Antonín Libický

Kinematika theorie relativnosti. [IV.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 5, 593--612

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109206

i existenci jeho přímo popírá, neboť Einsteinův princip konstantní rychlosti světelné nedá se s ní srovnati. Nezávislost rychlosti světla na směru byla by sice také zaručena představou, že země při svém pohybu unáší aether sebou, ale jen pro pozorovatele, který jest vzhledem k zemi v klidu. Einstein však jde mnohem dále; dle něj jest rychlost světla pro *každého* pozorovatele táž a na směru nezávislá, aspoň pokud se pozorovatel pohybuje „neurychleně“, jak vyloženo. Tato supposice vylučuje existenci aetheru, aspoň pokud mu chceme připisovati vlastnosti objektivní, na pozorovateli nezávislé. Mají-li totiž oba pozorovatelé, o nichž v předešlém byla řeč, obdržeti pro rychlost světla hodnotu nezávislou na rychlosti i směru jich pohybu, musil by se aether, aspoň v jich sousedství a v prostoru mezi nimi, pohybovati s nimi současně. To však vede k nemožným důsledkům, neboť v prostoru mezi oněmi pozorovateli mohou býti jiní, kteří se pohybují rychlostí jinou, a aether měl by se zase pohybovati s nimi, zkrátka a dobře, musili bychom každému pozorovateli přisouditi aether vlastní. Nezbývá tedy, než opustiti hypothesu, že existuje medium, jež sprostředkuje šíření elektromagnetických rozruchů a jest nosičem energie s nimi spojené. Ale to neznamená návrat k akci in distans, theorie elektromagnetického pole založená na principu relativnosti pokládá totiž elektromagnetickou energii za samostatný útvar, nezávislý na hmotě. Přisuzuje jí i určitou hmotu, takže těleso energii vyzařující na hmotě ztrácí, těleso energii absorbující získává. V tělesích šíří se energie rychlostí světelnou. A tak otázka, která dlouho zajímala fysiky, je-li totiž aether hmotou v pohybu strhován nebo ne, vyřešena způsobem dosti překvapujícím, totiž vyloučením aetheru z fysikálních theorií.

Kinematika theorie relativnosti.

Napsal řed. **Ant. Libický.**

(Dokončení.)

IV. Jest uvésti ještě jiný tvar základních rovnic transformace Lorentzovy, na němž založena jsou mnohá důležitá pojednání o principu relativnosti od *Minkowského*, *Sommerfelda*, *Kleina* a j.

Zaveďme v těchto rovnicích čtvrtou souřadnici imaginární; položme totiž

$$iu = ict = x_4, \tag{15}$$

kde $i = \sqrt{-1}$. Zároveň pišme po řadě x_1, x_2, x_3 místo x, y, z; ježto

$$u = \frac{x_4}{i} = -ix_4,$$

obdržíme z (2*d*) tyto rovnice

$$x'_1 = \beta\left(x_1 + i\frac{v}{c}x_4\right),$$
$$x'_2 = x_2, \quad y'_2 = y_2,$$
$$x'_4 = \beta\left(-i\frac{v}{c}x_1 + x_4\right).$$

Reálnému bodu světovému (x, y, z, t) přísluší pak imaginární bod v soustavě (x_1, x_2, x_3, x_4).

Zavedeme-li ještě imaginární úhel ψ, daný rovnicí

$$tg\,\psi = i\frac{v}{c} = i\,tg\,\varphi, \tag{16}$$

z níž plyne

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \beta, \quad \sin\psi = \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = i\frac{v}{c}\beta,$$

obdržíme též

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1\cos\psi + x_4\sin\psi, \\ x'_2 &= x_2, \quad x'_3 = x_3, \\ x'_4 &= -x_1\sin\psi + x_4\cos\psi \end{aligned} \tag{2g}$$

a pro přechod k soustavě čárkované

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1\cos\psi - x'_4\sin\psi, \\ x_2 &= x'_2, \quad x_3 = x'_3, \\ x_4 &= x'_1\sin\psi + x'_4\cos\psi. \end{aligned} \tag{3g}$$

Kdyby zavedený úhel ψ byl reální, představovaly by tyto rovnice transformaci souřadnic vzhledem k nové soustavě pravoúhlé, která jest proti původní soustavě otočena o úhel ψ. Můžeme tento význam jejich podržeti, i když úhel ψ jest imaginární. Na základě toho lze definovati transformaci Lorentzovou též jako otočení soustavy souřadnic v rovině os X_1 a X_4 o imaginární úhel, daný rovnicí $tg\,\psi = i\,\frac{v}{c}$.

