Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Hejzlar

Logarithmy hyperbolické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 7 (1878), No. 1, 8--19

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109169

Obcích amerických pověstným svým papírovým drakem o měsíc později. Pokusy tyto vedly Franklina přímo k vynálezu hromosvodu, o kterémž jeho původce záhy zprávu do světa poslati neváhal. (Pokračování.)

Logarithmy hyperbolické.

Příspěvek historický

podává

Dr. Fr. Hejzlar.

Kvadratura hyperboly t. j. výpočet plochy omezené obloukem hyperbolickým, asymptotou a souřadnicemi konečných bodů onoho oblouku patřila k nejnesnadnějším problémům, jimiž se mathematikové v 17. století zanášeli. Z té příčiny vzbudil *Nicolaus Mercator* [1]) nemálo obdivu, když dotčenou úlohu ve své „Logarithmotechnii" r. 1668 první šťastně a velmi učeně rozřešil odkrývaje tím nový směr práce pro pilné a snaživé badatele jako byli: *John Wallis* [2]), *James Gregory* [3]) a j., kteří dosti zásluh sobě získali o zdokonalení kvadratury Mercatorovy; jak jí však ku vypočítávání logarithmů s prospěchem užiti lze, okázal *Isaac Newton* [4]), jenž badavým duchem svým vysoko nad jiné vynikal.

---

[1]) *Nicolaus Mercator* byl Holštýňan, žil však nejvíce v Anglii, kde v roce 1690 zemřel. —

[2]) *John Wallis*, znamenitý mathematik anglický, nar. se r. 1616 v Ashfordu v hrabství Kent-ském, zemř. r. 1703 v Oxfordě. Jeho nejvýtečnější spis jest: „Arithematica infinitorum." —

[3]) *James Gregory*, mathematik a fysik skotský, nar. se r. 1638 a zemř. r. 1675. Dalekohled, jemuž dalekohled Gregory-ův říkáme, byl nejdříve od něho sestaven. Ze spisův jeho buďtež jmenovány: „Vera circuli et hyperbolae quadratura" a „Exercitationes geometricae." —

[4]) *Isaac Newton*, jeden z nejslavnějších velduchů nového věku, nar. se r. 1642 ve vsi Woolsthorpě příslušné k faře Colstrworth v anglickém hrabství Lincoln-ském a zemř. r. 1727 v Kensingtonské čtvrti Londýna. Svými vesměs důmyslnými spisy prospěl nad míru i mathematice i fysice. —

Methodu Newtonowu jasně zde vylíčiti, budiž úlohou naší. Aby ale vývoj návodu toho skutečně pochopitelným byl, musíme předeslati odstavce tři a to:

1. Posloupnost číselných veličin, ve které rozdíly kterých koli dvou sousedních členů jsou sobě rovny, slove arithmetická řada *prvního řádu;* na př.:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots. \qquad (1)$$

Součet takové řady určí se vzorcem

$$s = \frac{n}{2}(a + u),$$

kde n počet členů, a první, $u = a + (n-1)d$ poslední člen řady značí.

Jest pak součet uvedené řady:

$$s = \frac{n}{2}(1 + n) = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} \text{ čili } s = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \ldots\ldots \quad (2)$$

Máme však i takové řady arithmetické, v nichž teprv druhé nebo třetí a t. d. rozdíly členů jsou si rovny, any slovou řady arithmetické *řádu druhého, třetího* a t. d.; na př.:

řada druhého řádu: $1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ \ldots.$ čili

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots. \qquad (3)$$

první rozdíly této řady: 3, 5, 7, 9, 11, ...

druhé „ „ „ 2, 2, 2, 2, ...

řada třetího řádu: $1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 5^3,\ \ldots.$ čili

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ \ldots. \qquad (4)$$

první rozdíly této řady: 7, 19, 37, 61, ...

druhé „ „ „ 12, 18, 24,

třetí „ „ „ 6, 6,

Součet arithmetické řady druhého řádu najdeme vzorcem

$$s = An^3 + Bn^2 + Cn,\ \ldots. \qquad (a)$$

a součet arithmetické řady třetího řádu vzorcem

$$s = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn\ \ldots. \qquad (b)$$

Součinitelé A, B, C v prvním vzorci vyhledají se z prvních tří, součinitelé A, B, C, D v druhém vzorci vyhledají se z prvních čtyř členů dotýčné řady způsobem z následujícího příkladu patrným.

