Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Miloš Kössler

Integrál Cauchyův a Dirichletův problem v rovině

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 1, (1)–5

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109199

Integrál Cauchyův a Dirichletův problem v rovině.

Napsal *Miloš Kössler.*

V článcích prof. Lásky a Petra v tomto časopise ročník 42. „Integrál Poissonův jako přímý důsledek integrálu Cauchyova“, byl rozřešen problem Dirichletův pro kruh přímo z integrálu Cauchyova.

Chci ukázati, že methodou, které užil prof. Petr, lze řešiti jmenovaný problem pro každý jednoduše souvislý obor omezený analytickými oblouky. Objeví se, že úloha jest v podstatě své integrální rovnicí Fredholmovou *prvního* druhu, která se dá jednoduchým obratem převésti na rovnici *druhého* druhu a tedy i řešiti.

Budiž S jednoduše souvislý obor v rovině komplexní proměnné s omezený křivkou C, která se skládá z jediného uzavřeného a analytického oblouku.

Nechť zobrazuje funkce

$$s = t(\tau) = x(\varphi) + i\, y(\varphi)$$

vzájemně jednoznačně a konformně okolí obvodu jednotkové kružnici $\tau = e^{i\varphi}$ na okolí obvodu křivky C. Analyticky vyjádří se tento geometrický požadavek větou: Funkce $t(\tau)$ jest rozvinutelna v řadu Taylorovu v okolí každého bodu $\tau = e^{i\varphi}$ a při tom jest však splněno

$$|t'(e^{i\varphi})|^2 = x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) > 0.$$

Funkce $F(s)$ analytická v oboru S hoví integrálu Cauchy-ovu

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(t)\,dt}{t-s}$$

Jestliže si zvolíme *libovolnou* funkci $G(s)$, která jest analytická všude *vně* a na hranici oboru S v nekonečnu nulle se rovnající, bude

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{G(t)\,dt}{t-s},$$

pokud s leží v S. Sečtením rovnic obdržíme

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{H(t)\,dt}{t-s}, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

kdež $H(t) = F(t) + G(t)$.

Pokládáme-li v rovnici (1) $H(t)$ za neznámou a $F(s)$ za danou funkci, můžeme ji prohlásiti za integrální rovnici prvního druhu, která má nekonečný počet řešení, neboť $G(t)$ jest funkce *libovolná*. Tato mnohoznačnost zmizí, podrobíme-li funkci $H(t)$ vhodné podmínce další. Vyslovme ji takto:

Hledáme funkci $H(t)$, která nabývá na křivce C pouze reálných hodnot a hoví rovnici (1).*)

Předpokládejme prozatím, že taková funkce skutečně existuje a že jest spojitá na křivce C. Důsledky, které z předpokladu vyplynou, potvrdí nám existenci funkce.

Zvolme bod s tak blízko křivky C, že padne do oboru konformního zobrazení, zprostředkovaného rovnicí

$$s = t(\xi), \quad \xi < 1.$$

Zavedením proměnných τ a ξ přejde (1) ve tvar

$$F(t[\xi]) = \frac{1}{2\pi i} \int_1 \frac{2h(\tau)\, t'(\tau)\, d\tau}{t(\tau) - t(\xi)};$$

zde značí $2h(\tau) - H(t[\tau])$ a index *1* při integrálu, že integrace vztahuje se ke kružnici $\tau = 1$. Rozložme poslední rovnici ve tvar

$$F(t[\xi]) = \frac{1}{2\pi i} \int_1 \frac{2h(\tau)\, d\tau}{\tau - \xi} + \frac{1}{2\pi i} \int_1 2h(\tau)\, d\tau$$

$$\left[\frac{t'(\tau)}{t(\tau) - t(\xi)} - \frac{1}{\tau - \xi}\right] \ldots\ldots\ldots (2)$$

Podle toho co jsme řekli o funkci $t(\tau)$ jest hranatá závorka analytickou funkcí proměnné ξ v jistém mezikruží

$$1 < a > |\xi| > b < 1,$$

s možnou výjimkou jen v bodě $\xi = \tau$. Abychom seznali chování funkce v tomto bodě, užijeme rozvoje Taylorova

$$t(\xi) = t(\tau) + \frac{\xi - \tau}{1} t'(\tau) + \frac{(\xi - \tau)^2}{2'} t''(\tau) + \ldots\ldots$$

platného pro ξ blízské k τ. Z toho vypočteme snadno

$$\frac{t'(\tau)}{t'(\tau) - t(\xi)} - \frac{1}{\tau - \xi} = \frac{1}{2} \frac{t''(\tau)}{t'(\tau)} + (\xi - \tau).\ P(\xi - \tau),$$

kde $P(\xi - \tau)$ značí potenční řadu v $(\xi - \tau)$. Netvoří tedy bod $\xi = \tau$ výjimky. Zvolíme-li tedy bod $\xi = e^{i\psi}$ a bod ξ_1 v blízském jeho okolí a značíme-li hranatou závorku výrazu (2) prostě $[\tau, \xi]$ bude platiti rozvoj

$$[\tau, \xi_1] - [\tau, \xi] = (\xi_1 - \xi) \sum_{n=o}^{\infty} a_n(\tau, \xi)\, (\xi_1 - \xi)^n$$

*) Sestrojení takové funkce jest hlavní ideou citov. článku prof. Petra.

