Václav Jeřábek

O orthokonchoidě

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 5, 523--531

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109213`

O orthokonchoidě.

Napsal **V. Jeřábek.**

1. Buď dána přímka A_1 a mimo ni ležící bod e v rovině π nákresnou znázorněné (obr. 1.). Bodem e vedený kterýkoliv paprsek protíná A_1 v bodě m_1; postavme v tomto bodě kolmici na em_1 a nanesme na ni stálou délku $\overline{m_1n_1} = \overline{m_1n_1'} = l$. Je-li m_1 pohyblivým bodem přímky A_1, vytvoří body n_1, n'_1 křivku N_1, kterou nazval Neuberg orthokonchoidou*).

Je-li $\overline{eo} = a$ vzdálenost bodu e od přímky A_1, a jsou-li A_1, eo osami souřadnými X, Y, jest

$$(y^2 + ay - l)^2 = x^2 (l^2 - y^2)$$

rovnicí orthokonchoidy. Její dvojné body d, d' mají na ose Y pořadnice $y = -\frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + l^2})$, bod d' pod osou X jest isolovaným bodem dvojným. Kromě toho má křivka třetí dvojný bod úběžný na ose X, jehož tečny (asymptoty) mají od osy X vzdálenost l.

Nyní ukážeme, že orthokonchoida N_1 jest průmětem pronìku hyperbolického paraboloidu s plochou válcovou.

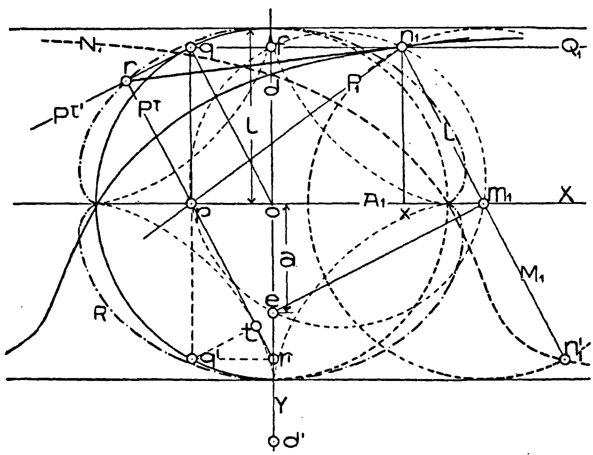
K těmto plochám dospějeme těmito úvahami: Především jest patrno, že přímka $m_1n_1 \equiv M_1$ obaluje parabolu, jejímž ohniskem jest bod e a vrcholovou tečnou přímka A_1. Myslíme-li si bodem o vedenou přímku A tak, aby se svým průmětem A_1 tvořila úhel $A_1oA = \alpha$, na př. $\alpha = 45^{\circ}$, pak průmětu m_1 přináleží na přímce A bod m, a vedeme-li tímto bodem přímku M rovnoběžně s M_1, která je též rovnoběžna s průmětnou π, bude geom. místem přímek M hyperbolický paraboloid (M), jemuž náleží přímka A i osa X. Položme bodem m rovinu $\mu \parallel \pi$ a mysleme si v ní kruh (m, l) o středu m a poloměru l tak, aby jeho průmětem byl kruh (m_1, l). Geom. místem kruhu (m, l) jest plocha válcová, jejíž osou jest A a stopou kruh (o, l).

*) Dr. H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, str. 69.
Viz brožuru „Sur un nouveau curvigraphe“ par V. Lebeau et „Sur les lignes tracées par le curvigraphe V. Lebeau“ par J. Neuberg. Liége (E. Cloubert), 1904. Extrait des Mémoires de la Société royale de Sciences de Liége, 3e série, t. V, 1904, pag. 30.

Přímka M a kruh (m, l) mají své průměty v M_1 resp. (m_1, l), pročež jsou průsečíky n_1, n'_1 průmětu M_1 s kružnicí (m_1, l) průměty bodů n, n' a N_1 průmětem křivky N. Tedy:

Orthokonchoida jest průmětem proniku hyperbolického paraboloidu s plochou válcovou.

Tečna křivky N_1. Položíme-li v bodě n rovinu tečnou τ k hyp. paraboloidu a rovinu τ' k ploše válcové, jest průsečnice rovin tečných τ, τ' tečnou křivky N v bodě n a její průmět tečnou průmětu N_1.