Majíce sečísti řadu (3) užijeme vzorce (a), kde za n dosadíme nejdříve **1**, pak **2** a konečně **3** kladouce první výsledek $=$ prvnímu členu dané řady, druhý výsledek $=$ součtu prvních dvou členů a třetí výsledek = součtu prvních tří členů téže řady i obdržíme tři řešitelné rovnice o třech neznámých, totiž:

$$A + B + C = 1$$
$$8A + 4B + 2C = 5$$
$$27A + 9B + 3C = 14,$$

odkud plyne

$$A = \frac{1}{3},\ B = \frac{1}{2},\ C = \frac{1}{6}.$$

Součet naší řady tudíž jest

$$s = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n \ldots . \qquad (5)$$

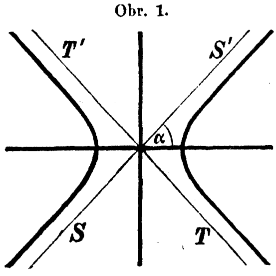
Dána-li řada (4), zjednáme si dle vzorce (b) podobně počítajíce součet

$$s = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2 \text{ [5]} \ldots . \qquad (6)$$

2. Asymptota (α priv. + $\sigma\upsilon\nu$ + $\pi\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\iota\nu$ = nedopadnice) slove přímka, ku které se křivka neustále přibližuje, avšak teprv v neskonalé vzdálenosti s ní se setká.

Hyperbola má dvě středem jejím probíhající asymptoty SS' a TT' (obr. 1.), jichž rovnice jsou

Obr. 1.



$$y = + \frac{b}{a} x$$
$$y = - \frac{b}{a} x.$$

Je-li úhel oběma asymptotami sevřený úhel pravý t. j. je-li $2\alpha = 90^0$ a proto $\alpha = 45^0$, bude $\frac{b}{a} = tg\alpha = tg 45^0 = 1$ čili $b = a$ t. j. obě osy **2a** i **2b** jsou si rovny a hyperbola slove v tom případě *hyperbola rovnostraná.*

3. Rovnice hyperboly, jsou-li asymptoty osami souřadnic, zní:

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

z které dosazením $a = b$ nabudeme

---

[5]) Srovnej *Studnička* „Algebra" pag. 146.

$$xy = \frac{a^2}{2} \ldots \quad (7)$$

t. j. rovnice rovnostrané hyperboly (obr. 2.), jejíž asymptoty jsou zároveň osami souřadnic.

Budiž $OP = c$, $MP = d$ a mimo to $PQ = x$ i bude dle (7)

$$c.d = \frac{a^2}{2}$$

$$(c + x).NQ = \frac{a^2}{2},$$

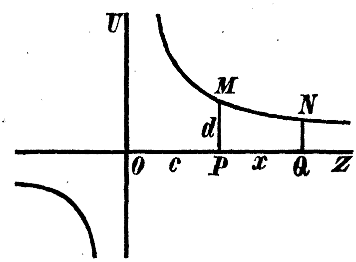
odkud patrno, že

$$c.d = (c + x).NQ$$

čili

$$NQ = \frac{c.d}{c + x} \ldots \quad (8)$$

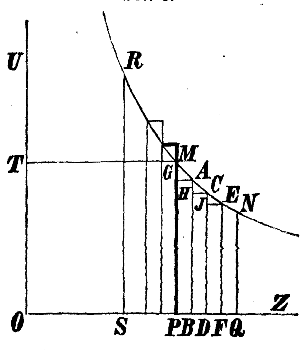
Obr. 2.



Kvadratura hyperboly.

a. Abychom se dodělali vzorců, dle kterých *Newton* logarithmy hledal, přijměme jako v odstavci 3. za osu x-ovou rovnostrané hyperboly (obr. 3.) asymptotu **OZ**, za osu y-ovou asymptotu **OU** a znamenejme **OP** $=$ **c**, **MP** $=$ **d**, **PQ** $=$ **x**. Chtějíce pak určiti ploský obsah obrazce **PMNQ**, rozdělíme délku **x** na **n** stejných dílů, z nichž každý $= \varepsilon$, a sestrojíme vnitřní obdélníky **PGAB**, **BHCD**, **DJEF**, a t. d.