Nekonečný součet představuje při pevně zvoleném ξ analytickou funkci obou proměnných τ a ξ_1. Omezíme-li bod ξ_1 na jisté okolí bodu ξ a τ na obvod jednotkové kružnice, bude podle známých vlastností funkcí analytických

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tau, \xi)(\xi - \xi_1)^n \right| < M,$$

kdež M značí jistou konečnou konstantu, nezávislou na ξ_1 a na τ a tedy

$$|[\tau, \xi] - [\tau, \xi_1]| < |\xi - \xi_1| \cdot M.$$

Tuto okolnost vyjádříme slovy: Funkce $[\tau, \xi_1]$ jest v bodě $\xi_1 = \xi$ spojitou funkcí ξ_1 *stejnoměrně* vzhledem ku τ na kružnici $\tau = e^{i\varphi}$.*)

Vraťme se nyní k rovnici (2), zaveďme v ní označení $t = e^{i\varphi}$, $\xi = r e^{i\psi}$ a vypočteme reálnou část levé i pravé strany. Obdržíme po snadném počtu

$$u(r\cos\psi, r\sin\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{i\varphi})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\psi)+r^2}\,d\varphi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, h(e^{i\varphi})\left[1 + 2R\left\{\frac{t'(e^{i\varphi})e^{i\varphi}}{t(e^{i\varphi})-t(re^{i\psi})} - \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-re^{i\psi}}\right\}\right] \quad (2a)$$

označujíce znakem u reálnou část funkce $F(t[\xi])$ a symbolem $R\{\}$ reálnou část výrazu uvnitř závorky.

Nechť nyní konverguje číslo r k jedné. Levou stranu rovnice (2a) označíme pro $r = 1$ znakem $u(\psi)$; na pravé straně prvý integrál jest Poissonův a tedy konverguje k číslu $h(e^{i\psi})$. Druhý integrál označme znakem $J(r)$ a funkci uvnitř hranaté závorky $L(r, \varphi)$. Při tomto označení jest

$$\lim_{r\to 1} J(r) = \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} d\varphi\, h(e^{i\varphi})\,.\,L(r, \varphi)$$

Protože podle předešlého jest funkce $L(r, \varphi)$ v bodě $r = 1$ spojitou funkcí r stejnoměrně vzhledem k φ intervallu $(0, 2\pi)$ bude

$$\lim_{r\to 1} J(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, h(e^{i\varphi}) \lim_{r\to 1} L(r, \varphi).$$

Avšak výraz $\lim_{r\to 1} L(r, \varphi) = L(1, \varphi)$ a tedy uvážíme-li, že

$$R\left\{\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-e^{i\psi}}\right\} = \frac{1}{2},$$

obdržíme $\lim_{r\to 1} J\,r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, h(e^{i\varphi})\, R\left\{\frac{t'(e^{i\varphi})e^{i\varphi}}{t(e^{i\varphi})-t(e^{i\psi})}\right\}$

Rovnice (2a) přejde tedy pro $r = 1$. v integrální rovnici *druhého* druhu

*) Viz Petr: Počet integrální str. 203. Důkaz tam provedený přenese se snadno na komplexní proměnné.

$$u(\psi) = h(e^{i\psi}) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, h(e^{i\varphi})\, R\left\{\frac{t'(e^{i\varphi})\, e^{i\varphi}}{t(e^{i\varphi}) - t(e^{i\psi})}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

pokládáme-li u (ψ) za danou a h ($e^{i\psi}$) za hledanou funkci o reálné hodnotě pro všechna ψ intervalu (o, 2π). Dříve než vyvodíme důsledky z tohoto faktu, všimněme si, jaký geometrický význam má jádro rovnice. Označme písmenou ϱ vzdálenost bodů $t(e^{i\varphi})$ a $t(e^{i\psi})$ a budiž n vnitřní normála a $d\sigma$ element oblouku křivky C v bodě $t(e^{i\varphi})$. Již dříve zavedli jsme označení

$$t(e^{i\varphi}) = x(\varphi) + i\, y(\varphi)$$

a tedy jest $t'(e^{i\varphi}) \cdot i\, e^{i\varphi} = x'(\varphi) + i\, y'(\varphi)$.