Výraz $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$, který zůstává při transformaci Lorentzově invariantní, nabývá pak vhodnějšího tvaru

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\ {}^{*}).$$

Rychlost. Pro složky rychlosti q bodu platí známé vzorce

$$q_x = \frac{dx}{dt},\quad q_y = \frac{dy}{dt},\quad q_z = \frac{dz}{dt};$$

v soustavě pohyblivé jsou tyto složky

$$q'_x = \frac{dx'}{dt'},\quad q'_y = \frac{dy'}{dt'},\quad q'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Ze vzorců $(2c)$:

$$x' = \beta\,(x - vt),\quad y' = y,\quad z' = z,\quad t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right)$$

obdržíme, differencujeme-li dle proměnné t

$$\frac{dx'}{dt} = \beta\left(\frac{dx}{dt} - v\right),\quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt},\quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{dt'}{dt} = \beta\left(1 - \frac{v}{c^2}\,\frac{dx}{dt}\right) = \beta\left(1 - \frac{v\,q_x}{c^2}\right); \tag{17}$$

tudíž

$$q'_x = \frac{dx'}{dt}\cdot\frac{dt}{dt'} = \frac{q_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}\,q_x},$$

$$q'_y = \frac{dy'}{dt}\,\frac{dt}{dt'} = \frac{q_y}{1 - \frac{v}{c^2}\,q_x},$$

$$q'_z = \frac{dz'}{dt}\,\frac{dt}{dt'} = \frac{q_z}{1 - \frac{v}{c^2}\,q_x}.$$

---

*) *V. Varićak* zavádí v rovnicích $(2d)$ funkce hyperbolické; klademe-li v nich totiž $\frac{v}{c} = tgh\,w$ (tangens hyperbolicus), obdržíme

$$x' = x\cosh w - u\sinh w,$$
$$u' = -x\sinh w + u\cosh w.$$

V dalších úvahách, založených na těchto transformačních rovnicích, ukazuje *Varićak*, jak lze výhodně použíti v theorii relativnosti geometrie Lobačevského. Viz o tom jeho články v 11. ročníku »Physikalische Zeitschrift«.

Položme v těchto vzorcích

$$\frac{1}{1-\frac{vq_x}{c^2}}=\varkappa; \tag{18a}$$

pak můžeme psáti jednodušeji

$$\begin{aligned} q'_x &= \varkappa\,(q_x-v), \\ q'_y &= \frac{\varkappa}{\beta}\,q_y, \\ q'_z &= \frac{\varkappa}{\beta}\,q_z. \end{aligned} \tag{19}$$

Snadno si pak zjednáme vzorce

$$\begin{aligned} q_x &= \varkappa'\,(q'_x+v), \\ q_y &= \frac{\varkappa'}{\beta}\,q'_y, \\ q_z &= \frac{\varkappa'}{\beta}\,q'_z, \end{aligned} \tag{20}$$

kde

$$\varkappa'=\frac{1}{1+\frac{vq'_x}{c^2}}. \tag{18b}$$

Z těchto rovnic lze odvoditi některé relace týkající se jednak složek rychlostí q a q', jednak celých těchto rychlostí.

Především násobením obou druhých (neb i obou třetích) rovnic (19) a (20) vychází

$$\beta^2=\varkappa\varkappa'$$

čili

$$\left(1-\frac{vq_x}{c^2}\right)\left(1+\frac{vq'_x}{c^2}\right)=1-\frac{v^2}{c^2}. \tag{21}$$

Dělením druhé a třetí rovnice (19) obdržíme

$$\frac{q'_y}{q'_z}=\frac{q_y}{q_z}$$

čili

$$\frac{q'_y}{q_y}=\frac{q'_z}{q_z}=\frac{\varkappa}{\beta}=\frac{1}{\beta\left(1-\frac{vq_x}{c^2}\right)}. \tag{22}$$

Dále jest

$$q'^2 = q'^2_x + q'^2_y + q'^2_z;$$

z čehož

$$q'^2 - q'^2_x = q'^2_y + q'^2_z$$

čili vzhledem k druhé a třetí rovnici (19)

$$q'^2 - q'^2_x = \frac{\varkappa^2}{\beta^2}(q^2_y + q^2_z).$$

Kladouce v této rovnici z obdobného vzorce

$$q^2 = q^2_x + q^2_y + q^2_z$$

vycházející hodnotu

$$q^2_y + q^2_z = q^2 - q^2_x,$$

nalezneme

$$q'^2 - q'^2_x = \frac{\varkappa^2}{\beta^2}(q^2 - q^2_x) = \frac{\varkappa^2}{\varkappa\varkappa'}(q^2 - q^2_x)$$

aneb

$$q'^2 - q'^2_x = \frac{\varkappa}{\varkappa'}(q^2 - q^2_x). \tag{23}$$

Zavedeme-li v této rovnici za q'^2_x hodnotu plynoucí z první rovnice (19), zjednáme si rovnici

$$q'^2 = \varkappa^2 (q_x - v)^2 + \frac{\varkappa^2}{\beta^2}(q^2 - q^2_x)$$

čili

$$q'^2 = \frac{\varkappa^2}{\beta^2}[q^2 - q^2_x + \beta^2 (q_x - v)^2] \tag{24a}$$

a obdobně

$$q^2 = \frac{\varkappa'^2}{\beta^2}[q'^2 - q'^2_x + \beta^2 (q'_x + v)^2]. \tag{24b}$$