Obr. 3.



Poněvadž k úsečkám

$$OB = c + \varepsilon, \quad OD = c + 2\varepsilon,$$
$$OF = c + 3\varepsilon, \ldots, \quad OQ = c + n\varepsilon$$

náležejí dle vzorce (8) ustanovené pořadnice

$$AB = \frac{c.d}{c+\varepsilon}, \; CD = \frac{c.d}{c+2\varepsilon}, \; EF = \frac{c.d}{c+3\varepsilon}, \ldots, NQ = \frac{c.d}{c+n\varepsilon},$$

lze ploské obsahy jmenovaných obdélníků vyjádřiti výrazy

$$AB.PB = \frac{cd.\varepsilon}{c+\varepsilon}, \; CD.BD = \frac{cd.\varepsilon}{c+2\varepsilon}, \; EF.DF = \frac{cd.\varepsilon}{c+3\varepsilon}, \ldots \; NQ.YQ = \frac{cd.\varepsilon}{c+n\varepsilon},$$

jichž součet dá nám řadu

$$\frac{cd.\varepsilon}{c+\varepsilon} + \frac{cd.\varepsilon}{c+2\varepsilon} + \frac{cd.\varepsilon}{c+3\varepsilon} + \ldots + \frac{cd.\varepsilon}{c+n\varepsilon} \ldots \quad (9)$$

Čím větší číslo místo **n** si myslíme t. j. čím menší jest ε, tím blíže sebe leží body **P, B, D, F, ..., Q** i body **M, A, C, E, ..., N** a tím méně liší se co do ploského obsahu obdélník **PGAB** od čtyrúhelníka **PMAB**, obdélník **BHCD** od čtyrúhelníka **BACD** a t. d.; klademe-li posléze $n = \infty$, jest dovoleno psáti

$$\begin{aligned} \text{plocha } PGAB &= \text{ploše } PMAB \\ \text{„} \quad BHCD &= \text{„} \quad BACD \end{aligned}$$

a t. d.

a řada (9) v tomto případě nekonečná udává nám plochu **p** obrazce **PMNQ**; z té příčiny jest

$$p = cd\varepsilon \left(\frac{1}{c+\varepsilon} + \frac{1}{c+2\varepsilon} + \frac{1}{c+3\varepsilon} + \ldots + \frac{1}{c+n\varepsilon} \right),$$

z čehož se zřetelem ku následujícímu vykonanému dělení

$$1:(c+\varepsilon) = \frac{1}{c} - \frac{\varepsilon}{c^2} + \frac{\varepsilon^2}{c^3} - \frac{\varepsilon^3}{c^4} + \ldots.$$

$$1:(c+2\varepsilon) = \frac{1}{c} - \frac{2\varepsilon}{c^2} + \frac{4\varepsilon^2}{c^3} - \frac{8\varepsilon^3}{c^4} + \ldots.$$

$$1:(c+3\varepsilon) = \frac{1}{c} - \frac{3\varepsilon}{c^2} + \frac{9\varepsilon^2}{c^3} - \frac{27\varepsilon^3}{c^4} + \ldots.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1:(c+n\varepsilon) = \frac{1}{c} - \frac{n\varepsilon}{c^2} + \frac{n^2\varepsilon^2}{c^3} - \frac{n^3\varepsilon^3}{c^4} + \ldots.$$

vychází na jevo [6])

$$p = cd\varepsilon \left\{ \begin{aligned} &\frac{n}{c} - \frac{\varepsilon}{c^2}[1+2+3 + \ldots + n] \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{c^3}[1+4+9 + \ldots + n^2] \\ &- \frac{\varepsilon^3}{c^4}[1+8+27 + \ldots + n^3] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right\}$$

nebo, máme-li na paměti arithmetické řady (1), (3), (4) a jich součty (2), (5), (6),

