Antonín Hrazdil

# Experimentální stanovení čísla $\pi$ užitím počtu pravděpodobnosti

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 50 (1921), No. 2-3, 190--193

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109179

Všimněme si rozkladů v nerozložitelné činitele: 1) $6 = 2.3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$. Zde je $(2) = \mathfrak{q}_1^2$, $(3) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}'_1$. Čísla $1 + \sqrt{-5}$ a $1 - \sqrt{-5}$ dlužno uvažovati vzhledem k prvočinitelům 2,3 jich normy 6. I je $1 + \sqrt{-5} \equiv \varkappa_1, (2)$; $\equiv \pi_1, (3)$; takže $(1 + \sqrt{-5}) = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{p}_1$ a pro číslo sdružené $(1 - \sqrt{-5}) = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{p}'_1$. Konečně je $6 = \mathfrak{q}_1^2 \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}'_1$. 2) $9 = 3.3 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$. Zde je $(3) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}'_1$. Ježto $N(2 + \sqrt{-5}) = N(2 - \sqrt{-5}) = 9$, dlužno čísla ta uvažovati vzhledem ku 3. I je $(1 - \sqrt{-5})^2 = -2(2 + \sqrt{-5})$, takže $2 + \sqrt{-5} \sim \pi'^2_1$ (3), $(2 + \sqrt{-5}) = \mathfrak{p}'^2_1$, $(2 - \sqrt{-5}) = \mathfrak{p}_1^2$; $9 = \mathfrak{p}_1^2 \mathfrak{p}'^2_1$. 3) $21 = 3.7 = (4 + \sqrt{-5})(4 - \sqrt{-5}) = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5})$; $(3) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}'_1$; $(7) = \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}'_2$; $4 + \sqrt{-5} = 3 + (1 + \sqrt{-5}) = 7 - (3 - \sqrt{-5})$ takže $4 + \sqrt{-5} \sim \pi_1, (3)$; $\sim \pi'_2, (7)$; i je $(4 + \sqrt{-5}) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}'_2$, $(4 - \sqrt{-5}) = \mathfrak{p}'_1 \mathfrak{p}_2$; podobně $1 + 2\sqrt{-5} = 3\sqrt{-5} + (1 - \sqrt{-5}) = 7 - 2(3 - \sqrt{-5})$ a proto $1 + 2\sqrt{-5} \sim \pi'_1, (3)$; $\sim \pi'_2, (7)$; takže $(1 + 2\sqrt{-5}) = \mathfrak{p}'_1 \mathfrak{p}'_2$. $1 - 2\sqrt{-5} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$; $21 = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}'_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}'_2$.

---

# Experimentální stanovení čísla $\pi$ užitím počtu pravděpodobnosti.

Napsal Dr. **Antonín Hrazdil.**

V druhé polovici osmnáctého století francouzský mathematik a fysiolog G. L. Buffon (*1707 — †1788) předložil k řešení úlohu, známou pod jménem „problém jehly“ (problème de l'aiguille), která umožnila užitím počtu pravděpodobnosti ustanoviti experimentálně číslo $\pi$.

Problém ten zněl: „Na vodorovnou tabuli, pokrytou systémem aequidistantních rovnoběžek ve vzdálenosti $2a$ od sebe, hází se válcová jehla délky $2c$ ($\leq 2a$); jak velká jest pravděpodobnost, že jehla padne křížem přes některou z těch rovnoběžek?“

Řešení tohoto problému podal jednak Buffon sám, jednak — a to mnohem elegantněji — Laplace v „Théorie analytique des Probabilités“ str. 359—362. Leč oba byli nuceni použiti k němu počtu vyššího, infinitesimálního. Experimentálně zkoušel jejich výsledky R. Wolf a našel z 5000 hodů pro $\pi$ hodnotu 3·159.

Avšak jednoduchou obměnou této úlohy jest možno číslo $\pi$ stanoviti i prostředky elementárními. Předložme si tuto úlohu: „Na rovině, pokryté dvěma systémy aequidistantních k sobě kolmých přímek ve vzdálenosti $a$ od sebe, jest kolem každého průsečíku přímek narýsována kružnice o poloměru $\varrho < \frac{a}{2}$. Na tuto rovinu hází se mince nebo nějaká kruhová destička o poloměru $r$, při čemž nechť $\varrho < r < \frac{a}{2} + \varrho$. Jaká jest pravděpodobnost, že některý narysovaný kroužek bude úplně přikryt mincí?"

Jak známo pravděpodobností nějakého děje rozumíme poměr mezi počtem případů žádanému ději příznivých a mezi počtem případů všech vůbec pro ten děj stejně možných. Leč ani jeden, ani druhý z těchto dvou žádaných počtů případů nedá se tu přímo stanoviti, poněvadž mince může zaujmouti na každé ploše nekonečně mnoho různých poloh. Rovina totiž skládá se z nekonečného počtu bodů a střed mince může padnouti na kterýkoliv z nich.

V takovém případě mluví se o pravděpodobnosti „geometrické" a k stanovení jejímu užívá se místo počtů případů příznivých a možných veličin jiných. Těmito veličinami jsou určité plochy — plocha případů příznivých a plocha případů možných — a poměr těchto ploch udává žádanou pravděpodobnost, jak ihned bude vyloženo.