Z rovnice (23) nabýváme též

$$\frac{q'^2 - q'^2_x}{q^2 - q^2_x} = \frac{\varkappa}{\varkappa'}. \tag{25}$$

Řešením prvních rovnic (19) a (20) dle neznámých q_x a q'_x ustanovíme

$$q'_x = \varkappa \frac{\varkappa' - 1}{\varkappa\varkappa' - 1} v,$$

$$q_x = \varkappa' \frac{\varkappa - 1}{\varkappa\varkappa' - 1} v,$$

kde lze ve společném jmenovateli na pravé straně položiti opět

$$\varkappa\varkappa' = \beta^2.$$

Substitucí těchto hodnot do rovnice (23), kterou píšeme ve tvaru

$$\varkappa' q'^2 - \varkappa q^2 = \varkappa' q'^2_x - \varkappa q^2_x,$$

obdržíme

$$\varkappa' q'^2 - \varkappa q^2 = \frac{\varkappa\varkappa' \left[\varkappa (\varkappa' - 1)^2 - \varkappa' (\varkappa - 1)^2\right] v^2}{(\beta^2 - 1)^2},$$

z kteréž rovnice vychází po snadném zjednodušení na pravé straně

$$\varkappa' q'^2 - \varkappa q^2 = \frac{\beta^2 (\varkappa' - \varkappa)(\beta^2 - 1)}{(\beta^2 - 1)^2} v^2$$

aneb

$$\varkappa' q'^2 - \varkappa q^2 = \frac{\beta^2 (\varkappa' - \varkappa)}{\beta^2 - 1} v^2.$$

Ježto

$$\beta^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2},$$

jest

$$\beta^2 - 1 = \frac{v^2}{c^2 - v^2}$$

a

$$\frac{\beta^2 v^2}{\beta^2 - 1} = c^2;$$

tudíž

$$\varkappa' q'^2 - \varkappa q^2 = (\varkappa' - \varkappa) c^2.$$

Z této rovnice plyne

$$(c^2 - q'^2)\varkappa' = (c^2 - q^2)\varkappa$$

čili

$$\frac{1 - \frac{q'^2}{c^2}}{1 - \frac{q^2}{c^2}} = \frac{\varkappa}{\varkappa'}. \tag{26}$$

Poněvadž zlomek na pravé straně

$$\frac{\varkappa}{\varkappa'} = \frac{\varkappa^2}{\beta^2},$$

obdržíme též

$$\sqrt{\frac{1-\frac{q'^2}{c^2}}{1-\frac{q^2}{c^2}}}=\frac{\varkappa}{\beta}. \qquad (26a)$$

Konečně srovnáním této rovnice s rovnicí (22) nalezneme

$$\frac{q'_y}{q_y}=\frac{q'_z}{q_z}=\sqrt{\frac{1-\frac{q'^2}{c^2}}{1-\frac{q^2}{c^2}}}. \qquad (27)$$

Čas a rychlost vlastní. Z rovnic (17) a (18a) plyne

$$\frac{dt'}{dt}=\frac{\beta}{\varkappa},$$

čili dle (26a)

$$\frac{dt'}{dt}=\sqrt{\frac{1-\frac{q^2}{c^2}}{1-\frac{q'^2}{c^2}}},$$

odkudž

$$dt\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}=dt'\sqrt{1-\frac{q'^2}{c^2}}. \qquad (28)$$

Má tedy výraz

$$dt\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}},$$

který jest jakýmsi prvkem časovým, stejnou hodnotu v obou soustavách souřadnic; jest invariantní vzhledem k transformaci Lorentzově.

Minkowski zavedl proň označení $d\tau$; píše tedy

$$d\tau=dt\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}, \qquad (28a)$$

z čehož

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}. \qquad (29)$$

Veličinou

$$\tau = \int_0^\tau d\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\, dt$$

definuje pak *čas vlastní*, totiž čas příslušející každému bodu útvaru hmotného, nezávislý na kterékoli soustavě souřadnic. Čas ten neudávají žádné hodiny; všechny časoměry stanoví jen dobu t neb t' dle toho, nalézají-li se v soustavě (S) nebo (S').

