Karel Petr

O separaci kořenů rovnice algebraické dle reálných částí kořenů a o důkaze fundamentální věty algebry. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 50 (1921), No. 2-3, 93--102

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109180`

s chybou nekonečně malou. Tak vychází

$$\left.\begin{aligned}\varphi(v)\log v &= \int_0^\infty\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+v}\right)\varphi(x+1)\,dx\\ &+\sum_1^\infty \log n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+v}\right)+\frac{1-v}{v}\log\pi\\ &+\int_0^1[\varphi'(x+1)-\varphi'(x+v)]\log\sin x\pi\,dx.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

(Pokračování.)

O separaci kořenů rovnice algebraické dle reálných části kořenů a o důkaze fundamentální věty algebry.

Napsal K. Petr.

(Dokončení.)

2. Dříve ještě než přistoupíme k vyšetření, za jakých podmínek při změně proměnné ξ se v řadě (9) mění počet změn znaménkových, vyjádříme si výrazy C_k, c_k pomocí součinitelů A_k. Nejprve lze C_k a c_k psáti v důsledku již zavedeného označení (pro $k = 1, 2, \ldots m$) ve tvaru

$$C = \begin{vmatrix} S_0, & S_1, & \ldots & S_{k-1} \\ S_1, & S_2, & \ldots & S_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{k-1}, & S_k, & \ldots & S_{2k-2} \end{vmatrix},$$

$$c_k = (-1)^k \begin{vmatrix} S_{-1}, & S_0, & \ldots & S_{k-2} \\ S_0, & S_1, & \ldots & S_{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{k-2}, & S_{k-1}, & \ldots & S_{2k-3} \end{vmatrix} A_{2m}$$

Čísla $S_0, S_1, \ldots$ jsou koefficienty v rozvoji podílu $h(X) : g(X)$ dle klesajících mocnin čísla X, neboť jest

$$\frac{h(X)}{g(X)} = \frac{\Theta_1}{X-\varepsilon_1}+\frac{\Theta_2}{X-\varepsilon_2}+\ldots+\frac{\Theta_m}{X-\varepsilon_m} =$$

$$= \frac{S_0}{X}+\frac{S_1}{X^2}+\frac{S_2}{X^3}+\ldots+\frac{S_k}{X^{k+1}}+\ldots$$

a jest platný pro ně tedy tento rekurentní vztah

$$S_i + A_2 S_{i-1} + A_4 S_{i-2} + \ldots + A_{2i} S_0 = A_{2i+1}; \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

ve kterémž ta A, jichž index převyšuje $2m$, jest klásti, rovna nulle. Determinant pro C_k se zjednoduší, přičteme-li ku i-tému sloupci sloupec první násobený A_{2i-2}, sloupec druhý násobený $A_{2i-4}, \ldots$ a sloupec $(i-1)$-tý násobený A_2, potom užijeme rekurentního vztahu a konečně provádíme obdobnou transformaci s řádky (ku j-tému řádku přičítáme prvý násobený A_{j-2}, druhý násobený A_{2j-4} a t. d.). Dostaneme tak nový determinant pro C_k o elementech $\mathfrak{A}_{ij}$, jež jsou dány výrazem

$$\mathfrak{A}_{ij} = A_{2i+2j-3} - A_1 A_{2i+2j-4} + A_2 A_{2i+2j-5} - \ldots\ldots + A_{2i-2} A_{2j-1}.$$

Jelikož determinant nový jest rovněž symetrický ($\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{A}_{ji}$), lze v této relaci pokládati $i \leqq j$.*) Podobně se transformují determinanty pro c_k; tam se přičítá ku i-tému sloupci sloupec druhý násobený A_{2i-4}, pak sloupec třetí násobený $A_{2i-6} \ldots$ a rovněž tak jest tomu při řádcích. Tu dostaneme determinant o elemenmentech $\mathfrak{a}_{ij}$, rovněž symmetrický ($\mathfrak{a}_{ij} = \mathfrak{a}_{ji}$) a elementy jeho jsou dány vztahem (pro $i \leqq j$ a při i a j různém od jedné)

$$\mathfrak{a}_{ij} = A_{2i+2j-5} - A_1 A_{2i+2j-6} + A_2 A_{2i+2j-7} - \ldots \quad - A_{2i-3} B_{2j-2}$$

$$\mathfrak{a}_{11} = -\frac{A_{2m-1}}{A_{2m}}, \quad \mathfrak{a}_{i1} = \mathfrak{a}_{j1} = A_{2i-3}.$$