Obr. 1.

Stopa P^τ roviny τ je rovnoběžna s površkou $M \parallel M_1$, jde nám tedy ještě o sestrojení jejího jednoho bodu. Bodem n jdoucí druhá površka P hyp. paraboloidu má svůj průmět v P_1 a svou stopu v bodě p, v němž P_1 seče površku X hyp. paraboloidu, ležící v průmětně π. Průměty P_1, M_1 jsou tečnami zdánlivého obrysu paraboloidu, který je parabolou určenou ohniskem e a vrcholovou tečnou X. Body em_1n_1p leží v téže kružnici, která prochází ještě druhým bodem f osy Y. Buď $n_1x \perp X$ pořadnicí bodu n_1; ježto en_1 je průměrem kružnice em_1n_1p, stojí její tětiva fn_1 kolmo na ose Y a má směr osy X.

Lichoběžník pm_1n_1f je vepsán do kruhu, jsou tedy $\overline{pf}$ a $\overline{m_1n_1}$ jeho stejná ramena, a že jejich orth. průměty na podstavě pm_1 jsou též stejny, je $op = m_1x$. Z toho jde jednoduché sestrojení stopy p površky P, jakož i stopy P^{τ} roviny tečné τ, která bodem p prochází a je rovnoběžna s površkou $M \| M_1$.

Zbývá nám sestrojiti ještě stopu $P^{\tau'}$. Již dříve jsme se zmínili, že plocha válcová má svou stopu v kruhu (o, l) a osu v přímce A. Vedeme-li tedy bodem n přímku Q plochy válcové, bude její průmět $Q_1 \| X$ procházeti body n_1, f. Rovina přímkami M, Q proložená obsahuje osu A a protíná průmětnu π v přímce, na níž je poloměr oq kruhové podstavy (o, l) rovnoběžný s $\overline{m_1 n_1}$. Koncový bod q řečeného poloměru, ležící též na Q_1, je stopou površky Q, a tečna kruhu (o, l) v bodě q dává stopu $P^{\tau'}$ roviny tečné τ'. Nyní již vysvítá, že spojnice bodu n_1 s průsečíkem $(P^{\tau}P^{\tau'}) \equiv r$ je hledanou tečnou křivky N_1. Povšimnutí zasluhuje, že trojúhelníkem pravoúhlým pqr, jehož přeponou je pořadnice pq bodu q a jednou odvěsnou tečna qr kruhu (o, l) v bodě q, lze přímo sestrojiti druhý bod r tečny $n_1 r$.

Vedeme-li v kruhu (o, l) tětivu $\overline{qpq'}$, a prodloužíme-li $\overline{rp}$ k bodu r' osy Y, bude $pq = q'p = r'o$; tím vychází na jevo, že body p, r' jsou paty kolmic spuštěných s bodu q' kružnice (o, l) na osy X, Y. Tedy: *Stopy P^{τ} rovin tečných hyp. paraboloidu v bodech n křivky N obalují astroidu mající své body úvratu v bodech, v nichž osy X, Y protínají kružnici (o, l).*

Je-li t patou kolmice spuštěné s bodu q' na tečnu pr' astroidy, jest bod t, jak známo, bodem dotyčným této tečny. Ve shodných trojúhelnících pqr, $pq't$ strana $pr = pt$. Pohybuje-li se bod n po křivce N, popíše jeho tečna nr na průmětně π křivku R, jejíž body r jsou souměrny k bodům t astroidy dle bodů p, v nichž tečny tp protínají osu X. Křivka R jeví se zároveň jakožto geom. místo vrcholu r pravého úhlu trq, jehož jedno rameno dotýká se astroidy a druhé kruhu (o, l). Normála křivky R v bodě r půlí tedy úsečku tq, a na tom zakládá se strojení normál i tečen křivky R.

Buďtež X, Y osami pravoúhlé soustavy souřadnic. Abychom našli rovnici geom. místa bodu $r\ (x, y)$, znamenejme r' [1]) orth. průmět bodu r na ose X a úhel $poq = \varphi$. Bude tedy

$$x = \overline{op} + \overline{pr'}, \quad y = \overline{r'r}.$$

---

[1]) V obrazci není bod r' vyznačen.

