

Karel Dušl

O isogonálním zobrazení čtyř thetafunkcí Jacobiho, jichž modul jest číslo ryze imaginární

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 50 (1921), No. 2-3, 102--115

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/109183>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1921

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

protivného znaménku čísla a_n aneb a_{n-1} rovno nulle při $a_n \geq 0$) má první z těchto rovnic o jeden kořen s reální částí kladnou více než rovnice druhá.

Věta 3. *Rovnice sudého stupně*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

má tolik kořenů s reální částí kladnou, kolik rovnice stupně o jednu menšího

$$x^{n-1} + (-a_3 + a_2 a_1) x^{n-2} + \frac{a_3}{a_1} x^{n-3} + (-a_5 + a_4 a_1) x^{n-4} + \frac{a_5}{a_1} x^{n-5} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_1} x + a_n a_1 = 0$$

má těch kořenů, je-li a_1 kladné. Je-li a_1 záporné, má první rovnice o jeden kořen s reální částí kladnou více než rovnice druhá.

Jak by v této větě bylo lze docílití zjednodušení použitím věty 1. (tím, že by se odstranily zlomky v rovnici druhé), jest na snadě. Rovněž jest patrný význam věty 2. a 3. pro praktický výpočet počtu kořenů, jichž reálná část jest kladná. Nebylo by nesnadno odvodití tyto věty pomocí věty Cauchyovy v úvodu citované.

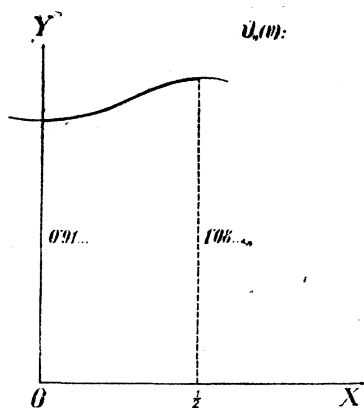
O isogonálním zobrazení čtyř thetafunkcí Jacobiho, jichž modul jest číslo ryze imaginární.

Napsal K. Dušl.

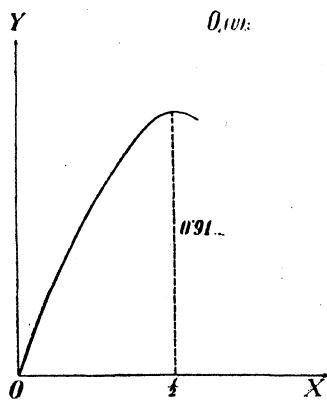
Z trigonometrických rozvojų čtyř Jacobiho thetafunkcí plyne bezprostředně, že thetafunkce, jichž modul jest číslo ryze imaginární, tedy $\tau = it$ (při čemž musí $t > 0$, aby thetařady konvergovaly) mají pro reálné hodnoty argumentu průběh veskrze reálný, takže lze je graficky znázornití. Při tom stačí vyšetřití dvě z těchto thetafunkcí, ježto jest, jak známo, pro každé v : $\vartheta_3(v) = \vartheta_0(v + \frac{1}{2})$, $\vartheta_2(v) = \vartheta_1(v + \frac{1}{2})$. Znázorníme-li (za pomoci několika vět z elementární theorie funkcí elliptických*)

*) Krause-Naetsch: „Theorie der elliptischen Funktionen“. Lipsko. 1912. Str. 64 a násl.

\ průběh obou funkcí $\vartheta_0(v)$ a $\vartheta_1(v)$ získáme grafy asi takovoto podoby:



Obr. 1.



Obr. 2.

Křivka $\vartheta_0(v)$ má v intervalu $(0, \frac{1}{2})$ jeden bod inflexní. Celkový průběh obou křivek určen jest vztahy:

$$\begin{aligned} \vartheta_0\left(\frac{1}{2} - v\right) &= \vartheta_0\left(\frac{1}{2} + v\right), & \vartheta_1\left(\frac{1}{2} - v\right) &= \vartheta_1\left(\frac{1}{2} + v\right) \\ \vartheta_0(v + 1) &= \vartheta_0(v), & \vartheta_1(v + 1) &= -\vartheta_1(v) \\ \vartheta_0(-v) &= \vartheta_0(v), & \vartheta_1(-v) &= -\vartheta_1(v). \end{aligned} \quad (1)$$

Funkce $\vartheta_0(v)$ zůstává tedy stále kladnou, kdežto funkce $\vartheta_1(v)$ mění znamení jako funkce $\sin \pi v$. Obrazec 1. a 2. nakreslen jest pro thetafunkce, jichž modul

$$\tau = i.$$

Speciálním tímto případem budeme se *i* nadále zabývat. Tu vypočteme především:

$$\begin{aligned} \vartheta_0(0) &= 1 - 2e^{-\pi} + 2e^{-4\pi} - 2e^{-9\pi} + \dots = 0.9135\overline{76} \dots \\ \vartheta_0\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 + 2e^{-\pi} + 2e^{-4\pi} + 2e^{-9\pi} + \dots = 1.0864\overline{36} \dots \\ \vartheta_1\left(\frac{1}{4}\right) &= 2e^{-\frac{\pi}{4}} + 2e^{-\frac{9\pi}{4}} + 2e^{-\frac{25\pi}{4}} + \dots = 0.9135\overline{22} \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Ostatně vyplyne ihned z následujícího přesně:

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2}, i\right) = \vartheta_0(0, i) = 0.9135 \dots \quad (3)$$

Vyšetřeme nyní průběh funkcí $\vartheta_0(v)$ a $\vartheta_1(v)$ také při komplexních hodnotách argumentu v .