Jelikož pro rychlost q platí

$$q^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

čili

$$q^2\, dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

a z rovnice (28a) plyne

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{q^2 dt^2}{c^2},$$

bude též

$$c^2 d\tau^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

z čehož

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}. \qquad (28b)$$

Zavedeme-li v tomto vzorci čas $u = ct$, tudíž $du = c\,dt$, vychází

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{du^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}, \qquad (28c)$$

kde $du^2 > dx^2 + dy^2 + dz^2$, poněvadž předpokládáme, že rychlost $q < c$.

V soustavě souřadnic x_1, x_2, x_3, x_4, zavedené v odst. IV. oddílu jednajícího o zvláštních tvarech rovnic základních, bude

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2)}. \qquad (28d)$$

Výraz pod odmocnítkem představuje dvojmoc differenciálu oblouku s čáry světové; můžeme tudíž říci, že vlastní čas τ jest dán délkou oblouku s čáry světové od jejího bodu M_0, pro který čas ten rovná se nulle, až k bodu M příslušejícímu času τ.

S časem vlastním souvisí pojem *vlastní rychlosti* libovolného bodu útvaru; vyrozumíváme jí rychlost, jejíž složky jsou:

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{d\tau}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{d\tau}.$$

Pro tyto složky nalezneme výrazy:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}\,\frac{dt}{d\tau} = \frac{q_x}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}, \quad \dot{y} = \frac{q_y}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}, \quad \dot{z} = \frac{q_z}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}; \tag{30}$$

tudíž *vlastní rychlost*, kterou označíme (q), jest určena rovnicí

$$(q)^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{q^2}{1-\frac{q^2}{c^2}},$$

z níž jde

$$(q) = \frac{q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}. \tag{31}$$

Řešením této rovnice dle q nabýváme

$$q = \frac{(q)}{\sqrt{1+\frac{(q)^2}{c^2}}}; \tag{31a}$$

násobením obou rovnic (31) a (31a) obdržíme pak relaci

$$\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}\,\sqrt{1+\frac{(q)^2}{c^2}} = 1. \tag{32}$$

Pohyb rovnoměrný v přímce. Stálou rychlost tohoto pohybu nazveme w; přímka, v níž se daný bod pohybuje, prochází počátkem souřadnic a jest nakloněna k ose X'-ové v úhlu α. Pak jest složka rychlosti $w'_x = w' \cos\alpha$; pročež dle (18b)

$$\varkappa' = \frac{1}{1+\frac{v\,w'\cos\alpha}{c^2}}.$$

Kladouce tuto hodnotu, jakož i za $\frac{1}{\beta^2}$ výraz

$$1-\frac{v^2}{c^2}$$

do rovnice (24b), zjednáme si pro rychlost v soustavě nehybné

$$w^2 = \frac{(w'^2 - w'^2 \cos^2 \alpha)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + (w' \cos \alpha + v)^2}{\left(1 + \frac{vw'}{c^2} \cos \alpha\right)^2}$$

čili, zavedeme-li v čitateli $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$ a upravíme-li,

$$w^2 = \frac{(v^2 + w'^2 + 2vw' \cos \alpha) - \left(\frac{vw' \cos \alpha}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{vw'}{c^2} \cos \alpha\right)^2}. \qquad (33)$$

Vzorec ten jest souměrný vzhledem k rychlostem v a w'. V mechanice klassické, kde $c = \infty$, nabývá tvaru

$$w^2 = v^2 + w'^2 + 2vw' \cos \alpha,$$

což jest známý vzorec, kterým se stanoví výsledná rychlost obou složek v a w' (pomocí rovnoběžníka rychlostí).

V theorii relativnosti vyjadřuje obdobně vzorec (33) *addiční theorem* rychlostí, jehož původcem jest *A. Einstein* („Zur Elektrodynamik bewegter Körper“, Annalen der Physik, Band 17., 1905, pag. 905)**).

Zvláštní případy: 1. Rychlost w' má týž směr jako v, totiž směr sjednocených os X a X'; pak jest $\sphericalangle \alpha = 0$, tudíž

$$w^2 = \frac{v^2 + w'^2 + 2vw'}{\left(1 + \frac{vw'}{c^2}\right)^2},$$

z čehož výsledná rychlost

$$w = \frac{v + w'}{1 + \frac{vw'}{c^2}} \text{ **)} \qquad (34)$$

---

*) *A. Sommerfeld* ukazuje ve článku „Über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie“ (Physikalische Zeitschrift, 10. roč., pag. 826), kterak lze výhodně ke skládání rychlostí užíti vzorců o sférických trojúhelnících s imaginárními stranami.