---

[6]) Srovnej: *„Die Kegelschnitte"* von *Dr. Johann August Grunert* 1824 §. 184. strana 376. —

$$p = cd\varepsilon \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{c} - \frac{\varepsilon}{c^2}\left[\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right] \\ + \frac{\varepsilon^2}{c^3}\left[\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right] \\ - \frac{\varepsilon^3}{c^4}\left[\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2\right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} =$$

$$= cd \left\{ \begin{array}{l} \frac{n\varepsilon}{c} - \frac{n^2\varepsilon^2}{2c^2} - \frac{n\varepsilon}{2c^2}\,.\,\varepsilon \\ + \frac{n^3\varepsilon^3}{3c^3} + \frac{n^2\varepsilon^2}{2c^3}\,.\,\varepsilon + \frac{n\varepsilon}{6c^3}\,.\,\varepsilon^2 \\ - \frac{n^4\varepsilon^4}{4c^4} - \frac{n^3\varepsilon^3}{2c^4}\,.\,\varepsilon - \frac{n^2\varepsilon^2}{4c^4}\,.\,\varepsilon^2 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

Že však $n\varepsilon = x$, obdržíme dle mocnin velčiny ε urovnanou řadu

$$p = cd\left(\frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{3c^3} - \frac{x^4}{4c^4} + \ldots - \left[\frac{x}{2c^2} - \frac{x^2}{2c^3} + \frac{x^3}{2c^4} - \ldots\right].\varepsilon + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{x}{6c^3} - \frac{x^2}{4c^4} + \ldots\right].\varepsilon^2 - \ldots\right),$$

kterouž ihned, uvážíme-li, že $n = \infty$ a tudíž $\varepsilon = 0$, zbaviti můžeme členů mocninu ε v sobě držících a nabudeme

$$p = cd\left(\frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{3c^3} - \frac{x^4}{4c^4} + \ldots\right)$$

čili

$$p = dx - \frac{dx^2}{2c} + \frac{dx^3}{3c^2} - \frac{dx^4}{4c^3} + \ldots \qquad (10)$$

b. Stanovíce ploský obsah **q** od pořadnice **MP** *v levo* ležícího obrazce **PMRS**, jehož strana **PS** $= -$ **x**, rozdělíme **PS** od bodu **P** počínajíce opět na **n** stejných dílů, z nichž každý $= -\varepsilon$, a najdeme ku úsečkám

$$c - \varepsilon,\ c - 2\varepsilon,\ c - 3\varepsilon,\ \ldots,\ c - n\varepsilon$$

příslušné pořadnice

$$\frac{c.d}{c-\varepsilon},\quad \frac{c.d}{c-2\varepsilon},\quad \frac{c.d}{c-3\varepsilon},\ \ldots,\quad \frac{c.d}{c-n\varepsilon},$$

jakož i ploské obsahy vnějších obdélníků

$$-\frac{cd.\varepsilon}{c-\varepsilon},\ -\frac{cd.\varepsilon}{c-2\varepsilon},\ -\frac{cd.\varepsilon}{c-3\varepsilon},\ldots,\ -\frac{cd.\varepsilon}{c-n\varepsilon}$$

a jich součet

$$-cd\varepsilon\left(\frac{1}{c-\varepsilon}+\frac{1}{c-2\varepsilon}+\frac{1}{c-3\varepsilon}+\ldots+\frac{1}{c-n\varepsilon}\right),$$

odkud methodou předešlou snadno vyvedeme řadu

$$q=-\left(dx+\frac{dx^2}{2c}+\frac{dx^3}{3c^2}+\frac{dx^4}{4c^3}+\ldots\right)\ldots \quad (11)$$

Určování logarithmů.

Nyní již lze předložiti čtenáři způsob, jímž *Newton* vycházeje od vzorců (10) a (11) mnohé logarithmy vypočítal a kterak by se desky logarithmické rychle sestaviti daly, naznačil. [6])

a. Sečtením a odečtením řad (10) i (11) doděláme se především ploch **PMNQ** — **PMRS** a **SRNQ** čili

$$p+q=-\left(\frac{dx^2}{c}+\frac{dx^4}{2c^3}+\frac{dx^6}{3c^5}+\frac{dx^8}{4c^7}+\ldots\right)$$

$$p-q=2dx+\frac{2dx^3}{3c^2}+\frac{2dx^5}{5c^4}+\frac{2dx^7}{7c^6}+\ldots$$

nebo, je-li $OP=MP=1$, t. j. $c=d=1$,

$$p+q=-\left(x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\frac{x^8}{4}+\ldots\right) \quad (12)$$

$$p-q=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+\ldots \quad (13)$$

b. Učiňme $x=0{\cdot}1$, pročež **OQ** $=1{\cdot}1$ a **OS** $=0{\cdot}9$ i dostaneme

z řady (12)		z řady (13)	
$p+q=-$	0·0100000000000000	$p-q=$	0·2000000000000000
	+ 500000000000		+ 6666666666666
	+ 3333333333		+ 40000000000
	+ 25000000		+ 285714286
	+ 200000		+ 2222222
	+ 1667		+ 18182
	+ 14		+ 154
			+ 1
$p+q=-$	0·0100503358535014	$p-q=$	0·2006706954621511