Přechod od thetafunkcí argumentů reálných k thetafunkcím argumentů imaginárných sprostředkují určité rovnice při lineární transformaci thetafunkcí. Jsou to vztahy:

$$e^{-\pi i \frac{v^2}{\tau}} \vartheta_\alpha \left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau} \right) = C \vartheta_\beta(v, \tau)$$

$$\alpha = 0, 2, 3; \quad \beta = 2, 0, 3 \quad (I)$$

$$e^{-\pi i \frac{v^2}{\tau}} \vartheta_1 \left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau} \right) = -i C \vartheta_1(v, \tau).$$

Charakteristiky 0, 2 se vzájemně zaměňují. Konstanta C má ve všech čtyřech rovnicích tutéž hodnotu: $C = \sqrt{-i\tau}$, při čemž odmocninu nutno jest bráti kladně v části reálné. Vztahy (I) se velmi zjednoduší, uvažujeme-li thetafunkce, jichž modul $\tau = i$. Pak jest především konstanta $C = 1$ a thetafunkce po *obou* stranách transformačních rovnic vztahují se k témuž modulu i . Rovnice (I) zní pak upraveny:

$$\vartheta_\alpha(iv, i) = e^{\pi v^2} \vartheta_\beta(v, i)$$

$$\alpha = 0, 2, 3; \quad \beta = 2, 0, 3 \quad (II)$$

$$\vartheta_1(iv, i) = -i e^{\pi v^2} \vartheta_1(v, i).$$

Patrně thetafunkce indexů 0, 2, 3 zůstávají pro ryze imaginární hodnoty proměnné *reálnými*, naproti tomu funkce theta-jedna stává se *ryze imaginárnou*. Klademe-li v rovnicích (II) $v = 0$ nabudeme vztahu:

$$\vartheta_0(0, i) = \vartheta_2(0, i). \quad (4)$$

Z theorie Jacobiho thetafunkcí jest známo, že pro jakýkoli modul τ jest:

$$\vartheta_3(0, \tau) = \vartheta_0\left(\frac{1}{2}, \tau\right)$$

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = \vartheta_2(0, \tau). \quad (5)$$

Se zřetelem k rovnici (4) jest tudíž

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2}, i\right) = \vartheta_2(0, i) = \vartheta_0(0, i). \quad (6)$$

Připomeňme si dále serii rovnic odpovídajících zvětšení proměnné o poloviny period. Pišme je ve tvaru:

$$\begin{aligned}\vartheta_0(v+ni) &= (-1)^n e^{n^2\pi} e^{-2n\pi iv} \vartheta_0(v) \\ \vartheta_0(v+\frac{1}{2}+ni) &= e^{n^2\pi} e^{-2n\pi iv} \vartheta_3(v) \\ \vartheta_0(v+(\frac{1}{2}+n)i) &= (-1)^n i e^{(n+\frac{1}{2})^2\pi} e^{-2(n+\frac{1}{2})\pi iv} \vartheta_1(v) \\ \vartheta_0(v+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+n)i) &= e^{(n+\frac{1}{2})^2\pi} e^{-2(n+\frac{1}{2})\pi iv} \vartheta_2(v)\end{aligned}\quad (\text{III})$$

Obdobně pro funkci theta-jedna:

$$\begin{aligned}\vartheta_1(v+ni) &= (-1)^n e^{n^2\pi} e^{-2n\pi iv} \vartheta_1(v) \\ \vartheta_1(v+\frac{1}{2}+ni) &= e^{n^2\pi} e^{-2n\pi iv} \vartheta_2(v) \\ \vartheta_1(v+(\frac{1}{2}+n)i) &= (-1)^n i e^{(n+\frac{1}{2})^2\pi} e^{-2(n+\frac{1}{2})\pi iv} \vartheta_0(v) \\ \vartheta_1(v+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+n)i) &= e^{(n+\frac{1}{2})^2\pi} e^{-2(n+\frac{1}{2})\pi iv} \vartheta_3(v).\end{aligned}\quad (\text{IV})$$

Rovnice (III) a (IV) vztahují se k thetafunkcím modulu i . Číslo n jest celistvé, libovolné číslo. —