Snadno najdeme, že

$$\overline{op} = \overline{oq} \cos \varphi,$$
$$\overline{pr'} = \overline{pr} \cos \varphi = \overline{pq} \sin \varphi \cos \varphi = \overline{oq} \sin^2 \varphi \cos \varphi,$$
$$\overline{r'r} = \overline{pr} \sin \varphi = \overline{pq} \sin^2 \varphi = \overline{oq} \sin^3 \varphi,$$

pročež

$$\left.\begin{aligned} x &= l \cos \varphi \, (1 + \sin^2 \varphi) \\ y &= l \sin^3 \varphi \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Vyloučíme-li φ z těchto rovnic, dostaneme rovnici křivky R. K tomu cíli umocněme je na druhou a sečtěme; bude pak po několika redukcích

$$x^2 + y^2 - l^2 = l^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \qquad (2)$$

pročež

$$(x^2 + y^2 - l^2)^3 = l^6 \sin^6 \varphi \cos^6 \varphi,$$

a že

$$\sin^3 \varphi = \frac{y}{l},$$

obdržíme

$$(x^2 + y^2 - l^2)^3 = l^4 y^2 \cos^6 \varphi. \qquad (3)$$

První z rovnic (1) upravme takto:

$$x^2 = l^2 \cos^2 \varphi \, (2 - \cos^2 \varphi)^2 = l^2 \cos^2 \varphi \, (4 - 4 \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi),$$

se zřetelem k rovnici (2)

$$x^2 = 4x^2 + 4y^2 - 4l^2 + l^2 \cos^6 \varphi,$$

odkudž

$$l^2 \cos^6 \varphi = 4l^2 - 3x^2 - 4y^2.$$

Z rovnice této a (3) obdržíme konečně rovnici hledanou

$$(x^2 + y^2 - l^2)^3 = l^2 y^2 (4l^2 - 3x^2 - 4y^2).$$

Křivka R je tedy stupně šestého.

2. Buďtež dány dvě kolmé přímky X, Y (obr. 2.) v bodě o' se protínající; na první z nich zvolme pevný bod o, a nanesme od bodů o, o' na přímky X, Y stejné délky $\overline{om_1}$, $\overline{o'm'_1}$. Kruh (m_1, l) o středu m_1 a stálém poloměru l protíná spojnici $m_1 m'_1$ v bodech n_1, n'_1, *jejichž* geom. místem je *konchoida Dürerova* [1]).

[1]) Dr. *H. Wieleitner*, Spezielle ebene Kurven, str. 68; *Loria, Schütte*, Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, str. 211, 1. vyd.

Pohyblivé body m_1, m'_1 vytvořují shodné řady bodové $X(m_1 \ldots)$, $Y(m'_1 \ldots)$, pročež obaluje přímka $m_1 m'_1 \equiv M_1$ parabolu dotýkající se přímky X v bodě o a přímky Y v bodě o'', tak že oba tyto body jsou od bodu o' stejně vzdáleny. Střed e úsečky $\overline{oo''}$ je ohniskem a přímka V_1 kolmo půlící úsečku $o'e$ tečnou vrcholovou paraboly. Bodem n_1 jdoucí druhá tečna P_1 paraboly utíná na X, Y délky stejné $op = o'p'$. Je-li f průsečíkem tečen M_1, V_1, jest úhel efn_1 pravý, lze tedy konchoidu Dürerovu obdobně sestrojiti jako orthokonchoidu, s tím však rozdílem, že na rameno M_1, které obaluje parabolu, nanášíme stálou délku l od bodu $(M_1 X) \equiv m_1$, ne však od průsečíku f přímky M_1 s vrcholovou tečnou V_1 paraboly.