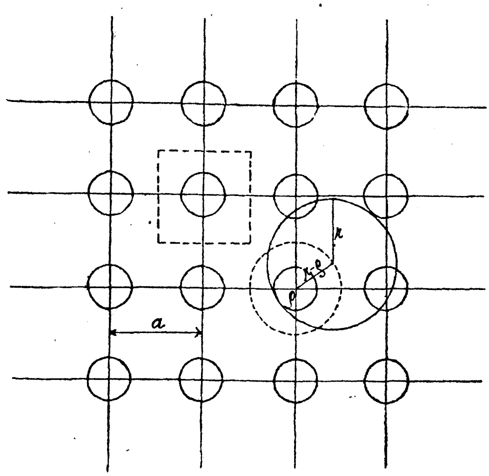
Hozená mince může padnouti na kterýkoliv narýsovaný kroužek. Jsou tedy tyto kroužky navzájem rovnocenny a pravděpodobnost krytí některého z nich je pro všechny stejná. Z toho důvodu můžeme si při řešení úlohy všimnouti jen kroužku jednoho a to kterékoliv z nich.

Kroužky ty jsou narýsovány na rovině stejně hustě a proto každému z nich přísluší stejná část roviny jakožto plocha, na níž kroužek se nachází Jak na první pohled patrno, má v našem případě tato část roviny podobu čtverce v straně $a$, jehož vrcholy leží ve středech všech čtyř sousedních polí. (Viz obr.)

Střed hozené mince může padnouti na kterýkoliv bod tohoto čtverce, buď uvnitř kroužku nebo i mimo něj. Tento čtverec e plocha všech případů možných.

Příznivými případy, t. j. takovými, kdy mince kroužek úplně kryje, jsou jen ty body, kdy střed mince padne na některý bod roviny, jehož vzdálenost od středu kroužku nepřesahuje úsečku $r - \varrho$; všechny tyto body vyplňují plochu kruhovou v poloměru $r - \varrho$; (plocha případů příznivých). Je pak zcela přirozeno, položiti hledanou pravděpodobnost $p$ rovnou poměru plochy případů příznivých ku ploše případů možných:

$$p = \frac{\pi \, . \, (r - \varrho)^2}{a^2} = \pi \, . \left(\frac{r - \varrho}{a}\right)^2 .$$




Z toho plyne pro číslo $\pi$:

$$\pi = p \, . \left(\frac{a}{r - \varrho}\right)^2 .$$

Stanovíme-li pravděpodobnost $p$ pokusem a to tak, že vykonáme mincí značný počet hodů na rovinu, všímáme si, kolikrát mince některý kroužek pokryla, a změříme-li veličiny $a$ $\varrho$ a $r$, můžeme dle tohoto vzorce počítati přibližně číslo $\pi$.

K určení pravděpodobnosti $p$ učiněno bylo autorem 1000 hodů mincí o poloměru $r = 1{\cdot}69$ *cm* na plochu pokrytou čtverci o straně $a = 3{\cdot}81$ *cm* s kroužky o poloměru $\varrho = 0.59$ *cm*. Počet příznivých hodů byl $n = 262$, při celkovém počtu $m = 1000$.

Z toho

$$p = \frac{262}{1000} = 0{\cdot}262.$$

Pak

$$\pi = 0{\cdot}262 \,.\, \left(\frac{3{\cdot}81}{1{\cdot}10}\right)^2 = 3{\cdot}1431$$

což je výsledek dosti příznivý. Doporučuji čtenáři, aby takový pokus sám provedl.

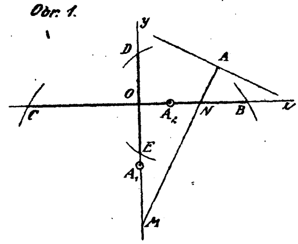
---

# Poznámka k omezení os kuželoseček a k parabole Steinerově.

Napsal Dr. Ant. **Pleskot**, profesor v Plzni.

V praktických užitích často vyskytuje se úloha omeziti na osách kuželosečky délky poloos, dána-li kuželosečka polohou os a tečnou s bodem dotyčným.

Obr. 1.




Uvedeme zde jednoduchou konstrukci, jejíž odůvodnění přímo plyne z článku, jež jsem v předešlém ročníku tohoto časopisu pod nápisem, „konstrukce normál kuželoseček“, uveřejnil.

Normála v bodě $A$ (obr. 1) kuželosečky protne jednu osu k. p. osu $y$, v bodě $M$. Je-li $O$ střed kuželosečky a bod $A_1$ středem úsečky $OM$, pak kružnice $k_1$ ze středu $A_1$ poloměrem $A_1A$ opsaná protne druhou osu t. j. osu $x$ ve vrcholech $B$ a $C$

Podobně protne-li normála osu $x$ v bodě $N$ a je-li $A_2$ střed úsečky $ON$, pak ze středu $A_2$ opsaná kružnice $k_2$ poloměrem $A_2A$ protne osu $y$ ve vrcholech $E$ a $D$.