V rovnicích (III) a (IV) položme nejprve $v=0$ a vezměme zřetel ku vztahům (5) a (6); tak nalezneme pro celistvé číslo n

$$\begin{aligned}\vartheta_0(ni) &= (-1)^n e^{\pi n^2} \vartheta_0(0), & \vartheta_1(ni) &= 0 \\ \vartheta_0(\frac{1}{2}+ni) &= e^{\pi n^2} \vartheta_0(\frac{1}{2}), & \vartheta_1(\frac{1}{2}+ni) &= e^{\pi n^2} \vartheta_0(0) \\ \vartheta_0(\frac{i}{2}+ni) &= 0, & \vartheta_1(\frac{i}{2}+ni) &= i(-1)^n e^{\pi(n+\frac{1}{2})^2} \vartheta_0(0) \\ \vartheta_0(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}+ni) &= e^{\pi(n+\frac{1}{2})^2} \vartheta_0(0), & \vartheta_1(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}+ni) &= e^{\pi(n+\frac{1}{2})^2} \vartheta_0(\frac{1}{2})\end{aligned}\quad (\text{V})$$

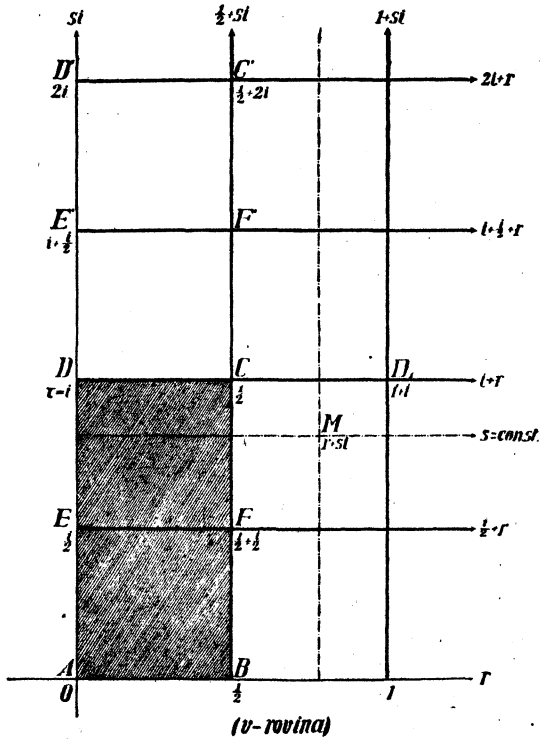
V těchto rovnicích kladme dále $v=r$, resp. $v=si$, kde čísla r, s znamenají libovolné hodnoty reálné (celistvé, lomené, nebo iracionální) a thetafunkce na pravých stranách vyjadřeme, kde je toho potřeba dle transformačních rovnic (II). Krom toho upotřebíme vztahů (4)–(6). Tak vychází pro reálné hodnoty r a s soustava rovnic:

$$\begin{aligned}\vartheta_0(si) &= e^{\pi s^2} \vartheta_1(\frac{1}{2}-s) \\ \vartheta_0(ni+r) &= (-1)^n e^{\pi n^2} e^{-2n\pi ir} \vartheta_0(r) \\ \vartheta_0(\frac{i}{2}+ni+r) &= i(-1)^n e^{(n+\frac{1}{2})^2\pi} e^{-2(n+\frac{1}{2})\pi ir} \vartheta_1(r) \\ \vartheta_0(\frac{1}{2}+si) &= e^{\pi s^2} \vartheta_0(\frac{1}{2}-s).\end{aligned}\quad (\text{VI})$$

Analogicky pro funkci ϑ_1 :

$$\begin{aligned}\vartheta_1(si) &= i e^{\pi s^2} \vartheta_1(s) \\ \vartheta_1(ni+r) &= (-1)^n e^{\pi n^2} e^{-2n\pi ir} \vartheta_1(r) \\ \vartheta_1\left(\frac{i}{2} + ni+r\right) &= i (-1)^n e^{(n+\frac{1}{2})^2 \pi} e^{-2(n+\frac{1}{2})\pi ir} \vartheta_0(r) \\ \vartheta_1\left(\frac{1}{2} + si\right) &= e^{\pi s^2} \vartheta_0(s).\end{aligned}\tag{VI'}$$

Naznačme si nyní síť period obou thetafunkcí.



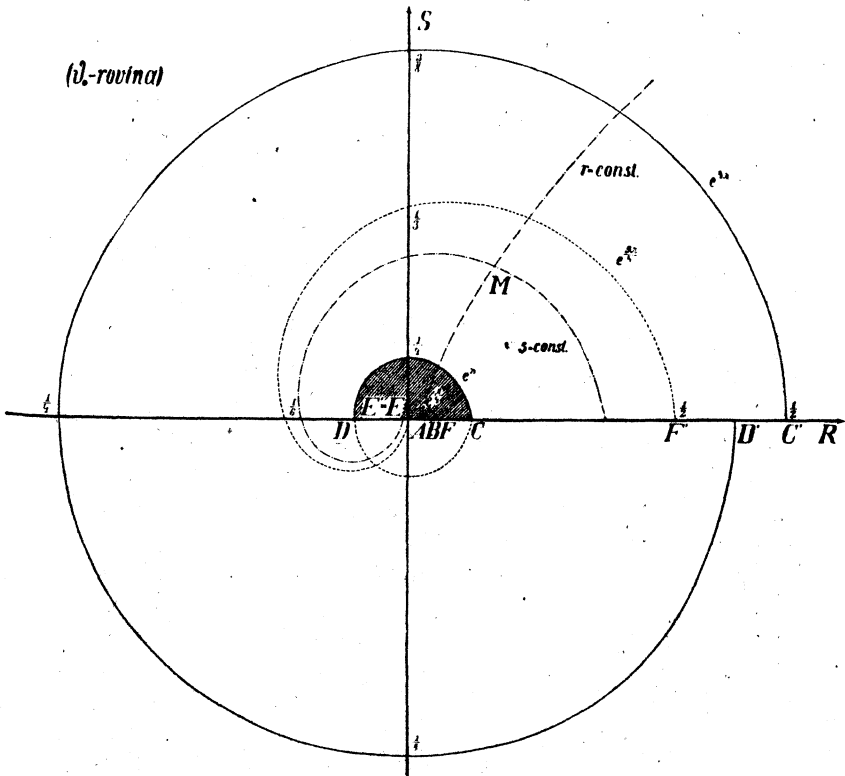
(obr. 3.)

