Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Vladimír Mašek

O dvojrohu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 1, 23--28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109202

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1922

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

bude křivkou polárně reciprokou k Apollonické hyperbole vzhledem na imaginárnou kružnici o poloměru $\sqrt{\overline{ov}.\overline{vf}}$. Pro tento poloměr jakožto výšku sestrojený kužel budou ony společné tečny stopami jeho hlavních rovin.

Kdyby se bod v pohyboval po přímce $\varDelta$, posunovaly by se přímky A, F, D rovnoběžně. Dospěl-li bod v do polohy w takové, že příslušná přímka ${}^1A$ / A prochází bodem φ, dotknou se stejně jako dříve sestrojené křivky G, ${}^1H$ v bodě ${}^1q$, příslušném to ohnisku Steiner-Pelzovy paraboly. Pro body přímky $\varDelta$ na pravo (v našem obraze 3.) od bodu w naše degenerace nastati nemůže. Bod w jest průsečíkem průměru $\varDelta$ dané paraboly Γ se sdruženou, ohniskem procházející tetivou. Odtud snadno lze odvoditi křivku, která jest geometrickým místem těchto bodů a tedy řezovou křivkou plochy **V** s nákresnou jakožto parabolu W, s podstavou Γ souosou, jdoucí jejím ohniskem a mající poloviční parametr.

O dvojrohu.

Napsal Dr. *Vladimír Mašek*, prof. vys. školy zemědělské v Brně.

V článku tomto uvažovati budeme dvojroh co průmět průsečné křivky určitého přímého konoidu 5. stupně s rovinou jdoucí jistou jeho povrchovou přímkou. Osou konoidu budiž přímka o ležící v průmětně π (obr. 1.) a za řídící křivku volme křivku $\varkappa$, ležící v rovině totožnosti a orthogonálně affinní k cissoidě Diokletově ležící v nárysně, jejíž asymptota a se ztotožňuje s osou x. Označme r poloměr základní kružnice k zvolené cissoidy Diokletovy a spusťme z bodu vratu Q řídící křivky konoidu kolmici b k průmětně π. Budiž zde uvedeno, že konoid takto stanovený jest geometrickým místem vrcholů všech ∞^2 hyperbolických paraboloidů mimoběžkami a a b procházejících.*)

Označme A a B průsečíky osy o s mimoběžkami a resp. b a jmenujme rovinu γ kolmou ku ose o a procházející půlícím bodem G úsečky $\overline{AB}$ rovinou centrálnou. Z vytvoření konoidu plyne přímo, že rovina γ obsahuje dvě jeho k sobě kolmo stojící povrchové přímky. Označme je g a g'. Sestrojme nárysný průmět průsečné křivky ε konoidu s libovolnou rovinou σ jdoucí přímkou g. Průmět půdorysný p_1 povrchové přímky p konoidu obdržíme,

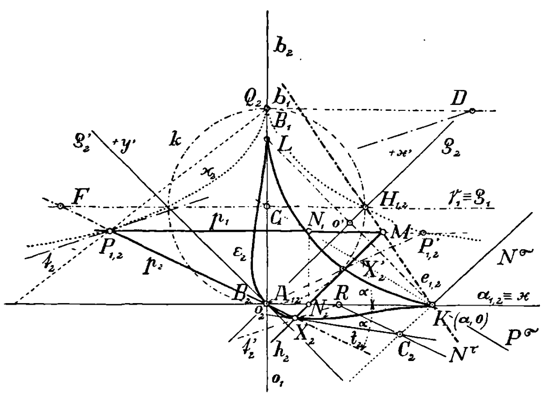
*) *Dr. J. Klobouček*: Methodické poznámky ku theorii komplexu A^2. Rozpravy České Akademie r. 1905. O komplexu os ploch 2 st., které procházejí dvěma reálnými mimoběžkami. Třicátá roční zpráva karlínské reálky.

Dr. V. Šimandl: O určitém konoidu stupně pátého. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Ročník XLII.