**) Viz též článek „Odvození Einsteinova addičního theoremu pro skládání rychlostí v případě rychlostí parallelních“ od Dr. *Aug. Žáčka* (Časopis math. a fys., ročník XLI., pag. 538.)

V mechanice Galilei-Newtonově má tento vzorec tvar

$$w = v + w'.$$

Pohybuje-li se na př. vůz železniční rychlostí $v = 36 \frac{km}{hod}$ $= 10 \frac{m}{sec}$ a v něm koule rychlostí $w' = 1 \frac{m}{sec}$ přímočárně týmž směrem, nebude pro pozorovatele nalézajícího se mimo vůz rychlost koule $11 \frac{m}{sec}$, nýbrž $10{\cdot}99999963 \frac{m}{sec}$.

Na základě vzorce (34) dovozuje *Einstein*, že skládáním rychlostí v a w', jež obě jsou menší než c, obdržíme vždy výslednou rychlost, která nedosahuje rychlosti c. Neboť teprve pro největší vytčené hodnoty obou složek $v = c$, $w' = c$, dostaneme

$$w = \frac{c + c}{2} = c.$$

Z toho opět vyplývá, že rychlost c v theorii relativnosti odpovídá nekonečně velké rychlosti v mechanice klassické.

2. Rychlost w' jest kolmá k v, tedy w' leží v rovině kolmé k společné ose X-ové; pak $\sphericalangle \alpha = \frac{\pi}{2}$ a Einsteinův vzorec (33) přejde ve

$$w^2 = v^2 + w'^2 - \frac{v^2 w'^2}{c^2}. \tag{35}$$

Rovnici tu lze také psáti buď ve tvaru

$$w^2 = v^2 + w'^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

aneb

$$w^2 = w'^2 + v^2 \left(1 - \frac{w'^2}{c^2}\right);$$

dle prvního z těchto tvarů jsou pravoúhlé složky výsledné rychlosti: v a $w' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, dle druhého jsou tyto složky: w' a $v \sqrt{1 - \frac{w'^2}{c^2}}$ (obr. 5.).

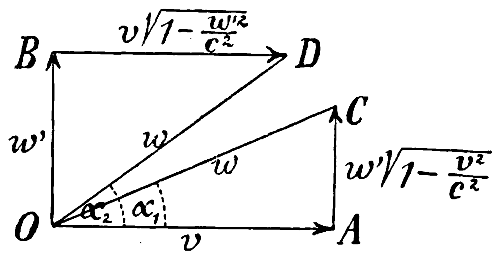
Není tedy jedno, od které složky při skládání těchto rychlostí vycházíme; zdali totiž skládáme v a w' nebo w' a v. Velikost výsledného pohybu jest sice v obou případech táž, ale směr jeho jest různý. V prvém případě tvoří výsledná rychlost s osou X-ovou úhel α_1, určený rovnicí

$$tg\,\alpha_1 = \frac{w'}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}};$$

ve druhém případě úhel α_2, pro nějž platí

$$tg\,\alpha_2 = \frac{w'}{v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Geometrické sečítání rychlostí v a w' není tedy kommutativní.



Obr. 5.

Urychlení. Složky urychlení a v soustavě nehybné dány jsou obecně vzorci

$$a_x = \frac{dq_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dq_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dq_z}{dt};$$

v soustavě pohyblivé

$$a'_x = \frac{dq'_x}{dt'}, \quad a'_y = \frac{dq'_y}{dt'}, \quad a'_z = \frac{dq'_z}{dt'}.$$

Jelikož dle (19)

$$q'_x = \varkappa\,(q_x - v),$$

jest

$$a'_x = \frac{dq'_x}{dt'} = \frac{dq'_x}{dt}\,\frac{dt}{dt'} = \left[\frac{d\varkappa}{dt}\,(q_x - v) + \varkappa\,\frac{dq_x}{dt}\right]\frac{dt}{dt'}.$$

Avšak

$$\varkappa = \left(1 - \frac{vq_x}{c^2}\right)^{-1},$$

tudíž

$$\frac{d\varkappa}{dt} = \frac{v}{c^2}\,\frac{dq_x}{dt}\left(1 - \frac{vq_x}{c^2}\right)^{-2} = \frac{v}{c^2}\,a_x\varkappa^2.$$

a dle (17)