Rovnice (V) podávají hodnoty thetafunkcí $\vartheta_0(v)$ a $\vartheta_1(v)$ v mřížkových bodech této sítě period, rovnice (VI) vyjadřují hodnoty obou thetafunkcí podél vodorovných a svislých čar této sítě procházejících body: $0, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}$ a body s nimi kongruentními (mod. 1, i). Je pak na snadě znázorniti si graficky průběh obou theta-

funkcí podél vytčených přímek. Patrně vystačíme při tom úplně s reálnými hodnotami thetafunkcí (viz obr. 1. a 2.) a číselnými faktory snadno vypočítatelnými. Provedme nejprve zobrazení pro obě funkce v pruhu omezeném svislicemi: osou $r=0$ a přímkou $r=\frac{1}{2}$ a to až do $n=2$ dle rovnice (VI). Použijme pořadnic dle obrázců (1) a (2) a vypočtíme mimo to:

$$\begin{aligned} e^\pi &= 23.14 \dots \\ e^{\frac{\pi}{4}} &= 2.193 \dots \\ e^{\frac{3\pi}{4}} &= 1174.5 \dots \\ e^{4\pi} &= 286.750 \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Tak dojdeme nejprve k zobrazení funkce $\vartheta_0(v)$:



(obr. 4.)

K obr. 4. podotýkám nejprve, že není proveden celý ve stejném měřítku, Tak jest dle výpočtu:

$$\overline{OA} = 0.91 \dots, \overline{OB} = 1.08 \dots, \overline{OF} = 2.01 \dots, \overline{OD} = -21.05 \dots, \\ \overline{OC} = 23.14 \dots, \overline{OF'} = 1068 \dots, \overline{OD'} = 260.000 \dots, \overline{OC'} = 308.000 \dots,$$

Jest tedy obrazec pouze schematický. Důležitější nežli velikost jest tvar křivek. V rovnicích (VI) oddělme reálnou a imaginární část na pravé straně. I bude pro křivky znázornění na obrázci 4.:

$$\vartheta_0(r + is) = R_0(r, s) + iS_0(r, s). \quad (\text{VII})$$

Specielně:

$$\begin{aligned} \vartheta_0\left(\frac{i}{2} + r\right) &= e^{\frac{\pi}{4}} \vartheta_1(r) (\sin \pi r + i \cos \pi r) \\ \vartheta_0(i + r) &= e^{\pi} \vartheta_0(r) (-\cos 2\pi r + i \sin 2\pi r) \\ \vartheta_0\left(i + \frac{i}{2} + r\right) &= e^{\frac{3\pi}{4}} \vartheta_1(r) (-\sin 3\pi r - i \cos 3\pi r) \\ \vartheta_0(2i + r) &= e^{4\pi} \vartheta_0(r) (\cos 4\pi r - i \sin 4\pi r). \end{aligned} \quad (8)$$

V obr. 4. vyznačeny jsou podél křivek ony hodnoty proměnné r , při nichž se thetafunkce stává reálnou, resp. ryze imaginární. Srovnáme-li obr. 3. a 4. nalézáme následující:

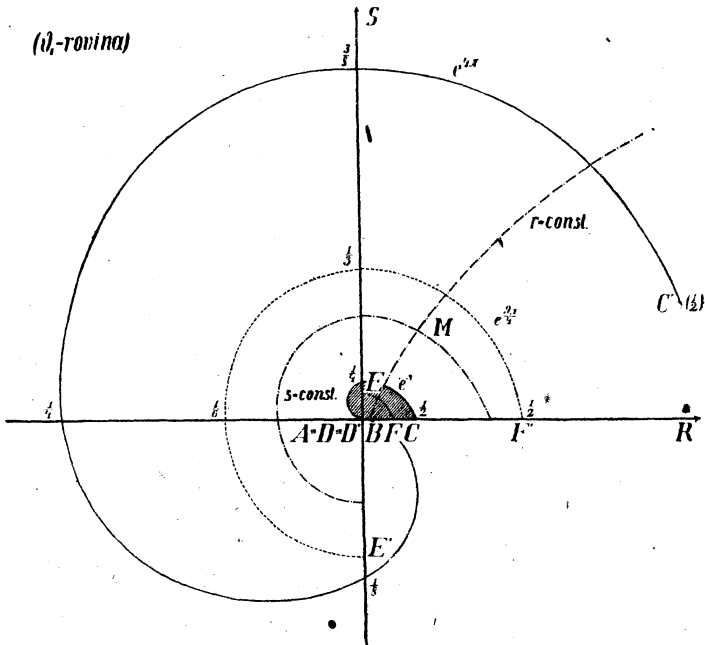
Oběma *svislým* přímkám: $r = 0$ a $r = \frac{1}{2}$ odpovídají části *reálné osy* a to tak, že s rostoucím s vzdalují se příslušné body DC (EF) od počátku, zůstávajíc střídavě po jedné a po obou stranách imaginární osy S . *Reálné úsečky* \overline{AB} (obr. 3.) přísluší *reálná úsečka* \overline{AB} (obr. 4.) *Vodorovným úsečkám* \overline{CD} , $\overline{C'D'}$, \overline{EF} , $\overline{E'F'}$ atd. přísluší *křivky definované rovnicemi* (8). Jsou to spirály, řekněme *thetaspirály*, skládající se (viz rovn. VI.) při rostoucím číslu n čím dále z většího počtu závitů. Spirály jsou *dvojího* charakteru: jedny počínají v počátku: průvodič každého bodu jest úměrný funkci $\vartheta_1(r)$, druhé mají počátek, řídíce se funkcí $\vartheta_0(r)$. Jest totiž pro libovolné celé číslo n obecně:

$$\begin{aligned} R_0(r, n) &= (-1)^n e^{\pi n^2} \vartheta_0(r) \cos 2n\pi r \\ S_0(r, n) &= (-1)^{n+1} e^{\pi n^2} \vartheta_0(r) \sin 2n\pi r \\ R_0\left(r, n + \frac{1}{2}\right) &= (-1)^{n+1} e^{\pi\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \vartheta_1(r) \sin (2n+1)\pi r \\ S_0\left(r, n + \frac{1}{2}\right) &= (-1)^{n+1} e^{\pi\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \vartheta_1(r) \cos (2n+1)\pi r. \end{aligned} \quad (\text{VIII})$$

Vyšetřeme nyní, jak probíhají hodnoty této thetafunkce v *ostatních pruzích*, omezených přímkami $r = \frac{1}{2}$, $r = 1$, $r = \frac{3}{2}$, $r = 2$ atd., $r = -\frac{1}{2}$, $r = -1$, $r = -\frac{3}{2}$, $r = -2$ atd.

Přihlédneme-li k rovnicím (1) seznáme snadno z rovnice (VIII) platnost vztahů:

$$\begin{aligned} R_0\left(\frac{1}{2} + r, n\right) &= R_0\left(\frac{1}{2} - r, n\right) \\ S_0\left(\frac{1}{2} + r, n\right) &= -S_0\left(\frac{1}{2} - r, n\right) \\ R_0\left(\frac{1}{2} + r, n + \frac{1}{2}\right) &= R_0\left(\frac{1}{2} - r, n + \frac{1}{2}\right) \\ S_0\left(\frac{1}{2} + r, n + \frac{1}{2}\right) &= -S_0\left(\frac{1}{2} - r, n + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (9)$$



(Obr. 5.)

Jsou tedy křivky příslušné pruhům po obou stranách přímek $r = \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$, a t. d. — *souměrné ku ose reálné*. Jedna z těchto křivek naznačená tečkovaně na obr. 4. (Úsečka CD_1).

Jelikož jest zcela obecně:

$$\vartheta_0(v \pm 1) = \vartheta_0(v)$$

$$\vartheta_0(-v) = \vartheta_0(v)$$

bude průběh křivek příslušících pruhům ($r = 1, 2$), ($r = 2, 3$), ($r = 0, -1$), ($r = -1, -2$) atd. úplně shodný s pruhem prvním. Tím jest vyšetřen průběh funkce $\vartheta_0(v)$ zatím pro některé zvláštní hodnoty argumentů. Zobrazme nyní druhou z uvažovaných funkcí *t. j.* $\vartheta_1(v)$: (obr. 5.)

Obraz 5. jest rovněž schematický. Dle výpočtu by mělo býti:

$$\overline{AB} = 1.086 \dots, \overline{AE} = 2.01 \dots, \overline{AF} = 2.37 \dots, \overline{AC} = 21.05 \dots, \\ \overline{AE'} = 1068 \dots, \overline{AF'} = 1268 \dots, \overline{AC'} = 260.000 \dots$$

To je ovšem v jednom obrázci neproveditelné. O tvaru křivek získáme si však i z obrazce 5. náležitý pojem.