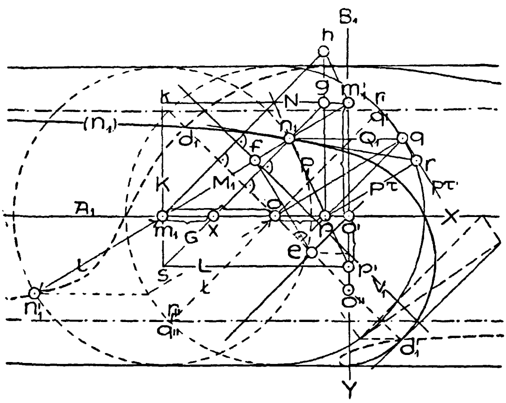
Abychom poznali, že křivka (n_1) je též průmětem proniku (n) jistého hyp. paraboloidu s plochou válcovou, pokládejme rovinu XY za průmětnu π, a bodem o mysleme si vedenou přímku A svírající se svým průmětem $A_1 \equiv X$ stálý úhel $A_1 o A = \alpha$, na př. $\alpha = 45^0$. Dále veďme bodem o' přímku B, jejíž průmět $B_1 \equiv Y$, kolmo k X a odchýlenou o úhel $B_1 o' B = \alpha = 45^0$ od průmětny π. Přímky A a B jsou tak vytknuty, že do zvolených bodů m_1, m'_1 promítají se jejich body m, m' o stejných výškách $m_1 m$, $m'_1 m'$ nad průmětnou π. Je tedy přímka $M \equiv mm'$ rovnoběžna s průmětnou, a její průmět připadá do M_1. Geom. místem přímek M je hyperbolický paraboloid, jehož zdánlivým obrysem je parabola o ohnisku e a vrcholové tečně V_1 [1]). Položme přímkou M rovinu μ rovnoběžně s π a vytkněme v ní kruh (m, l), mající svůj průmět v kruhu (m_1, l). Geom. místem kruhů (m, l) je plocha válcová o ose A a kruhové stopě (o, l). Ježto površka M a kruh (m, l) leží v téže rovině μ, sekou se v bodech n, n' křivky (n), v níž hyp. paraboloid a plocha válcová se pronikají. Avšak body n, n' mají své průměty v průsečných bodech n_1, n'_1 průmětů M_1 a (m_1, l), a že křivka (n) jeví se jakožto geom. místo bodů n, n', jest (n_1) průmětem křivky (n). Pročež: *Křivka* (n_1) *je průmětem proniku* (n) *hyp. paraboloidu s plochou válcovou.*

Tečnu křivky (n_1) v některém bodě n_1 sestrojíme jakožto průmět průsečnice rovin tečných τ, τ' položených v bodě n k hyp. paraboloidu, resp. k ploše válcové.

---

[1]) V obrazci není parabola sestrojena.

Počítáme-li přímku M k první soustavě površek hyp. paraboloidu, pak bodem n prochází jeho přímka druhé soustavy mající svůj průmět v $n_1 p \equiv P_1$, a že površka X první soustavy leží v průmětně π, má na ní površka P svou stopu v průsečíku $(P_1 X) \equiv p$. Vedeme-li tedy touto stopou rovnoběžku $P^\tau \,||\, M_1 \,||\, M$, obdržíme stopu roviny tečné τ. Povrchová přímka Q plochy válcové, bodem n jdoucí, má svůj průmět Q_1 v rovnoběžce vedené bodem n_1 k A_1 a svou stopu v průsečíku q kružnice (o, l) s Q_1, který leží v pravo, nebo v levo od průmětu n_1, je-li n nad, nebo pod průmětnou π. Dá nám tudíž tečna $P\tau'$ v bodě q kruhové



Obr. 2.

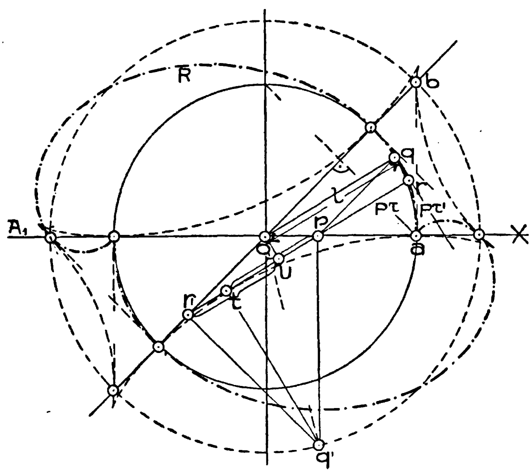
stopy (o, l) plochy válcové stopu roviny tečné τ'. Ježto v průsečíku $(P\tau P\tau') \equiv r$ má tečna, t. j. průsečnice nr rovin τ, τ' svou stopu, jest spojnice $n_1 r$ tečnou křivky (n_1) v bodě n_1.