[6]) Viz: „*Isaaci Newtoni* opuscula mathematica.“ —

Tyto dvě rovnice dávají součet

$$2p = 0{\cdot}1906203596086497$$

a rozdíl

$$2q = -\,0{\cdot}2107210313156525,$$

z čehož zjednáme si plochu

$p = 0{\cdot}0953101798043248$ příslušnou k úsečce $\mathbf{OQ} = 1{\cdot}1$

a plochu

$p = -\,0{\cdot}1053605156578263$ příslušnou k úsečce $\mathbf{OS} = 0{\cdot}9$.

c. Zavedeme-li do týchže dvou řad

$x = 0{\cdot}01$ přijímajíce $\mathbf{OQ} = 1{\cdot}01$ a $\mathbf{OS} = 0{\cdot}99$

shledáme, že

$$p+q=-\left\{\begin{array}{lr} & 0{\cdot}0001000000000000 \\ + & 50000000 \\ + & 3333 \\ & \end{array}\right\} \qquad p+q=\left\{\begin{array}{lr} & 0{\cdot}0200000000000000 \\ + & 6666666666 \\ + & 400000 \\ + & 28 \end{array}\right\}$$

$$p+q=-\;\; 0{\cdot}0001000050003333 \qquad p-q=\;\; 0{\cdot}0200006667066694,$$

odkud plyne součet

$$2p = 0{\cdot}0199006617063361$$

i rozdíl

$$2q = -\,0{\cdot}0201006717070027$$

a z toho zase plocha

$p = 0{\cdot}0099503308531681$ náležející k úsečce $\mathbf{OQ} = 1{\cdot}01$

jakož i plocha

$q = -\,0{\cdot}0100503358535014$ náležející k úsečce $\mathbf{OS} = 0{\cdot}99$.

d. Týmž způsobem určíme, je-li $x = 0{\cdot}001$,

$p = 0{\cdot}0009995003330835$ k úsečce $\mathbf{OQ} = 1{\cdot}001$,

$q = -\,0{\cdot}0010005003335835$ k úsečce $\mathbf{OS} = 0{\cdot}999$

a t. d.

e. Právě tak slušelo by počítati, kdyby

$x = 0{\cdot}2$ a proto $\mathbf{OQ} = 1{\cdot}2$, $\mathbf{OS} = 0{\cdot}8$ nebo

$= 0{\cdot}02$ „ „ $= 1{\cdot}02$, $= 0{\cdot}98$ nebo

$= 0{\cdot}002$ „ „ $= 1{\cdot}002$, $= 0{\cdot}998$

a t. d.

a nabyli bychom výsledků, které i s předešlými výsledky sestaveny jsou v tabulce:

K úsečce	náleží plocha
0·8	— 0·2231435513142097
0·9	— 0·1053605156578263
0·98	— 0·0202027073175194
0·99	— 0·0100503358535014
0·998	— 0·0020020000000000
0·999	— 0·0010005003335835
1.001	0·0009995003330835
1·002	0·0010000000000000
1·01	0·0099503308531681
1·02	0·0198026272961797
1·1	0·0953101798043248
1·2	0·1823215567939546

f. Nahlédnouce v desky přirozených čili Nepperových logarithmů [7]) nabudeme přesvědčení, *že naše plochy hyperbolické jsou vlastně přirozené logarithmy podlé stojících úseček,* že tudíž

$$\text{log. nat. } 0·8 = -0·2231435513142097$$
$$\text{log. nat. } 1·02 = 0·0198026272961797$$

a t. d.