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{\varkappa}{\beta},$$

pročež

$$a'_x = \frac{\varkappa}{\beta}\left[\frac{v}{c^2}\,\varkappa^2\,(q_x - v) + \varkappa\right]a_x = \frac{\varkappa^3}{\beta}\left[\frac{v}{c^2}\,(q_x - v) + \frac{1}{\varkappa}\right]a_x;$$

položíme-li na pravé straně v závorce $\frac{1}{\varkappa} = 1 - \frac{vq_x}{c^2}$, dostaneme

$$a'_x = \frac{\varkappa^3}{\beta}\left[\frac{vq_x}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{vq_x}{c^2}\right]a_x,$$

a konečně vzhledem k rovnici

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\beta^2}$$

$$a'_x = \left(\frac{\varkappa}{\beta}\right)^3 a_x.$$

Podobně ustanovíme

$$a'_y = \left(\frac{\varkappa}{\beta}\right)^2\left[\frac{\varkappa v q_y}{c^2}\,a_x + a_y\right] \qquad (36)$$

$$a'_z = \left(\frac{\varkappa}{\beta}\right)^2\left[\frac{\varkappa v q_z}{c^2}\,a_x + a_z\right].$$

Pro přechod ze soustavy nečárkované v čárkovanou platí pak vzorce

$$a_x = \left(\frac{\varkappa'}{\beta}\right)^3 a'_x$$

$$a_y = \left(\frac{\varkappa'}{\beta}\right)^2\left[-\frac{\varkappa' v q'_y}{c^2}\,a'_x + a'_y\right] \qquad (37)$$

$$a_z = \left(\frac{\varkappa'}{\beta}\right)^2\left[-\frac{\varkappa' v q'_z}{c^2}\,a'_x + a'_z\right].$$

Rovnicím těm lze dáti tvar souměrnější; pišme totiž první rovnici (36) takto:

$$\beta^3 a'_x = \varkappa^3 a_x = \varkappa^3 a_x \left(1 - \frac{v q_x}{c^2} + \frac{v q_x}{c^2}\right)$$

čili, poněvadž

$$1 - \frac{v q_x}{c^2} = \frac{1}{\varkappa},$$

též

$$\beta^3 a'_x = \varkappa^2 a_x + \varkappa^3 \frac{v a_x}{c^2} q_x,$$

ke kteréž rovnici připojme druhou a třetí (36), totiž

$$\beta^2 a'_y = \varkappa^2 a_y + \varkappa^3 \frac{v a_x}{c^2} q_y, \tag{36a}$$

$$\beta^2 a'_z = \varkappa^2 a_z + \varkappa^3 \frac{v a_x}{c^2} q_z.$$

Na pravé straně těchto rovnic první členy jsou skalární části složek vektoru $\varkappa^2 \mathbf{a}$ ve směrech os souřadných, druhé členy podobně skalární části složek vektoru $\varkappa^3 \frac{v a_x}{c^2} \mathbf{q}$. Zavedeme-li pomocný vektor $\mathbf{b}$, daný rovnicí:

$$\beta^2 \mathbf{b} = \varkappa^2 \mathbf{a} + \varkappa^3 \frac{v a_x}{c^2} \mathbf{q},$$

jehož složky jsou $\mathbf{b}_x$, $\mathbf{b}_y$, $\mathbf{b}_z$, lze psáti

$$\beta \mathbf{a}'_x = \mathbf{b}_x, \quad \mathbf{a}'_y = \mathbf{b}_y, \quad \mathbf{a}'_z = \mathbf{b}_z \text{*)}. \tag{36b}$$

Transformujme nyní způsobem, uvedeným v odd. III. o zvláštních tvarech rovnic základních, pohybující se bod na „klid“; pak v určitém okamžiku rychlost jeho q má směr osy X' a jest rovna rychlosti v čárkované soustavy, pročež

$$q_x = v, \quad q_y = 0, \quad q_z = 0.$$

Pro tyto hodnoty jest

$$\varkappa = \frac{1}{1 - \frac{v q_x}{c^2}} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \beta^2,$$

*) Viz *Abraham* „Theorie der Elektrizität“, II. Bd., pag. 376.

tudíž změní se rovnice (36a) v

$$a'_x = \beta\left(1 + \frac{\beta^2 v^2}{c^2}\right) a_x = \beta \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} a_x = \beta^3 a_x, \tag{38}$$

$$a'_y = \beta^2 a_y, \quad a'_z = \beta^2 a_z.$$

Urychlení vlastní. Složky jeho jsou

$$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{d\tau^2}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2 y}{d\tau^2}, \quad \ddot{z} = \frac{d^2 z}{d\tau^2}.$$

Dle známého vzorce počtu differenciálního*) jest

$$\ddot{x} = \frac{\frac{d\tau}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2\tau}{dt^2}}{\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^3},$$

kde

$$\frac{dx}{dt} = q_x, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = a_x, \quad \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}},$$

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = -\frac{q}{c^2\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}\frac{dq}{dt}.$$

Jelikož

$$q^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2,$$

jest

$$q\frac{dq}{dt} = a_x q_x + a_y q_y + a_z q_z,$$

pročež

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = -\frac{a_x q_x + a_y q_y + a_z q_z}{c^2\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}.$$

Substitucí těchto hodnot obdržíme

$$\ddot{x} = \frac{a_x}{1 - \frac{q^2}{c^2}} + \frac{q_x (a_x q_x + a_y q_y + a_z q_z)}{c^2\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^2} \tag{39}$$

a podobné vzorce pro $\ddot{y}$ a $\ddot{z}$.