Analogicky, jako dříve píšme:

$$\vartheta_1(r + is) = R_1(r, s) + i S_1(r, s).$$

Pro křivky vyznačené na obrázci jest:

$$\begin{aligned} \vartheta_1\left(\frac{i}{2} + r\right) &= e^{\frac{\pi}{4}} \vartheta_0(r) (\sin \pi r + i \cos \pi r) && (EF) \\ \vartheta_1(i + r) &= e^{\pi} \vartheta_1(r) (-\cos 2\pi r + i \sin 2\pi r) && (CD) \quad (10) \\ \vartheta_1\left(i + \frac{i}{2} + r\right) &= e^{\frac{9\pi}{4}} \vartheta_0(r) (-\sin 3\pi r - i \cos 3\pi r) && (E'F') \\ \vartheta_1(2i + r) &= e^{4\pi} \vartheta_1(r) (\cos 4\pi r - i \sin 4\pi r) && (C'D') \end{aligned}$$

Pro libovolné celé číslo n jest obecně:

$$\begin{aligned} R_1(r, n) &= (-1)^n e^{\pi n^2} \vartheta_1(r) \cos 2n\pi r \\ S_1(r, n) &= (-1)^{n+1} e^{\pi n^2} \vartheta_1(r) \sin 2n\pi r \\ R_1\left(r, n + \frac{1}{2}\right) &= (-1)^{n+1} e^{\pi\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \vartheta_0(r) \sin (2n + 1)\pi r \\ S_1\left(r, n + \frac{1}{2}\right) &= (-1)^{n+1} e^{\pi\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \vartheta_0(r) \cos (2n + 1)\pi r \end{aligned} \quad (IX)$$

Vezmeme-li mimo to zřetel k první a poslední z rovnic (VI) získáme náležitý obraz o průběhu křivek příslušících *prvnímu* pruhu ($r = 0, \frac{1}{2}$ viz obr. 3.). *Svislé* přímce: $r = 0$ odpovídá *imaginární* osa $R_1 = 0$ a to tak, že příslušné body E, E' vzdalují se s rostoucím n od osy reálné, zůstávajíce střídavě po obou jejich stranách. *Přímce* $r = \frac{1}{2}$ odpovídá *reálná* osa $S_1 = 0$ a to od bodu B na pravo. — *Reálným hodnotám proměnné odpovídá úsečka* \overline{AB} . *Vodorovným úsečkám* $\overline{CD}, \overline{C'D'}$,

atd. odpovídají *thetaspirály počínající v počátku* (nullové body funkce $\vartheta_1(v)$: $m + ni$), vodorovným úsečkám \overline{EF} , $\overline{E'F'}$ atd. *thetaspirály druhého druhu*, řídicí se funkcí $\vartheta_0(v)$. Jelikož jest analogicky, jako pro předešlou thetافunkci:

$$\begin{aligned} R_1\left(\frac{1}{2} + r, n\right) &= R_1\left(\frac{1}{2} - r, n\right) \\ S_1\left(\frac{1}{2} + r, n\right) &= -S_1\left(\frac{1}{2} - r, n\right) \\ R_1\left(\frac{1}{2} + r, n + \frac{1}{2}\right) &= R_1\left(\frac{1}{2} - r, n + \frac{1}{2}\right) \\ S_1\left(\frac{1}{2} + r, n + \frac{1}{2}\right) &= -S_1\left(\frac{1}{2} - r, n + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

avšak pro záporné hodnoty argumentu:

$$\vartheta_1(-v) = -\vartheta_1(v).$$

budou křivky příslušné *dalšímu pruhu* ($r = \frac{1}{2}, 1$) sice opět *souměrné* k nakresleným dle osy reálné, v pruzích: ($r = 1, 2$), ($r = 3, 4$) ... ($r = 0, -1$) ($r = -2, -3$) ... však budou křivky *souměrné* ke křivkám, celému pruhu ($r = 0, 1$) odpovídajícím, *dle počátku, jakožto středu*. To odpovídá *lichosti* funkce $\vartheta_1(v)$. Tak jsme i pro funkci $\vartheta_1(v)$ vyšetřili průběh jejich hodnot pro některé zvláštní hodnoty proměnné.

Průběh obou thetافunkcí pro obecné komplexní hodnoty argumentů. Pišme definiční rozvoje obou thetافunkcí:

$$\begin{aligned} \vartheta_0(r + si, \tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{\pi i r k^2} e^{2k\pi i (r+si)} \\ \vartheta_1(r + si, \tau) &= i \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{\pi i \tau (k+\frac{1}{2})^2} e^{(2k+1)(r+si)\pi i} \end{aligned} \quad (12)$$

Kladme tu $\tau = i$ a oddělme reálnou a ryze imaginární část obou thetافrad. Tak nalezneme:

$$\begin{aligned} \vartheta_0(r + si, i) &= R_0(r, s) + i S_0(r, s) \\ \vartheta_1(r + si, i) &= R_1(r, s) + i S_1(r, s) \end{aligned} \quad (X)$$

při čemž jest:

$$\begin{aligned} R_0(r, s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-\pi k(k+2s)} \cos 2k\pi r \\ S_0(r, s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-\pi k(k+2s)} \sin 2k\pi r \\ R_1(r, s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-\pi \frac{2k+1}{2} (\frac{2k+1}{2} + 2s)} \sin (2k+1)\pi r \\ S_1(r, s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-\pi \frac{2k+1}{2} (\frac{2k+1}{2} + 2s)} \cos (2k+1)\pi r \end{aligned} \quad (XI)$$

Vytkněme některé vlastnosti těchto řad:

1. O veličinách R, S jest především patrné, že jakožto reálná a imaginární část funkce komplexní proměnné splňují rovnice:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R_\alpha}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 R_\alpha}{\partial s^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 S_\alpha}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 S_\alpha}{\partial s^2} &= 0 \\ \alpha &= 0, 1.\end{aligned}\tag{13}$$

2. Pro zvláštní hodnoty obou proměnných r, s přecházejí řady R, S v hodnoty dříve nalezené.

Tak jest na př. pro index nulla:

$$\begin{aligned}R_0(r, 0) &= \vartheta_0(r), & S_0(r, 0) &= 0 \\ R_0(0, s) &= \vartheta_0(is), & S_0(0, s) &= 0 \\ R_0(0, n + \frac{1}{2}) &= 0, & S_0(0, n + \frac{1}{2}) &= 0 \\ R_0(\frac{1}{2}, n) &= \vartheta_0(\frac{1}{2} + ni), & S_0(\frac{1}{2}, n) &= 0\end{aligned}\tag{14}$$

Při tom n znamená tu libovolné číslo celé. Hodnoty tyto lze též *direktně* nalézt transformací řad (XI). Dokažme na př., že

$$R_0(0, n + \frac{1}{2}) = 0.$$

Pišme:

$$R_0(0, n + \frac{1}{2}) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-\pi k(k+2n+1)}.\tag{15}$$

Stačí nyní uvážiti, že členy řady (15) pro něž:

$$\begin{aligned}k_1 &= -k \\ k_2 &= k - (2n + 1)\end{aligned}$$

jsou stejné, znamenají však opačných. Protože také $S_0(0, n + \frac{1}{2}) = 0$ tedy odpovídá hodnotám:

$$v = m + ni + \frac{i}{2}. \quad (m, n \text{ čísla celá})$$

nullová hodnota thetafunkce $\vartheta_0(v, i)$, jakož známo.

3. Z funkcionálních rovnic pro thetafunkce plyne bezprostředně na př. pro funkce R_0, S_0 :

$$\begin{aligned}R_0(r+1, s) &= R_0(r, s) \\ S_0(r+1, s) &= S_0(r, s) \\ R_0(r, s+1) &= e^{2\pi s} [R_0(r, s) \cos 2\pi r + S_0(r, s) \sin 2\pi r] \\ S_0(r, s+1) &= e^{2\pi s} [S_0(r, s) \cos 2\pi r - R_0(r, s) \sin 2\pi r]\end{aligned}\tag{XII}$$

a obdobné relace pro index jedna. —

4. Ježto jest:

$$R_0(-r, s) = R_0(r, s) \quad (16)$$

$$S_0(-r, s) = -S_0(r, s) \quad \text{jak bezprostředně}$$

$$\text{patrnó a dále: } R_0(r, -s) = R_0(r, s) \quad (17)$$

jak obdržíme změnou znamení součtového písmene v XI, konečně zcela obecně:

$$R_0\left(\frac{1}{2} - r, s\right) = R_0\left(\frac{1}{2} + r, s\right) \quad (18)$$

$$S_0\left(\frac{1}{2} - r, s\right) = -S_0\left(\frac{1}{2} + r, s\right)$$

můžeme si již zjednatí jakýsi obraz o tom, jak se pruhy v -roviny (viz obr. 3.) zobrazí na ϑ_n -rovině (obr. 4.). Souměrně položené body k přímkám $r = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, atd. zobrazí se *souměrně k ose reálné*, obdobně v záporných hodnotách r , takže po sobě následujícím pruhům šířky $\frac{1}{2}$ budou střídavě odpovídati obrazce souměrné dle osy reálné (obr. 4.). Podobný poznatek odvodí se pro R_1, S_1 .

5. Pro zvláštní hodnoty s , totiž $s = n$ (číslo celistvé), nebo $s = n + \frac{1}{2}$ redukuje se řady (XI) na *thetarady* násobené goniometrickým faktorem.

Direktní transformací řad (XI) můžeme znovu dospěti k hodnotám (VIII) a (IX) jinak dříve nalezeným. Pro tyto zvláštní hodnoty s mají na př. prvé dvě řady (XI) tvar:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-\pi k(k+n)} \frac{\cos}{\sin} 2k\pi r \quad (19)$$

při čemž n nabývá všech celistvých hodnot nullou počínaje. Tak na př. pro $n = 1$ jest hoření řada:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-\pi k(k+1)} \cos 2k\pi r = R_0\left(r, \frac{1}{2}\right). \quad (20)$$

Položme:

$$k = l - 1 \quad (21)$$

a pišme hoření řadu:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l-1} e^{-\pi\left(\frac{2l-1}{2}\right)^2} + \frac{\pi}{4} \cos [(2l-1)\pi r - \pi r].$$

Rozvedme cosinus rozdílu tu se vyskytující:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{l-1} e^{-\pi\left(\frac{2l-1}{2}\right)^2} + \frac{\pi}{4} [\cos (2l-1)\pi r \cos \pi r + \sin (2l-1)\pi r \sin \pi r]. \quad (22)$$

Vidno, že řada uvažovaná skládá se ze součtu dvou řad, při čemž však kosinusová řada se annulluje, neboť pro dvě hodnoty součtového písmene:

$$\begin{aligned} l_1 &= l \\ l_2 &= 1 - l \end{aligned}$$

jsou členy její téže sice velikosti, opačného však znamení. Jest tudíž (22):

$$R_0\left(r, \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \sin \pi r \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{l-1} e^{-\pi\left(\frac{2l-1}{2}\right)^2} \sin (2l-1) \pi r \quad (23)$$

Řada v pravo jest však řada definující funkci $\vartheta_1(r)$ a tedy jest konečně:

$$R_0\left(r, \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \sin \pi r \vartheta_1(r)$$

ve shodě s první rovnicí (7) (aneb VIII).