Jest patrně při $i > 1$, $j > 1$

$$\mathfrak{a}_{ij} = \mathfrak{A}_{i-1,j} - A_{2i-3} A_{2j-2}.$$

Jsou tedy $C_1, C_2, \ldots C_m$ resp. $c_m, c_{m-1}, \ldots c_1$ dány jako řady hlavních subdeterminantů v determinantech symetrických

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{A}_{11}, & \mathfrak{A}_{12}, & \ldots & \mathfrak{A}_{1m} \\ \mathfrak{A}_{21}, & \mathfrak{A}_{22}, & \ldots & \mathfrak{A}_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{A}_{m1}, & \mathfrak{A}_{m2} & & \mathfrak{A}_{mm} \end{vmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{vmatrix} -\mathfrak{a}_{11}, & -\mathfrak{a}_{12}, & \ldots & -\mathfrak{a}_{1m} \\ -\mathfrak{a}_{21}, & -\mathfrak{a}_{22}, & \ldots & -\mathfrak{a}_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\mathfrak{a}_{m1}, & -\mathfrak{a}_{m2}, & \ldots & -\mathfrak{a}_{mm} \end{vmatrix} A_{2m} \quad (11)$$

a sice, označíme-li hlavní subdeterminant obsahující řádky a sloupce o indexech $r_1, r_2, \ldots r_k$ $\mathfrak{A}(r_1, r_2, \ldots r_k)$ resp. $\mathfrak{a}(r_1, r_2, \ldots r_k)$ dle toho, běží-li o prvý resp. druhý determinant,

*) Viz citované pojednání »O symmetrických soustavách čísel«, kde tato transformace obšírněji jest vyložena.

můžeme řadu (9) psáti ve tvaru

$$\begin{aligned}1,\ \mathfrak{A}(1),\ \mathfrak{A}(1.2),\ldots,\ \mathfrak{A}(1,2,\ldots m) = \mathfrak{a}(1,2,\ldots m)A_{2m},\\ \mathfrak{a}(1,2,\ldots,m-1)A_{2m},\ldots,\ \mathfrak{a}(1)A_{2m} = A_{2m-1},\ A_{2m}.\end{aligned} \qquad (12)$$

Členu $C_m = c_m = \mathfrak{A}(1,2,\ldots m)$ říkati budeme střední člen řady; členové 1 a A_{2m} jsou krajními členy řady, ostatní členy budeme nazývati vnitřními členy. Pro řadu tuto můžeme ze známých vlastností determinantů symmetrických vysloviti ihned větu: Vymizí-li některý vnitřní člen řady pro jistou hodnotu, kterou dáme proměnné ξ, a jsou-li členy sousední s tímto členem od nully různé, mají ty sousední členy protivná znaménka.

IV.

Vyšetřujme nyní, jak se mění počet změn znaménkových v řadě (9) resp. v řadě (12) — což jest totéž —, když ξ roste. Změna v počtu změn znaménkových nastati může patrně jenom tehdy, když ξ prochází hodnotou ξ_0, pro níž některý nebo několik z členů řady v úvahu brané stává se rovno nulle. Takových hodnot ξ_0 a vůbec nullových bodů výrazů $\mathfrak{A}(r_1, r_2, \ldots r_k)$, $\mathfrak{a}(r_1, r_2, \ldots r_k)$ jest jenom konečný počet. Zvolíme si kladné číslo ε tak, aby v intervalu $(\xi_0 - \varepsilon,\ \xi_0 + \varepsilon)$ neležel již žádný nullový bod hlavních subdeterminantů determinantů (12).