Konstrukci tuto, jak uvidíme, lze ještě zjednodušiti. Za tím účelem otáčejme paprsek P_1 okolo bodu p', pak úsečka $pg = o'm'_1$ a kolma ku X posunuje se rovnoběžně s Y, a její koncový bod šine se po přímce $N \,||\, X$ jdoucí bodem m'_1. Vznikne tedy svazek paprskový $p'(P_1 \ldots)$, kterým promítá se řada bodová $M_1 (n_1 \ldots)$ do řady $X (p \ldots)$ a tato ve směru osy Y do řady $N (g \ldots)$. Je tedy řada $M_1 (n_1 \ldots) \,\pi\, X (p \ldots)$ $\pi N (g \ldots)$. Myslíme-li si paprsek P_1 kolem p' otočený do přímky Y, sjednotí se projektivně sdružené body n_1, g řad $M_1 (n_1 \ldots) \,\pi N (g \ldots)$ s průsečíkem $(M_1 N) \equiv m'_1$, protože pak $pg \equiv o'm'_1$. Jsou tedy tyto řady perspektivné mající za promítku svazek s $(K, L, \ldots G \ldots)$ o středu s, v němž sekou paprsky K, L stojící kolmo v bodech m_1, p' resp. na X, Y. Neboť přijde li bod p po přímce X do bodu m_1, dále pak do jejího bodu úběžného, stane se v prvním případě trojúhelník pgn_1 úsečkou $m_1k = pg$ kolmou ku X, kdežto v případě druhém zapadnou body p, g ve směru přímky X do nekonečna, při čemž bod n_1 po M_1 přijde do rovnoběžky vedené bodem p' s přímkou X.

Nyní dokážeme, že paprsek $gs \equiv G$ stojí kolmo na oo''. K tomu cíli protněme přímku pg rovnoběžkou, vedenou vrcholem m'_1 obdélníka $o'm_1sp'$ s úsečkou $\overline{pp'}$, v bodě h; tím vznikne trojúhelník pravoúhlý gm'_1h a shodný s trojúhelníkem $o'pp'$, tedy $gh = \overline{p'o'} = sm_1$. Čtyřúhelník $sghm_1$ má protější strany rovnoběžny a stejny, pročež $gs \parallel \overline{hm_1}$ a $\overline{gs} = \overline{hm_1}$. Víme, že $\overline{om_1} = \overline{o'm'_1}$, $\overline{op} = \overline{o'p'}$, tedy $\overline{pm_1} = \overline{p'm'_1} = \overline{ph}$. Příslušné odvěsny rovnoramenných trojúhelníků pravoúhlých pm_1h, $o'oo''$ stojí na sobě kolmo, a že $gs \parallel hm_1$, je též $gs \perp oo''$, což nám bylo dokázati. Příčka gx, jsouc rovnoběžna s přeponou hm_1 pravoúhlého trojúhelníka rovnoramenného m_1ph, utíná na jeho odvěsnách úseky stejné $\overline{px} = \overline{pg} = \overline{o'm'_1} = \overline{om_1}$. Odečteme-li od stejných délek $\overline{om_1}$, $\overline{px}$ jejich společnou délku $\overline{ox}$, bude $m_1x = \overline{op}$. Shodné trojúhelníky m_1xn_1, opq $(m_1x = \overline{op}$, $\overline{m_1n_1} = \overline{oq}$, úhel $xm_1n_1 = poq)$ mají stejnolehlé strany $\overline{m_1n_1}$, $\overline{oq}$ rovnoběžny, jsou tedy i jejich příslušné strany $\overline{xn_1}$, $\overline{pq}$ spolu i s m_1h rovnoběžny, a poněvadž m_1h stojí kolmo na přímce oo'', jsou k ní též kolmy xn_1 a pq. Je tedy přepona $\overline{pq}$ trojúhelníku pravoúhlého prq kolma na oo'' a odvěsna pr na tečně qr. Na tom zakládá se jednoduchá konstrukce bodu r a tím i tečny rn_1. Týmž způsobem je též sestrojena jedna tečna v dvojném bodě d'_1 křivky (n_1).