6. Pro obecné hodnoty s ležící v intervalech $(n, n + \frac{1}{2})$ resp. $(n + \frac{1}{2}, n + 1)$, kde n značí číslo celistvé, tedy

$$s = n + \varepsilon \text{ resp. } n + \frac{1}{2} + \varepsilon,$$

při čemž $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2}$

nabývají řady (XI) tvaru:

$$\frac{R_0}{S_0}(r, s) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-\pi k(k+n)} e^{-2\pi k\varepsilon} \frac{\cos 2k\pi r}{\sin 2k\pi r}. \quad (24)$$

Hodnotám $r = \text{konst.}$ a $s = \text{konst.}$ odpovídají dvě soustavy orthogonálně se protínajících křivek (viz obr. 4. a 5.). Křivky $r = \text{konst.}$ mají průběh radialní, vycházejíce vesměs z bodů úsečky \overline{AB} (pro $s = 0$). Křivky $s = \text{konst.}$ podobají se *thetaspirálám*, v něž také pro obě krajní hodnoty $\varepsilon = 0$ a $\varepsilon = \frac{1}{2}$ spojitě přecházejí. Spojují tak oba charaktery thetaspirál od sudého čísla n k n lichému. Od thetařad liší se řady (24) faktorem $e^{-2\pi k\varepsilon}$ v každém členu.

Thetafunkce obecného komplexního argumentu $v = r + si$ lze převést také na thetafunkce lomené (obecné) charakteristiky. Pro modul $\tau = i$ zní tato relace:

$$\begin{aligned} \vartheta_0(r + is) &= \vartheta \left[\begin{smallmatrix} s \\ r-1 \end{smallmatrix} \right] (0) e^{\pi s^2 - 2\pi is(r-1)} \\ \vartheta_1(r + is) &= \vartheta \left[\begin{smallmatrix} s+1 \\ r-1 \end{smallmatrix} \right] (0) e^{\pi s^2 - 2\pi is(r-1)} \end{aligned} \quad (25)$$

při čemž jest obecně:

$$\vartheta \left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right] (v, \tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (k+g)^2 2 + \pi i (k+g) (v+h)} \quad (26)$$

Na počátku připomenuté vztahy $\vartheta_0(v + \frac{1}{2}) = \vartheta_3(v)$, $\vartheta_1(v + \frac{1}{2}) = \vartheta_2(v)$ praví, že pro thetafunkce $\vartheta_3(v)$ a $\vartheta_2(v)$ obdržíme tytéž obrazce 4. a 5, pouze o jednu šířku pásu třeba posunouti v obr. 3.

Charakteristiky nemají tudíž na zobrazení thetafunkci vlivu podstatného. —

Ke konci podotýkám, že thetafunkce nemajíce formule adiční, neposkytují isogonálního zobrazení obvyklým způsobem. Reálnou a imaginálnou část nelze obecně vyjádřiti funkcemi téhož druhu (thetafunkcemi).

Sestrojení rovnoosé hyperboly ze dvou imaginárních bodů a dvou imaginárních tečen.

Dr. Klíma Josef.

1. Buďtež dány (obr. 1) imag. tečny ${}^1T^i$, ${}^2T^i$ eliptickou involucí AA' , BB' kol bodu p a imag. body ${}^1b^i$, ${}^2b^i$ eliptickou involucí mm' , $\omega\omega'_\infty$ na přímce Q . Všechny kuželosečky jdoucí body ${}^1b^i$, ${}^2b^i$ a dotýkající se tečen ${}^1T^i$, ${}^2T^i$ tvoří smíšený systém kuželoseček, jichž středy jsou na dvou soustředných kuželosečkách Σ , Σ_1 *) opsaných rovnoběžníku $p\mu\omega x$, kde ω je střed bodové involuce (mm' , $\omega\omega'_\infty$), μ střed involuce vyfaté paprskovou involucí p (AA' BB') na přímce Q a $px = \mu\omega$. Tečny k těmto kuželosečkám středovým v bodě p jsou společným párem R , R' involuce p (AA' BB') a involuce paprskové, jíž promítá se involuce daná na přímce Q z bodu p . Ježto obě involuce jsou eliptické je jich společný pár vždy reálný. Tím obě středové kuželosečky Σ , Σ_1 určeny. Na těchto musí býti též středy hyperbol rovnoosých dotýkajících se tečen ${}^1T^i$, ${}^2T^i$ a procháze-

*) Jak ukázal jsem též v pojednání: »Polární vlastnosti soustavy kuželoseček určených dvěma body a dvěma tečnami«. Rozpravy České akad. roč. 1919 čís. 5.