zákonů theoretických, které tím ostřeji vystupujíce při odraze na hmotách neprůhledných (kovech) poukazují k nedokonalosti jejich. Methody experimentální, jimiž se určuje jedno charakteristikon těchto zjevů, totiž rozdíl ve fazi obou komponent, jsou vysoce vyvinuty. Nejobecněji užívaný přístroj Jaminův, křemenový kompensator, jímž se rozdíl onen tak kompensuje, že z elliptického světla lineárné povstává, připouští velice exaktní určení veličiny řečené, nedovoluje však o tom rozhodnouti, zdali se snad faze každé z komponent *o sobě* s incidenčním úhlem nemění. Teprve Wernicke ukázal novou methodou, jež na principu interference založena jest, že se faze světla v rovině dopadu polarisovaného vůbec s úhlem dopadu nemění, takže zmíněný rozdíl fazí a změny jeho s incidencí spadají úplně na vrub světla kolmo polarisovaného. Účelem této přednášky jest, poukázati k jednoduché methodě, kterou se jmenovaný rozdíl měřiti dá a podati krátce výsledek prozatimných více orientačních měření, jež jsem před 3 lety (v Brně) provedl. Ač mám za to, že uvedená methoda,