Přijde-li oq do poloměru oq' nebo oq'' kolmého k oo'', sjednotí se tečna M_1 paraboly s její tečnou úběžnou, bod p přijde do bodu o, a tečna P_1 stane se tečnou X paraboly v bodě o. Bod n_1 vzdálí se při tom po křivce (n_1) ve směru osy X dvakráte do nekonečna, a body q, r splynou v bod jediný $q' \equiv r'$, nebo $q'' \equiv r''$. Rovnoběžky, vedené body q', q'' s přímkou X, jsou asymptoty křivky (n_1). Má tedy křivka jeden dvojný bod v nekonečnu, druhé dva její dvojné d_1, d'_1 jsou na přímce oo''.

Značí-li r' průsečík stopy $P\tau$ (obr. 3.) s přímkou jdoucí středem o kruhu (o, l) rovnoběžně s osou paraboly ob a tedy rovnoběžně s pq, pak v rovnoběžníku $pqor'$ strana pr' rovná se stálému poloměru $\overline{oq} = l$; pročež obaluje $P\tau$ šikmou astroidu. Postavme v bodě p kolmici na osu X a v bodě r' na ob, kolmice tyto protnou se v bodě q' na kružnici o středu o a poloměru ob, jenž jest přeponou rovnoramenného trojúhelníku pravoúhlého aob, jehož odvěsna oa je poloměrem kruhu (o, l). Spusťme



Obr. 3.

s bodu q' kolmici na $P\tau$, její pata t je bodem dotyčným tečny $P\tau$ astroidy. Myslíme-li si čtyřúhelníku $opq'r'$ opsanou kružnici, jest oq' jejím průměrem a pr' tětivou; body u, t jsou pravoúhlými průměty koncových bodů o, q' průměru oq' na tětivu $\overline{pr'}$, tedy $\overline{pt} = \overline{ur'}$, a že trojúhelníky qrp, our' jsou shodny, je též $pr = ur'$, pročež $pt = pr$. Z toho jde, že body t astroidy a body r křivky R, kterou popíše tečna nr (obr. 2.) křivky (n), jsou souměrny dle bodů p, v nichž tr a X se protínají.

Ježto křivka R jeví se jakožto geom. místo vrcholu r pravoúhlého trojúhelníku trq, jehož odvěsna jedna je tečnou astroidy a druhá kruhu (o, l), jest spojnice bodu r se středem přepony tq normálou křivky R, tak že lze též její tečnu v bodě r sestrojiti.

Poznámka k asteroidickému problému tří těles.

Napsal **Ladislav Beneš.**

Asteroidický problém tří těles — dvě hmoty konečné velikosti na koncích téže spojnice konstantní délky otáčejí se v kružnicích kol společného těžiště v jisté pevné rovině a přitahují nekonečně malé těleso v téže rovině se nacházející — jest zevšeobecněním problému, kdy obě konečná tělesa jsou pevná. Tento jednoduchý problém dá se převésti na kvadratury, a učinil tak nejprve Euler. Upotřebí se při tom s výhodou elliptických souřadnic, to jest soustavy konfokálních ellips a hyperbol, jejichž společnými ohnisky jsou obě konečné hmoty. Zavedl jsem také do asteroidického problému elliptické souřadnice. a doufám, že rovnice, které zde podávám, nebudou bez zajímavosti.

Nechť vzdálenost konečných hmot m_1 a m_2 ($m_1 = 1$, $m_2 = m_2 \leqq 1$) jest rovna $2c = 1$, potom jsou vzdálenosti těchto hmot od společného těžiště v poměru $m_2 : 1$. Nechť jsou dále ξ a η pravoúhlé souřadnice třetí hmoty m vzhledem k osám procházejícím těžištěm obou hmot m_1 a m_2, z nichž osa ξ leží stále ve spojnici $\overline{m_1 m_2}$ a čítá se kladně od leva na pravo ve směru $\overline{m_1 m_2}$; kladná část osy η leží od kladné části osy ξ o 90^0 ve směru rotace obou konečných těles — ve směru protivném pohybu ručiček hodinových. Jsou-li x a y pravoúhlé souřadnice tělesa m vzhledem k podobným osám, avšak procházejícím půlícím bodem spojnice $\overline{m_1 m_2}$, platí potom

$$x = \xi - \frac{1}{2}\frac{1 - m_2}{1 + m_2} = \xi - \frac{1}{2} k, \; y = \eta.$$

Volíme jednotku času tak, že gravitační konstanta jest rovna 1; úhlová rychlost otáčení konečných těles jest následkem toho dána vzorcem

$$n = \sqrt{1 + m_2}.$$