Jsouť přirozené logarithmy čísla, jimiž také plochy hyperbolické vyjádřiti lze a slovou často *logarithmy hyperbolickými.*

Co tuto praveno, dokážeme mimo to přesněji, zpomeneme-li dvě na větě dvoučlenné zakládající se řady logarithmické

$$\text{log. nat. } (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

$$\text{log. nat. } (1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\right)$$

a srovnáme-li je s řadami (10) i (11), které, je-li $\mathbf{c} = \mathbf{d} = 1$, přijmou na se tvary s předešlými shodné

$$p = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

---

[8]) Nejsou-li takové desky po ruce, zjednáme si logarithmy přirozené, násobíme-li obecné čili Briggovy logaritmy číslem 2·3025850929940457. —

$$q = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right),$$

z čehož patrno, že

$$\text{log. nat. } (1 + x) = p$$
$$\text{log. nat. } (1 - x) = q$$

t. j. přirozené logarithmy čísel **1 + x** neb **1 — x** rovnají se plochám hyperbolickým příslušným k úsečkám **1 + x** neb **1 — x.**

g. Se zřetelem k této pravdě a k tabulce hořejší najdeme hyperbolické logarithmy ostatních čísel takto:

Poněvadž

$$\frac{1{\cdot}2}{0{\cdot}8} \times \frac{1{\cdot}2}{0{\cdot}9} = 2$$
$$\frac{1{\cdot}2}{0{\cdot}8} \times 2 = 3$$
$$\frac{2}{0{\cdot}8} \times 2 = 5$$
$$2 \times 5 = 10$$
$$10 \times 10 = 100$$

$$10 \times 100 = 1000$$
$$\sqrt{5 \times 10 \times 0{\cdot}98} = 7$$
$$10 \times 1{\cdot}1 = 11$$
$$\frac{1000 \times 1{\cdot}001}{7 \times 11} = 13$$

a t. d.,

bude

$$\text{log. hyp. } 2 = 2 \text{ log. hyp. } 1{\cdot}2 - [\text{log. hyp. } 0{\cdot}8 + \text{log. hyp. } 0{\cdot}9]$$

čili

log. hyp. 2	= 0·6931471805599453	a	**OQ** = 2,
log. hyp. 3	= 1·0986122886681097	„	„ = 3,
log. hyp. 5	= 1·6094379124341004	„	„ = 5,
log. hyp. 10	= 2·3025850929940457	„	„ = 10,
log. hyp. 100	= 4·6051701859880914	„	„ = 100,
log. hyp. 1000	= 6·9077552789821371	„	„ = 1000,
log. hyp. 7	= 1·9459101490553134	„	„ = 7,
log. hyp. 11	= 2·3978952727983705	„	„ = 11,
log. hyp. 13	= 2·5649493574615367	„	„ = 13,

a t. d.;

znajíce pak logarithmy čísel kmenných 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... vypočítáme snadno logarithmy čísel složených, která, jak známo, na prvočinitele rozvésti lze. [9])

---

[9]) **Násobíce logarithmy hyperbolické číslem 0·4342944819032518 obdržíme logarithmy obecné. —**

na př.

log. hyp. $12 = \text{log. hyp.}(2.2.3) = \text{log. hyp.}\, 2 + \text{log. hyp.}\, 2 + \text{log. hyp.}\, 3$
$= 2{\cdot}4849066497880003$,

log. hyp. $35 = \text{log. hyp.}(5.7) = \text{log. hyp.}\, 5 + \text{log. hyp.}\, 7$
$= 3{\cdot}5553480614894138$

a j.

h. Zůstatně neopomenul Newton připojiti řadu pro hyperbolický logarithmus čísla rovného arithmetickému průměru dvou čísel, jichž hyperbolické logarithmy známy jsou.[10])