1. *Budiž nejprve* $\mathfrak{A}(1, 2,\ldots m) = \mathfrak{a}(1, 2,\ldots m)A_{2m}$ *pro* $\xi_0 = \xi$ *od nully různo a rovněž tak* A_{2m}. Pak jest ξ_0 nullovým bodem jednoho nebo několika vnitřních členů naší řady. Jsou-li členové řady sousedící s těmi, jež pro $\xi = \xi_0$ stávají se nullou, různy od nully, neztrácí se a také nezískává se při průchodu ξ hodnotou ξ_0 žádná změna znaménková, jak plyne ihned z věty v odstavci předch. ke konci uvedené. Avšak ani tenkráte, když ξ_0 jest nullovým bodem několika po sobě jdoucích členů vnitřních, nemění se při průchodu hodnotou ξ_0 počet změn znaménkových. Nechť ku př. několik členů po sobě jdoucích z první polovice řady dané

$$1,\ \mathfrak{A}(1),\ \mathfrak{A}(1,2),\ldots,\ \mathfrak{A}(1,2,\ldots m) \qquad (p)$$

jsou rovny pro $\xi = \xi_0$ nulle (prvý člen jakož i poslední — tento v důsledku činěného předpokladu — jsou různy od nully). Vyznačujme hodnotu, již dostáváme, když za ξ dosazujeme ξ_0 do $\mathfrak{A}(1)$ tím, že připojíme index ξ_0 ku $\mathfrak{A}(1)$ píšíce $\mathfrak{A}(1)_{\xi_0}$ a obdobně při jiných funkcích. Vhodným výběrem čísel $r_1, r_2, \ldots, r_k$ mezi čísly 1, 2, ... m lze (dle známé věty Gundelfingerovy) sestrojiti řadu hlavních subdeterminantů

$$1, \ \mathfrak{A}(r_1)_{\xi_0}, \ \mathfrak{A}(r_1, r_2)_{\xi_0}, \ldots, \ \mathfrak{A}(r_1, r_2, \ldots r_m)_{\xi_0} \qquad (q)$$

tak, že dva sousední členové této řady nejsou zároveň rovny 0 (poslední člen v řadě (q) shoduje se s posledním členem v řadě (p) při $\xi = \xi_0$ a jsou oba současně od nully různy). Následkem toho jest v řadách

$$1, \ \mathfrak{A}(r_1)_{\xi_0-\varepsilon}, \ \mathfrak{A}(r_1, r_2)_{\xi_0-\varepsilon}, \ldots, \ \mathfrak{A}(r_1, r_2, \ldots r_m)_{\xi_0-\varepsilon}; \qquad (r)$$

$$1, \ \mathfrak{A}(r_1)_{\xi_0+\varepsilon}, \ \mathfrak{A}(r_1, r_2)_{\xi_0+\varepsilon}, \ldots, \ \mathfrak{A}(r_1, r_2, \ldots r_m)_{\xi_0+\varepsilon} \qquad (s)$$

stejný počet změn znaménkových (dle právě provedené úvahy). Ale počty změn znaménkových v těchto řadách shodují se dle známých vět o determinantech symmetrických s počty změn znaménkových v řadách

$$1, \ \mathfrak{A}(1)_{\xi_0-\varepsilon}, \ \mathfrak{A}(1,2)_{\xi_0-\varepsilon}, \ldots, \ \mathfrak{A}(1,2, \ldots m)_{\xi_0-\varepsilon} \qquad (t)$$

$$1, \ \mathfrak{A}(1)_{\xi_0+\varepsilon}, \ \mathfrak{A}(1,2)_{\xi_0+\varepsilon}, \ldots, \ \mathfrak{A}(1,2, \ldots m)_{\xi_0+\varepsilon} \qquad (u)$$

neboť členové řad (r), (s), (t), (u) jsou vesměs od nully různy dle předpokladu. Tím jest dokázáno tvrzení, že i když pro $\xi = \xi_0$ několik členů sousedních současně stává se rovno nulle, nemění se při průchodu proměnné ξ hodnotou ξ_0 počet změn znaménkových v řadě (12); neboť obdobnou úvahu lze provésti stejně i pro druhou polovici řady (12).