Dr. M. Lerch: Poznámky o soustavě paraboloidů, procházejících dvěma danými mimoběžkami atd. Časopis pro pěstování mathem. a fys. Roč. XLVI.

vytkneme-li bod $P_{1,2}$ dané cissoidy Diokletovy a vedeme jím $p_1 // x$. Nárys přímky p jest $p_2 \equiv P_{1,2}\, o_2$. Stopa P^σ protíná přímku p_1 v bodě N_1 a vedeme-li nárysem jeho N_2 hlavní přímku $h_2 // N^\sigma$, obdržíme v jejím průsečíku s p_2 bod X_2 hledaného průmětu ε_2 křivky ε.

Průsečnice e roviny σ s rovinou totožnosti prochází bodem K, v němž stopa P^σ seče osu x a průsečíkem H přímky g s rovinou totožnosti, jehož půdorys H_1 jest patrně průsečíkem kružnice k s přímkou g_1. Konstrukce křivky ε_2 jest tedy následující: Vytkneme libovolnou pevnou přímku $e_{1,2}$ jdoucí bodem $H_{1,2}$ a průsečíkem jejím M s přímkou p_1 vedeme přímku svírající s $x \sphericalangle 45^0$. Tato



Obr. 1.

protíná přímku p_2 v bodě X_2 křivky ε_2. *Pohybuje-li se tedy úhel 45° vrcholem M po libovolné přímce $e_{1,2}$ jdoucí bodem $H_{1,2}$ tak, by jedno jeho rameno bylo stále rovnoběžno s asymptotou dané cissoidy Diokletovy a spojíme-li průsečík tohoto ramene a uvažované cissoidy s bodem pevným o_2, protíná tato spojnice rameno druhé pohybujícího se úhlu v bodě X_2 křivky ε_2.* Křivka jest tedy opsána vrcholem X_2 proměnného trojúhelníka $P_{1,2}\, M\, X_2$.

Stanovme rovnici křivky ε_2. Bod o_2 budiž počátkem pravoúhlých souřadnic, osu x na pravo směřující volme za kladnou osu x a přímku $o_2\, Q_2$ za kladnou osu y. Budiž a vzdálenost průsečíku K roviny σ s osou x od počátku souřadnic. Je-li

$$y = \lambda x \tag{1}$$

rovnice přímky $Q_2 P_2$, plynou pro bod P_2 souřadnice:

$$x = -\frac{2r}{\lambda(\lambda^2+1)},$$

$y = \frac{2r\lambda^2}{\lambda^2+1}$. Bod N_1 určen jest na přímce p_1 souřadnicí $x = \frac{a(1-\lambda^2)}{1+\lambda^2}$. Přímka h_2 bodem N_2 procházející a svírající s osou $x \sphericalangle 45^0$ má tedy rovnici:

$$(2) \qquad y = x - \frac{a(1-\lambda^2)}{1+\lambda^2}.$$

Rovnici přímky p_2 obdržíme ve tvaru:

$$(3) \qquad y = -\lambda^3 x.$$

Je-li bod L průsečíkem přímky b s rovinou σ a značí-li c poloviční vzdálenost bodů K a L, jest patrně $a = c\sqrt{2}$. Zavedeme-li tuto hodnotu za a do rovnic (2) a (3), obdržíme po elliminaci proměnného parametru λ a otočení os souřadných kladným směrem o $\sphericalangle 45^0$ do polohy x' a y' a po pošinutí počátku o_2 o úsečku c v kladném směru osy x', rovnici křivky ε_2 ve tvaru:

$$(4) \quad (y^2 + x^2 - 4cx - c^3)(y^2 - c^2) + 4c^2 x^2 = 0.$$

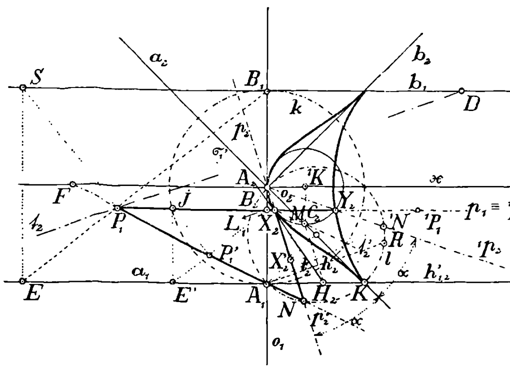
Tato rovnice 4. řádu jest totožná se známou rovnicí *dvojrohu (bicorne).**) Dospěli jsme k následující zajímavé větě: *Průsečná křivka uvažovaného konoidu 5. stupně s rovinou jdoucí některou z jeho přímek ležících v rovině centrálné, promítá se do roviny centrálné jakožto dvojroh.*