Tak vypočteme

$$R\left\{\frac{t'(e^{i\varphi})\, e^{i\varphi}}{t(e^{i\varphi}) - t(e^{i\psi})}\right\} = \frac{x'(\varphi)\,[y(\psi) - y(\varphi)] - y'(\varphi)\,[x(\psi) - x(\varphi)]}{[x(\varphi) - x(\psi)]^2 + [y(\varphi) - y(\psi)]^2}$$

a z toho elementární úvahou geometrickou

$$R\left\{\;\right\} = \frac{\cos(n, \varrho)}{\varrho}\, \frac{d\sigma}{d\varphi}, \quad \ldots \quad (4)$$

kdež (n, ϱ) značí úhel sevřený délkami n, ϱ. Jádro integrální rovnice (3) jest spojité a konečné. Jestliže tedy u (ψ) jest spojitá funkce a není-li $\frac{1}{\pi}$ charakteristickou konstantou rovnice (3) existuje jedna jediná spojitá funkce h ($e^{i\psi}$), která hoví integrální rovnici (3). Tato rovnice nijak se neliší od rovnice, ku které dospíváme, řešíme-li problem Dirichletův vycházejíce z theorie logaritmického potentiálu. Výhoda našeho postupu spočívá v tom, že nemusíme užívati vlastností tohoto potentiálu.

Výsledek celého počtu můžeme shrnouti ve věty:

Jestliže jsou předepsány na křivce C hodnoty spojité funkce u (ψ), definuje rovnice (3) jedinou spojitou funkci h ($e^{i\psi}$). Tato funkce určuje opět prostřednictvím rovnice

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{2h(\tau)\, t'(\tau)}{t(\tau) - s}\, d\tau \quad \ldots \quad (5)$$

jednoznačně funkci F (s) analytickou v oboru S, jejíž reálná část nabývá na hranici C hodnot u (ψ).

Předpokládali jsme dosud, že křivka C se skládá z jediného analytického oblouku. Jestliže ji nyní sestavíme z několika takových oblouků, nastane jen ta změna, že v rovnici (3) $t'(e^{i\varphi})$ bude sice všude konečné avšak v několika bodech nespojité. Jádro rovnice (3) jest pak pouze spojitým téměř všude; tím se však výsledek počtu vůbec nezmění.

Kdybychom uvažovali problem vnější, to jest, hledali funkci harmonickou všude vně křivky C, která jest v nekonečnu rovna nulle a na křivce C nabývá hodnot $u(\psi)$, dospěli bychom opět k integrální rovnici lišící se od (3) pouze záporným znaménkem u integrálu.

Získaných výsledků použijeme k řešení úlohy z theorie konformního zobrazování. Jest známým zjevem, že některé uzavřené analytické křivky rozdělují celou rovinu na dvě části tak, že konformní zobrazení *jedné* z těchto částí na jednotkovou kružnici jest velmi snadné, kdežto zobrazení druhé části poskytuje značné obtíže. Připomenu jen ellipsu v základní poloze o poloosách a, b. Funkce

$$s = \frac{a+b}{2}\,\tau + \frac{a-b}{2}\cdot\frac{1}{\tau}$$

zobrazuje konformně *vnějšek* a obvod ellipsy v rovině s na kruh $|\tau| \leq 1$. Zobrazení vnitřku ellipsy vyžaduje při obyčejném postupu značného početního aparátu.

Formulujme si úlohu následovně:

Vnějšek a obvod křivky C zobrazen jest na jednotkovou kružnici $|\tau| \leq 1$ konformně funkci $s = t(\tau)$. Hledáme konformní zobrazení vnitřku křivky C na kružnici jednotkovou.

Označme znaky a a z pevný a proměnný bod uvnitř křivky C. Abychom našli *Greenovu* funkci oboru, musíme sestrojiti takovou funkci harmonickou, která nabývá na křivce C hodnot

$$log\,|\,t(\tau) - a\,|\,.$$

Klademe tedy v rovnici (3)

$$u(\psi) = log\,|\,t(e^{i\psi}) - a\,|$$

a vypočteme příslušné $h(e^{i\psi})$, Pomocí tohoto h vypočteme užívajíce rovnice (5) funkci

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{2\,h(\tau)\,t'(\tau)\,d\tau}{t(\tau) - z}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

jejíž reálná část má vlastnost hledanou. Označíme-li funkci Greenovu γ a její sdruženou funkci δ bude patrně

$$\gamma + i\,\delta = f(z) - log\,(z-a)$$

a tedy konformní zobrazení, které hledáme, má tvar

$$\tau = (z-a)\,.\,e^{-f(z)}\,\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Tato funkce zobrazuje vnitřek křivky C na jednotkovou kružnici $|\tau| < 1$.

Omezili jsme se ve svých úvahách na analytické křivky hraničné. Výsledek jest však platným i pro křivky pouze regulární ba i pro obory omezené křivkami ještě obecnějšími. O tom chci pojednati jindy.