Důsledek. V úvaze předcházející jest obsažen důkaz fundamentální věty algebry, a to důkaz algebraický. Že každá rovnice stupně lichého má kořen jeden (reálný), se předpokládá jakožto od jinud známé, rovněž se předpokládá, že každá rovnice druhého stupně má kořen, a postačí tudíž dokázati, že každá rovnice stupně sudého má kořen. Připusťme tedy, že existuje rovnice stupně $2m$ nemající kořene, při čemž rovnice stupně m a stupňů nižších kořen mají (a mají jich vůbec tolik, kolik obnáší jich stupeň). Sestrojme pro tuto rovnici řadu (12); v ní pro žádné ξ nebude člen poslední roven nulle (neboť rovnice nemá kořen reálný), avšak nebude i člen prostřední roveň nulle pro žádné ξ. Neboť pak by polynomy

$$f(\xi+\eta)+f(\xi-\eta) \qquad \frac{1}{\eta}(f(\xi+\eta)-f(\xi-\eta))$$

proto určité ξ měly společnou míru (již bychom dostali Euklidovým algoritmem), hodnoty η činící společnou tu míru rovnou nulle (a jež dle předpokladu existují) by byly takové, že by ty oba polynomy a tedy i $f(\xi+\eta)$, $f(\xi-\eta)$ — kde ξ, η jest to určité ξ a k němu naznačeným způsobem stanovené η — byly rovny nulle. Nemění tedy řada (12), když ξ se mění, počet změn znaménkových, avšak hned od počátku víme, že při přechodu od $-\infty$ do $+\infty$ se v řadě (12) ztratí $2m$ změn znaménkových. Není tedy možno, aby byla rovnice stupně $2m$ nemající kořene, mají-li rovnice stupně m a nižšího kořen. Jelikož rovnice stupňů 1, 2, 3 mají kořen, mají kořen i rovnice stupňů 4, 6 a tedy i stupňů 8, 10, 12 a tudíž i 14, 16,... 24 a t. d.

2. Připustíme nyní hodnoty ξ_0, pro které $\mathfrak{A}(1, 2, \ldots m)$, resp. A_{2m} stávají se rovny nulle. Avšak učiníme nejprve některé omezující předpoklady.

První předpoklad, který zavedeme, bude, že rovnice daná nemá kořenů mnohonásobných. K tomu jest nutno a postačitelno, aby diskriminant dané rovnice nebyl rovný nulle. T. j. jest k tomu nutno a postačitelno, aby byla splněna jistá podmínka mezi koefficienty dané rovnice, již budeme psáti ve tvaru

$$\mathfrak{R}_1(a_1, a_2, \ldots a_{2m}) \neq 0. \qquad (\lambda)$$

Druhý předpoklad bude, že rovnice pro poloviční součty kořenů, t. j. rovnice $\mathfrak{A}(1, 2, \ldots m) = 0$, nemá (řešíme-li ji dle ξ) kořenů mnohonásobných. To nám dá druhou podmínku tvaru

$$\mathfrak{R}_2(a_1, a_2, \ldots a_{2m}) \neq 0. \qquad (\mu)$$

Třetím předpokladem budeme požadovati, aby pro žádné ξ_0, pro které $\mathfrak{A}(1, 2, \ldots m) = 0$, rovnice $g(X) = 0$ (řešena dle X, při čemž se zároveň klade $\xi = \xi_0$) neměla kořenů mnohonásobných. Rovnice $g(X) = 0$ má jenom pro taková ξ kořeny mnohonásobné v X, pro která diskriminant té rovnice, jenž jest jistým polynomem v ξ, jest rovným nulle. Postačí (a jest nutno) ke splnění třetího předpokladu požadovati, aby resultant výrazu

$\mathfrak{A}(1, 2, \ldots m)$ a tohoto diskriminantu nebyl rovný nulle; to nám dá třetí podmínku

$$\mathfrak{R}_3(a_1, a_2, \ldots a_{2m}) \neq 0 \qquad (\nu)$$

splnitelnou, není-li ovšem $\mathfrak{R}_3$ identicky, t. j. pro každé a_1, $a_2, \ldots a_{2m}$, rovno nulle. Že $\mathfrak{R}_3$ není identicky rovno nulle, snadno zjistíme, uvažujeme-li některou speciální rovnici; položme ku př. $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2m-1} = 0$ a $a_{2m} \neq 0$. Pak jde v podstatě o to vyšetřiti, zda tři rovnice

$$\begin{aligned}
(\xi + \eta)^{2m} &+ (\xi - \eta)^{2m} + 2a_{2m} = 0,\\
\frac{1}{\eta}[(\xi + \eta)^{2m} &- (\xi - \eta)^{2m}] = 0,\\
(\xi + \eta)^{2m-1} &- (\xi - \eta)^{2m-1} = 0
\end{aligned}$$