Značí-li **n** číslo, jehož logarithmus nám určiti jest, **z** rozdíl tohoto čísla a dvou od něho stejně vzdálených jakož i známými logarithmy opatřených čísel **n** — **z** a **n** + **z**, mimo to 2δ rozdíl těchto dvou známých logarithmů, bude

$$2\delta = \text{log. hyp.}(n+z) - \text{log. hyp.}(n-z) = \text{log. hyp.}\frac{n+z}{n-z} = \text{log. hyp.}\frac{1+\frac{z}{n}}{1-\frac{z}{n}}$$

$$= \text{log. hyp.}\left(1+\frac{z}{n}\right) - \text{log. hyp.}\left(1-\frac{z}{n}\right),$$

$$\text{log. hyp.}\, n - \text{log. hyp.}\,(n-z) = \text{log. hyp.}\frac{n}{n-z} = \text{log. hyp.}\,\frac{1}{1-\frac{z}{n}} =$$

$$= -\,\text{log. hyp.}\left(1-\frac{z}{n}\right).$$

Uvažme však, že v řadách (14) i (15) vlastně

$$p = \text{log. hyp.}\,(1+x),$$
$$q = \text{log. hyp.}\,(1-x)$$

a že, chceme-li log. hyp. $\left(1+\frac{z}{n}\right)$ a log. hyp. $\left(1-\frac{z}{n}\right)$ proměniti v řady, nutno v řadách (14) i (15) za **x** všude dosaditi $\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{n}}$; i obdržíme pak

$$\text{log. hyp.}\left(1+\frac{z}{n}\right) = \frac{z}{n} - \frac{z^2}{2n^2} + \frac{z^3}{3n^3} - \frac{z^4}{4n^4} + \ldots.$$

$$\text{log. hyp.}\left(1-\frac{z}{n}\right) = -\left(\frac{z}{n} + \frac{z^2}{2n^2} + \frac{z^3}{3n^3} + \frac{z^4}{4n^4} + \ldots\right),$$

---

[10]) Viz: článek „methodus fluxionum et serierum infinitarum“ v I. svazku jmenovaného již spisu: „*Isaaci Newtoni* opuscula mathematica.“ —

pročež

$$2\delta = \frac{2z}{n} + \frac{2z^3}{3n^3} + \frac{2z^5}{5n^5} + \frac{2z^7}{7n^7} + \ldots,$$

$$\text{log. hyp. } n - \text{log. hyp. } (n - z) = \frac{z}{n} + \frac{z^2}{2n^2} + \frac{z^3}{3n^3} + \frac{z^4}{4n^4} + \ldots,$$

odkud dělením zjednáme si

$$\frac{\text{log. hyp. } n - \text{log. hyp. } (n - z)}{2\delta} = \frac{\frac{z}{n} + \frac{z^2}{2n^2} + \frac{z^3}{3n^3} + \frac{z^4}{4n^4} + \ldots}{\frac{2z}{n} + \frac{2z^3}{3n^3} + \frac{2z^5}{5n^5} + \frac{2z^7}{7n^7} + \ldots}$$

čili

$$\text{log. hyp. } n - \text{log. hyp. } (n - z) = \frac{\frac{\delta z}{n} + \frac{\delta z^2}{2n^2} + \frac{\delta z^3}{3n^3} + \frac{\delta z^4}{4n^4} + \ldots}{\frac{z}{n} + \frac{z^3}{3n^3} + \frac{z^5}{5n^5} + \frac{z^7}{7n^7} + \ldots},$$

a vykonáme-li dělení skutečně,

$$\text{log. hyp. } n - \text{log. hyp. } (n - z) = \delta + \frac{\delta z}{2n} + \frac{\delta z^3}{12n^3} + \ldots.$$

nebo konečně řadu

$$\text{log. hyp. } n = \text{log. hyp. } (n - z) + \delta + \frac{\delta z}{2n} + \frac{\delta z^3}{12n^3} + \ldots,$$

která třemi prvními členy již poskytuje nám logarithmu čísla **n**, třeba bylo **z** sebe menší.

Ježto na př. logarithmy čísel 11 a 13 známe, můžeme nalézti logarithmus čísla $\frac{11 + 13}{2} = 12$ píšíce:

$$n = 12, \quad z = 1,$$

$$\text{log. hyp. } (n - z) = \text{log. hyp. } 11 = 2{\cdot}3978952727983705$$

$$\delta = \frac{\text{log. hyp. } (n + z) - \text{log. hyp. } (n - z)}{2} = 0{\cdot}0835270423315831$$

$$\frac{\delta z}{2n} = 0{\cdot}0034802934304826$$

$$\text{log. hyp. } 12 = 2{\cdot}48490 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Jest na jevě, že Newton všemožně kvadraturu ploch hyperbolických nad jednou asymptotou k užitku logarithmů obracel a že namahavá methoda Nepperova do pozadí ustoupiti musila.