Tečnu v bodě X_2 křivky ε_2 sestrojíme co průsek roviny sečné σ s rovinou tečnou τ konoidu v bodě X. Použijeme známé věty o konoidu, že roviny procházející přímkami a a b protínají konoid v křivkách 3. řádu, jež se promítají do roviny centrálné co cissoidy Diokletovy. Tyto cissoidy Diokletovy odpovídající sečným rovinám jdoucím jednou z daných mimoběžek, jsou zřejmě křivky homothetické ku bodu o_2. Vedeme-li tedy pomocnou rovinu sečnou přímkou a a bodem X, bude nárys bodem X_2 procházející tečny t'_2 ku průsečné křivce v této rovině ležící rovnoběžný s tečnou t_2 cissoidy Diokletovy v bodu $P_{1,2}$. Je-li bod F průsečíkem přímky p_2 se stopou γ_1 centrálné roviny a bod G středem kružnice k, sestrojíme tečnu v bodě P_2 cissoidy Diokletovy nejvýhodněji, naneseme-li úsečku $\overline{FG}$ od bodu vratu Q_2 na pravou stranu na rovnoběžku s asymptotou do bodu D. Pak spojnice $\overline{DP_{1,2}}$ jest tečnou t_2 cissoidy Diokletovy v bodu $P_{1,2}$. Průsečík R tečný t'_2 s osou x náleží patrně tečné rovině τ. Vedeme-li jím tudíž stopu $N^\tau // \gamma_2$ roviny tečné, protne tato stopu N^σ v bodě C_2 tečny t_2 křivky ε_2. Tedy jest tečna

*) *Gino Loria*: Spezielle alg. u. Transcendente ebene Kurven, I.
F. Gomes Teixeira: Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches. T. I.

$t_2 \equiv X_2 C_2$. Uvedená konstrukce tečny jest značně jednoduchá, neboť vyžaduje po vytknutí příslušné tečny v bodě cissoidy Diokletovy vedení vždy pouze 2 přímek.

Rovněž k jednoduché konstrukci bodů i tečen dvojrohu přijdeme, volíme-li mimoběžky a a b okolo osy jejich o otočené o $\sphericalangle 45^0$ a ztotožníme-li (obr. 2.) současně průmětnu ν s rovinou centrálnou a zvolíme-li za rovinu sečnou rovinu totožnosti. Je-li bod P_1 bodem cissoidy Diokletovy o základní kružnici k a bodu vratu B_1 a značí-li p_1 půdorys přímky povrchové p konoidu jdoucí bodem P_1, obdržíme směr nárysného průmětu p_2 otočíme-li patrně přímku $p'_2 \equiv \overline{P_1 A_1}$ okolo A_1 o $\sphericalangle 45^0$. Nárys přímky p_2 tedy obdržíme,



Obr. 2.

vedeme-li vždy ku spojnici bodu A_1 s bodem P_1 cissoidy Diokletovy bodem o_2 přímku svírající s ní $\sphericalangle 45^0$. Průsečíky přímek p_2 a p'_2 naplní patrně kružnici l, jdoucí body o_2 a A_1, při čemž středový úhel příslušný tětivě $\overline{o_2 A_1}$ jest 90^0. Přicházíme tudíž k následující konstrukci dvojrohu: Bod P_1 cissoidy Diokletovy spojíme s bodem A_1 a průsečík N této spojnice s kružnicí l spojíme s bodem o_2. Pak protíná tato spojnice bodem P_1 vedenou rovnoběžku s asymptotou cissoidy Diokletovy v bodě X_2 dvojrohu.