mají při vhodné volbě pro ξ společné řešení v η. (Eliminací $X = \eta^2$ z prvé a druhé rovnice dostáváme v tomto specielním případě $\mathfrak{A}(1, 2, \ldots m)$; eliminací z prvé a třetí následuje diskriminant rovnice prvé, t. j. rovnice $g(X)$ tohoto specielního případu.) Avšak poslední dvě rovnice mohou míti společný kořen toliko $\eta = 0$ pro $\xi = 0$; než pro $\eta = 0$, $\xi = 0$ není splněna při $a_{2m} \neq 0$ rovnice prvá. Z té příčiny jest $\mathfrak{R}_3$ pro $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2m-1} = 0$ a $a_{2m} \neq 0$ různo od nully a není tedy identicky rovno nulle.

Prochází-li ξ rostouc hodnotou ξ_0, pro níž $A_{2m} = f(\xi)$ jest rovno nulle, pak, poněvadž předcházející člen v řadě (12), t. j. $A_{2m-1} = f'(\xi)$, jest dle prvého předpokladu od nully různý, ubude po přechodu tomto na konci řady (12) jedna změna znaménková (jak obecně jest známo z důkazu věty Sturmovy). Jestliže však jest ξ_0 polovičním součtem dvou kořenů rovnice dané, ku př. kořenů α_1, α_2, pak mnohočleny $g(X)$, $h(X)$, mají společnou míru, jež jest v důsledku druhého předpokladu (μ) stupně prvého, tedy tvaru $X - \varepsilon_m$, a příslušné číslo Θ_m (odst. II.) a jenom toto jedno z čísel Θ_k jest rovno nulle pro to ξ_0. Při tom jest ε_m čtverec polovičního rozdílu obou kořenů α_1, α_2, takže jest

$$\alpha_1 = \xi_0 + \sqrt{\varepsilon_m}, \quad \alpha_2 = \xi_0 - \sqrt{\varepsilon_m}.$$

Je-li ε_m kladné, jsou oba kořeny α_1, α_2 reálné, je-li ε_m záporné, jsou oba kořeny komplexně sdružené; nulle pak ε_m býti rovno nemůže v důsledku prvého předpokladu (λ).

Jelikož $\Theta_m = 0$, redukuje se dle rovnice (4) $D_{m-1}(X)$ na výraz

$$D_{m-1}(X) = \Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta_{m-1} \cdot (X - \varepsilon_m)[1, 2, \ldots, m-1]^2$$

a tedy

$$C_{m-1} = \mathfrak{A}(1, 2, \ldots m-1) = \Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta_{m-1}[1, 2, \ldots, m-1]^2$$
$$c_{m-1} = \mathfrak{a}(1, 2, \ldots m-1) = -\Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta_{m-1}[1, 2, \ldots, m-1]^2 \varepsilon_m.$$

Tato čísla jsou v důsledku třetího předpokladu od nully různa a mají protivná znaménka, je-li $\varepsilon_m > 0$, t. j. je-li ξ_0 rovno polovičnímu součtu reálných kořenů; stejná pak znaménka mají, jestliže ξ_0 jest rovno polovičnímu součtu dvou komplexně sdružených kořenů.

Jestliže tedy ξ prochází (za daných 3 předpokladů) nullovým bodem ξ_0 výrazu $\mathfrak{A}(1, 2, \ldots m)$, nemění se přechodem tímto počet změn znaménkových, je-li ξ_0 součtem polovičním dvou reálných kořenů; je-li však ξ_0 polovičním součtem dvou komplexně sdružených kořenů, změní se v důsledku tohoto průchodu počet změn znaménkových o 2 jednotky.

Avšak mění-li se ξ od $-\infty$ do $+\infty$ rostouc, ztratí se během této změny celkem $2m$ změn znaménkových. Má-li však toto číslo býti dosaženo, musí se při každém průchodu hodnotou ξ_0 rovnou polovičnímu součtu dvou komplexně sdružených kořenů *ztratiti* dvě změny znaménkové.