---

*) Viz **Studnička**: „O počtu differenciálním“, pag. 54, vzorec (4).

Urychlení vlastní lze rozložiti ve složku *tangenciální* a_τ a *normální* a_ν *). Pro první z nich platí

$$a_\tau = \frac{d\,(q)}{d\tau},$$

pro druhou

$$a_\nu = \frac{(q)^2}{\varrho},$$

kde značí ϱ poloměr křivosti v příslušném bodě křivky, kterou opisuje bod pohyblivý.

Ježto

$$(q)^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2,$$

obdržíme differencováním dle τ

$$(q)\,\frac{d\,(q)}{d\tau} = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z};$$

vložením na pravé straně za $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ hodnot (30) a za $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ hodnot (39) vychází po krátké redukci

$$(q)\,\frac{d\,(q)}{d\tau} = \frac{\left[c^2\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)+q^2\right](a_x q_x + a_y q_y + a_z q_z)}{c^2\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^2\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}$$

čili

$$(q)\,\frac{d\,(q)}{d\tau} = \frac{a_x q_x + a_y q_y + a_z q_z}{\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^2\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}.$$

Poněvadž dle (31)

$$(q) = \frac{q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}},$$

jest též

$$q\,\frac{d\,(q)}{d\tau} = \frac{a_x q_x + a_y q_y + a_z q_z}{\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^2}.$$

Ale z rovnice

$$q^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2$$

*) *A. Seydler*: „Theoretická mechanika“, pag. 80.

plyne

$$q \frac{dq}{dt} = a_x q_x + a_y q_y + a_z q_z,$$

kde $\frac{dq}{dt}$ jest urychlení tangenciální a_t v soustavě nečárkované; tudíž máme vzorec

$$a_\tau = \frac{a_t}{\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^2}. \tag{40}$$

Podobně dostaneme pro vlastní urychlení normální

$$a_\nu = \frac{(q)^2}{\varrho},$$

přihlížejíce ke vzorci (31)

$$a_\nu = \frac{q^2}{\varrho\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)}$$

čili označíme-li urychlení normální v soustavě nečárkované

$$a_n = \frac{q^2}{\varrho}$$

též

$$a_\nu = \frac{a_n}{1 - \frac{q^2}{c^2}} \tag{41}$$

Pohyb rovnoměrně zrychlený. Pohybuje-li se volný bod na přímce se stálým urychlením $a = g$, zvolme dráhu jeho společnou osou X-ovou obou soustav (S) a (S'); pak jest

$$a'_x = g, \quad a'_y = 0, \quad a'_z = 0,$$

kdežto

$$a_x = a, \quad a_y = 0, \quad a_z = 0.$$

Transformujme pohyblivý bod v každém okamžiku na „klid“ [čímž vlastně rozšiřujeme platnost principu relativnosti, omezenou dosud na rovnoměrný pohyb soustavy čárkované, též na její pohyb rovnoměrný zrychlený *)]; pak jest

$$q_x = v, \quad q_y = 0, \quad q_z = 0,$$

*) Viz *Einstein*: „Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen“ (Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, IV. Band 1908, pag. 454).

tudíž $q = v$. I lze použíti v tomto případě rovnic (38), z nichž zbývá jen první ve tvaru

$$g = \beta^3 a,$$

z čehož

$$a = \frac{g}{\beta^3},$$

kde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}},$$

píšeme-li ve vzorci (5) q místo v.