Tečnu dvojrohu v bodě X_2 sestrojíme v tomto případě, otočíme-li především tečnu t'_2 cissoidy Diokletovy o 45^0. Vedeme-li tedy bodem A_1 rovnoběžku s t_2 protínající kružnici l v bodu R a se spojnicí $\overline{R o_2}$, udávající směr otočené tečny, vedeme bodem X_2 rovnoběžku t'_2, protne tato přímku a_2 v bodu C_2, jímž prochází hlavní přímka $h_2 // p_2$ roviny tečné τ konoidu v bodu X. Hlavní přímku roviny totožnosti ležící v půdorysně promítací rovině procházející přímkou a označme h'. Průsečík H_2 přímek h_2 a $h'_2 \equiv a_1$, jest tudíž bodem hledané tečny t_2. Tečna dvojrohu v bodě X_2 jest $t_2 \equiv X_2 H_2$.

Tečny v bodech X_2 můžeme v obr. 1. a 2. sestrojiti též pomocí geometrie kinematické, myslíme-li si v případě prvém dvojroh vytvořený pohybem proměnného trojúhelníka $P_{1,2} X_1 X_2$ a v případě druhém pohybem proměnného trojúhelníka $P_1 N X_2$.

Jinou konstrukci dvojrohu obdržíme, považujeme-li v obr. 2. za rovinu sečnou půdorysně promítací rovinu vedenou přímkou $g' \perp \pi$ konoidu. Z těchto rovin vytkněme rovinu σ' svírající s ν úhel 45^0. Nárysem průsečné křivky ε' jest patrně křivka shodná s ε_2 otočená o 90^0. Nárys X'_2 bodu X' křivky ε', ležící na přímce p konoidu, sestrojíme, vztyčíme-li v průsečíku přímky p_1 se stopou $\sigma_1' \equiv a_2$ kolmici ku ose x protínající přímku p_2 v bodě X'_2. Křivky ε_2 a ε'_2 jsou patrně orthogonálně souměrné ku přímce b_2 co ose. Obdržíme tudíž druhý průsečík Y_2 křivky ε_2 s přímkou p_1, otočíme-li bod X'_2 okolo průsečíku přímek p_1 a a_2 na pravo o 90^0. Platí tedy: $\sphericalangle X_2{}'o_2 K = \sphericalangle K o_2 Y_2$. Dospíváme ku zajímavé větě o dvojrohu: *Spojnice průsečíků přímky rovnoběžné s osou symmetrie dvojrohu s bodem o_2 svírají s tečnami v bodech vratu rovné úhly.*

Bod Y_2 obdržíme a k větě uvedené dospějeme též, sestrojíme-li průsečík přímky ${}^1p$, jejíž průmět jest ${}^1p_1 \equiv p_1$ s rovinou totožnosti. Protíná-li spojnice $A_1\, {}^1P_1$ kružnici l v bodu ${}^1N$, jest $\sphericalangle {}^1N A_1 K = \sphericalangle K A_1 N$, pročež tětivy $\overline{{}^1N K}$ a $\overline{K N}$ rameny těchto úhlů na kružnici l vymezené, jsou sobě rovny. Pak musí i $\sphericalangle {}^1N o_2 K = \sphericalangle K o_2 N$, neboť jsou to úhly obvodové kružnice l nad tětivami stejné délky. Totéž plyne přímo z obr. 1. použijeme-li ku konstrukci druhého průsečíku $P'_{1,2}$ cissoidy Diokletovy s přímkou p_1.