Můžeme tudíž vysloviti větu: *V rovnici algebraické stupně* $n = 2m$

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (A)$$

jest v řadě

$$1, \mathfrak{A}(1), \mathfrak{A}(1, 2), \ldots, \mathfrak{A}(1, 2, \ldots m) = \mathfrak{a}(1, 2, \ldots m) A_n \ldots,$$
$$\mathfrak{a}(1) A_n = A_{n-1}, A_n \qquad (12)$$

tolik změn znaménkových, kolik ta rovnice má kořenů, jichž reálná část jest větší než ξ. Při tom se předpokládá, že ξ jest taková hodnota, že v řadě právě napsané ani $\mathfrak{A}(1, 2, \ldots, m)$, ani A_n, ani dva po sobě jdoucí členové řady nejsou rovny nulle, a dále, že součinitelé rovnice dané hoví podmínkám svrchu vyjádřeným nerovninami (λ), (μ), (ν).

3. Avšak nerovniny (λ), (μ), (ν) nejsou nezbytny k platnosti věty právě dokázané. Budiž $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}$ systém hodnot, pro které jest splněna jedna anebo i více z rovnic

$$\mathfrak{R}_1(a_1^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}) = 0, \quad \mathfrak{R}_2(a_1^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}) = 0, \quad \mathfrak{R}_3(a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}) = 0;$$

pak lze zvoliti čísla $\Delta a_1^{(0)}, \Delta a_2^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}$ tak, že

$$|\Delta a_1^{(0)}| + |\Delta a_2^{(0)}| + \ldots + |\Delta a_n^{(0)}| < \delta,$$

kde δ jest jisté číslo kladné libovolně malé, a, že zároveň, klademe-li

$$a_1 = a_1^{(0)} + \Delta a_1^{(0)}, \quad a_2 = a_2^{(0)} + \Delta a_2^{(0)}, \ldots a_n = a_n^{(0)} + \Delta a_n^{(0)},$$

jsou vesměs splněny nerovniny (λ), (μ), (ν).

Řadu (12) pro rovnici

$$x^n + a_1^{(0)} x_1^{n-1} + a_2^{(0)} x^{n-1} + \ldots + a_n^{(0)} = 0 \qquad (A_0)$$

vyznačme takto

$$1, \ \mathfrak{A}(1)_0, \ \mathfrak{A}(1, 2)_0, \ldots \qquad (12_0)$$

Buďtež členy této řady takové, že dva po sobě jdoucí nejsou současně rovny nulle, a zároveň, že $\mathfrak{A}(1, 2, \ldots m)_0$ $(A_n)_0$ jsou různy od nully. Pak zvolíme-li si δ dosti malé, budou — jelikož $\mathfrak{A}(1, 2, \ldots k)$, $a(1, 2, \ldots k) A_n$ jsou spojité funkce koefficientů $a_1, a_2, \ldots,$ — členy řady (12) stejnolehlé k těm členům řady (12_0), jež jsou různy od nully, rovněž různy od nully a téhož znaménka. Tudíž obě řady (12) a (12_0) mají stejný počet změn znaménkových.

Zároveň však jest patrno, poněvadž $\mathfrak{A}(1, 2, \ldots m)_0$ a $(A_n)_0$ jsou různy od nully, že rovnice (A_0) nemá kořenů, jichž reálná část jest rovna ξ. Je-li tedy δ dosti malé, má rovnice (A) stejný počet kořenů, jichž reálná část jest větší než ξ, jako rovnice (A_0), neboť i kořeny rovnice (A) jsou spojité funkce koefficientů $a_1, a_2, \ldots$

Odtud následuje ihned, že věta svrchu vyslovená jest platna i pro takové rovnice, pro něž jedna nebo několik z podmínek (λ), (μ), (ν) není splněno.

Poznámka. Že, prochází-li ξ rostouc nullovým bodem ξ_0 výrazu $\mathfrak{A}(1, 2, \ldots m)$, se ztrácejí, je-li ξ_0 rovno polovičnímu součtu dvou komplexně sdružených kořenů, v řadě (12) dvě změny znaménkové, a dále, že se nemění při tomto průchodu počet změn znaménkových, je-li ξ_0 rovno polovičnímu součtu reálných kořenů, lze dokázati také přímo a to bližším vyšetřováním členů sousedících s $\mathfrak{A}(1, 2, \ldots m)$. K vůli stručnosti však toto šetření tu neuvádím.

V.