Jest tudíž

$$a = g \sqrt{\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^3},$$

odkudž plyne, poněvadž $a = \frac{dq}{dt}$, rovnice differenciální

$$\frac{dq}{\sqrt{(c^2 - q^2)^3}} = \frac{g}{c^3}\, dt.$$

Integrací vychází

$$\int \frac{dq}{\sqrt{(c^2 - q^2)^3}} = \frac{q}{c^2\sqrt{c^2 - q^2}} = \frac{g\,(t - t_0)}{c^3}$$

čili

$$\frac{q}{\sqrt{c^2 - q^2}} = \frac{g\,(t - t_0)}{c}.$$

Počítáme-li dobu od okamžiku, kdy $q = 0$, bude též konstanta $t_0 = 0$; pročež

$$\frac{q}{\sqrt{c^2 - q^2}} = \frac{gt}{c},$$

z kteréž rovnice plyne

$$q = \pm \frac{gct}{\sqrt{c^2 + g^2 t^2}}.$$

Ježto v tomto případě $q = \frac{dx}{dt}$, dostaneme

$$dx = \pm \frac{gct\,dt}{\sqrt{c^2 + g^2 t^2}},$$

tudíž

$$\pm (x - x_0) = gc \int \frac{t\,dt}{\sqrt{c^2 + g^2t^2}} = gc\,\frac{1}{g^2}\sqrt{c^2 + g^2t^2}$$

čili

$$\pm (x - x_0) = \frac{c}{g}\cdot\sqrt{c^2 + g^2t^2}.$$

Volíme-li počátek souřadnic tak. aby integrační konstanta $= 0$, obdržíme rovnici

$$x^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{g^2}$$

aneb, zavedeme-li opět dobu $u = ct$, konečně

$$x^2 - u^2 = \frac{c^4}{g^2}. \tag{42}$$

Jest tedy čára světová tohoto pohybu rovnoosá hyperbola, jejíž osa $r = \frac{c^2}{g}$ jest tím menší, čím větší jest urychlení g. *M. Born* nazývá takový pohyb *hyperbolickým*; *Sommerfeld* navrhuje proň pojmenování „pohyb *cyklický*".

Pro urychlení g máme dle toho

$$g = \frac{c^2}{r},$$

tedy vzorec podobný vzorci pro urychlení normální v mechanice klassické.

Dle toho, co bylo pověděno výše o hyperbolách H (obr. 3.), můžeme vektor **r** daný poloosou r zaměniti vektorem. ze středu hyperboly k některému bodu jejímu vedeným, měříme-li jej příslušnou. jednotkou délky (od středu křivky k průsečíku vektoru s hyperbolou jednotkovou). Můžeme tudíž také psáti

$$g = \frac{c^2}{\varrho}, \tag{43}$$

značí-li ϱ velikost tohoto vektoru.

Rozdíl mezi novou a klassickou kinematikou jest v tom, že v této pohyb hmotného bodu se stálým urychlením představen jest parabolou $x = {}^1/_2\, gt^2$, kdežto v oné jest obrazem tohoto pohybu hyperbola. Pro $t = \pm \infty$ obdržíme v klassické mechanice nekonečně velkou rychlost, v kinematice na principu relativnosti založené jest v této době rychlost bodu rovna $\pm c$.

Pohyb hyperbolický jest zvlášť důležitý i pro obecný pohyb bodu, jehož čára světová jest křivkou trojnásob zakřivenou. Jak *Minkowski* *) ukázal, můžeme položiti libovolným bodem M této čáry rovnoosou hyperbolu, která má s ní v tomto bodě tři nekonečně blízké body společné. Hyperbolu tu lze nazvati *hyperbolou křivosti*. U bodu M zaměníme dva prvky čáry světové prvky této hyperboly; příslušné urychlení má pak hodnotu $\frac{c^2}{\varrho}$, je-li ϱ délka vektoru vedeného ze středu hyperboly k bodu M.

Věstník literární.

Recense knih.

F. Riesz: **Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.** VI + 182 p. Paris, 1913.

Nový svazek Borelovy kollekce monografií o theorii funkcí jest první kniha věnovaná theorii lineárních rovnic o nekonečně velkém počtu proměnných. Tato nauka jest dnes úplně v začátcích, systematicky zpracována není; autor (professor university v Kolozsváru) podává přehled hlavních resultátů dosud nalezených.

Nejjednodušší úloha do tohoto oboru patřící byla řešena již v XVII. století: proměnná y jest dána jako řada postupující dle celistvých kladných mocnin proměnné x; má se vyjádřiti x jako funkce proměnná y řadou stejného tvaru. Řešení provádí se methodou neurčitých součinitelů, která dává nekonečnou řadu lineárních rovnic pro hledané koefficienty; avšak přes to, že jest rovnic nekonečně mnoho, řešíme vždy jen konečnou soustavu, poněvadž prvních n neznámých jest právě určeno prvními n rovnicemi. Teprve u Fouriera (Théorie analytique de la chaleur) nalézáme problémy, ve kterých každá z daných rovnic skutečně obsahuje nekonečně mnoho neznámých. Tak na. př. aby ustanovil koefficienty b_m v rozvoji dané liché funkce $f(x)$ v trigonometrickou řadu

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots.$$

*) „Raum und Zeit", Teubnerovo vyd. pag. 10.