Z věty výše uvedené následuje, že spojíme-li body dvojrohu ležící na rovnoběžce s jeho osou symmetrie s bodem o_2 obdržíme dvojici paprsků, jež jsou tečnami v bodech vratu dvojrohu harmonicky odděleny. *Promítají se tudíž dvojice bodů na přímkách rovnoběžných s osou symmetrie dvojrohu z bodu o_2 paprsky involuce, jejíž dvojné paprsky jsou tečnami v bodech vratu dvojrohu.*

Sestrojíme-li symetrálu bodů X_2 a Y_2, protínající tečnu vratu b_2 v bodu M a osu dvojrohu v bodu ${}^1K$, můžeme úhly $\sphericalangle X_1 o_2 M = \sphericalangle M o_2 Y_2 = \alpha$ považovati za obvodové úhly nad tětivami $\overline{X_2 M}$ a $\overline{M Y_2}$. Pak leží body O_2, X_2 a Y_2 na kružnici s o středu ${}^1K$. *Tvoří tudíž kružnice jdoucí bodem o_2 a jednotlivými dvojicemi bodů dvojrohu, v nichž jest protnut rovnoběžkami s jeho osou souměrnosti, svazek kružnic dotýkajících se v bodě o_2.*

Při konstrukci naznačené v obr. 2. nemusíme používati oněch bodů cissoidy Diokletovy, jež zapadnou příliš daleko, nýbrž volíce libovolně půdorys p_1 přímky p, spustíme z jeho průsečíku J s kružnicí k kolmici ku x a průsečík E' této kolmice s osou x spojíme se stopou L_1 přímky p. Spustíme-li z bodu J kolmici ku $E' L_1$ musí pata její P'_1 ležeti na hledané přímce p_2, čímž jest tato stanovena, aniž bychom bod P_2 cissoidy Diokletovy vyznačovali. Odůvodnění jest patrno přímo z obrazce, uvážíme-li, že bod P_1 cissoidy Diokletovy též obdržíme, vztyčíme-li v průsečíku E přímky $B_1 P_1$ s asymptotou a kolmici k asymptotě protínající bodem vratu B_1 vedenou rovnoběžku s asymptotou v bodu S. Pak kolmice z bodu S ku $B_1 E$ spuštěná prochází bodem P_1 cissoidy Diokletovy.

O akustických spektrech.

Napsal *Bohuslav Hostinský*.

1. Představme si nějakou mechanickou soustavu, která se nachází ve stabilní rovnováze (n. př. několik tuhých těles, jež jsou určitým způsobem navzájem spojena nitmi nebo klouby a v pevných bodech zavěšena). Vychýlíme-li ji nepatrně z této polohy, vykonává kmitavý pohyb, při kterém souřadnice její bodů jsou vyjádřeny, ježto vyhovují soustavě differenciálních linearních rovnic s konstantními koëfficienty, vzorci tvaru

$$x = \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos r_k t + B_k \sin r_k t\right)$$

jakožto funkce času t. Číslo n udává počet stupňů volnosti, A_k a B_k jsou konstanty a veličiny $r_1, r_2 \ldots r_n$ jsou kořeny algebraické rovnice n-tého stupně (charakteristická rovnice). Časový průběh každé souřadnice x obdržíme dle toho superposicí n harmonických pohybů, jichž 2π násobné kmitočty (frekvence) jsou $r_1, r_2 \ldots r_n$. Souhrn těchto vlastních kmitočtů soustavy můžeme nazvati jejím mechanickým spektrem.

Pružné těleso považujeme za mechanickou soustavu o nekonečně velikém počtu stupňů volnosti, neboť okamžitý stav takového (kmitajícího) tělesa je definován výchylkami všech jeho částic z příslušných rovnovážných poloh. Již *Lagrange* uvažoval o limitním přechodu od mechanického systému s konečným počtem stupňů volnosti k pružnému tělesu a odvodil tak rovnici pro pohyb struny. Ukazuje se, že u struny soustava obyčejných differenciálních rovnic přechází v jedinou rovnici parciální (v případě pružného tělesa obdržíme obecně soustavu tří rovnic parciálních); charakteristická algebraická rovnice přechází v transcendentní rovnici, která má nekonečně mnoho kořenů. Výsledek je známý: struna může vydávati nekonečně mnoho vlastních tónů; je-li N kmitočet tónu základního, jsou kmitočty všech těch tónů

$$N,\ 2\,N,\ 3\,N, \ldots$$