Ke konci uvedu ještě několik vět z části bez důkazu, jež lze snadno odvoditi jako důsledky úvah předcházejících odstavců.

Věta 1. *Rovnice*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

a rovnice

$$x^n + a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} + \ldots\ldots + \lambda (a_1 x^{n-1} + a_3 x^{n-3} + \ldots\ldots) = 0$$

mají, je-li λ *kladné, stejný počet kořenů, jichž reálná část jest kladná.*

Počet kořenů o kladných reálných částích rovnice prvé dostaneme při n sudém pomocí řad (12), klademe-li v nich prostě $A_k = a_k$; avšak veličiny $\mathfrak{A}_{ik}$, $\mathfrak{a}_{ik}$ jsou pak vesměs lineární homogenní výrazy v koefficientech a_k s lichými indexy. Odtud tvrzení ihned následuje ovšem pouze pro n sudé, avšak není nesnadno je rozšířiti i pro n liché (ku př. pomocí další věty 2.). Věta jest platna i tenkráte, když několik členů řady (12) po sobě jdoucích jest rovno nulle.

Je-li λ záporné, mají obě rovnice věty 1. dohohromady n kořenů, jichž reálná část jest kladná, počítá-li se ještě k těm kořenům každý kořen, jehož reálná část jest rovna nulle s váhou $\frac{1}{2}$.

Věta 2. *Rovnice lichého stupně* (při $a_n \gtrless 0$)

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

má tolik kořenů s reální částí kladnou, kolik rovnice stupně o jednu menšího

$$x^{n-1} + (-a_3 + a_2 a_1) x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + (-a_5 + a_4 a_1) x^{n-4} + a_4 x^{n-5} + \ldots + (-a_n + a_{n-1} a_1) x + a_{n-1} = 0$$

má těch kořenů, je-li a_{n-1} *s* a_n *stejného znaménka. Není-li však* a_{n-1} *s* a_n *stejného znaménka* (t. j. je-li buď a_{n-1} znam.

protivného znaménku čísla a_n aneb a_{n-1} rovno nulle při $a_n \gtrless 0$) *má první z těchto rovnic o jeden kořen s reální částí kladnou více než rovnice druhá.*

Věta 3. *Rovnice sudého stupně*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0.$$

má tolik kořenů s reální částí kladnou, kolik rovnice stupně o jednu menšího

$$x^{n-1} + (-a_3 + a_2 a_1)\, x^{n-2} + \frac{a_3}{a_1}\, x^{n-3} + (-a_5 + a_4 a_1)\, x^{n-4} +$$

$$\frac{a_5}{a_1}\, x^{n-5} + \ldots\ldots + \frac{a_{n-1}}{a_1}\, x + a_n a_1 = 0$$

má těch kořenů, je-li a_1 kladné. Je-li a_1 záporné, má první rovnice o jeden kořen s reální částí kladnou více než rovnice druhá.

Jak by v této větě bylo lze docíliti zjednodušení použitím věty 1. (tím, že by se odstranily zlomky v rovnici druhé). jest na snadě. Rovněž jest patrný význam věty 2. a 3. pro praktický výpočet počtu kořenů, jichž reálná část jest kladná. Nebylo by nesnadno odvoditi tyto věty pomocí věty Cauchovy v úvodu citované.

O isogonálném zobrazení čtyř thetafunkcí Jacobiho, jichž modul jest číslo ryze imaginární.

Napsal **K. Dusl.**

Z trigonometrických rozvojů čtyř Jacobiho thetafunkcí plyne bezprostředně, že thetafunkce, *jichž modul jest číslo ryze imaginárné*, tedy $\tau = it$ (při čemž musí $t > 0$, aby thetařady konvergovaly) mají pro reálné hodnoty argumentu průběh veskrze reálný, takže lze je graficky znázorniti. Při tom stačí vyšetřiti dvě z těchto thetafunkcí, ježto jest, jak známo, pro každé v : $\vartheta_3(v) = \vartheta_0\,(v + \frac{1}{2})$, $\vartheta_2\,(v) = \vartheta_1\,(v + \frac{1}{2})$ Znázorníme-li (za pomoci několika vět z elementární theorie funkcí elliptických)*)

*) Krause-Naetsch: „Theorie der elliptischen Funktionen". Lipsko. 1912. Str. 64 a násl.