Miloš Kössler

O významu čísla sup $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ v theorii mocninných řad

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 1, 47–53

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109149`

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 74 (1949)

O VÝZNAMU ČÍSLA $\sup|a_n|^{\frac{1}{n}}$ V THEORII MOCNINNÝCH ŘAD

MILOŠ KÖSSLER, Praha.

(Došlo dne 20. dubna 1949.)

Úvod. V theorii mocninné řady s koeficienty $a_0, a_1, a_2, \ldots$ má posloupnost čísel $|a_n|^{\frac{1}{n}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ základní význam. Tak na př. poloměr konvergence řady té jest reciprokou hodnotou čísla $\overline{\lim}|a_n|^{\frac{1}{n}}$. Pokud jest mi známo, dosud nikdo si neuvědomil, že také horní mez $g = \sup|a_n|^{\frac{1}{n}}$ jest konstantou, která charakterisuje celou řadu vlastností mocninné řady. Při tom odhady, které tak získáme, jsou nejlepší možné. Ukážu to na několika příkladech, které však zdaleka nevyčerpávají všechny možnosti.

1. **Nulové body mocninných řad.** Jestliže mocninná řada

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{1,1}$$

má majorantu s kladnými koeficienty

$$M(z) = 1 + \sum_{1}^{\infty} A_n z^n, \ |a_n| \leqq A_n, \tag{1,2}$$

pak žádný nulový bod ζ řady (1,1) nemůže míti prostou hodnotu menší nežli positivní kořen z_0 rovnice

$$1 - \sum_{1}^{\infty} A_n z^n = 0. \tag{1,3}$$

Tato rovnice má positivní kořen, pokud nejsou všechna A_n a tedy i a_n rovna nule. Tato věta jest dávno známá a jest téměř samozřejmá. Jest vždy

$$|1 + \sum_{1}^{\infty} a_n z^n| \geqq 1 - \sum_{1}^{\infty} |a_n| \,.\, |z|^n \geqq 1 - \sum_{1}^{\infty} A_n |z|^n.$$

Pokud tedy $|z| < z_0$, nemůže $f(z) = 0$. Jinak řečeno, má-li řada (1,1) nulový bod ζ, musí $|\zeta| \geqq z_0$. Z důkazu toho plyne současně, že žádný kořen rovnice (1,3) nemůže míti prostou hodnotu menší než z_0. K tomu stačí v předcházejícím důkazu položiti všude A_n místo a_n. Nejjednodušší majorantou řady (1,1) jest však

$$M(z) = 1 + \sum_1^\infty g^n z^n, \tag{1,4}$$

kdež $g = \sup|a_n|^{\frac{1}{n}}$, neboť pak $|a_n| \leqq g^n$.

Následkem toho všechny mocninné řady (1,1), které mají totéž $\sup|a_n|^{\frac{1}{n}} = g$, tvoří třídu té vlastnosti, že nulový bod ζ kterékoliv z nich má vlastnost

$$|\zeta| \geqq \frac{1}{2g}. \tag{1,5}$$

Jedna z těchto řad, totiž $f(z) = 1 - \sum_1^\infty g^n z^n$, má právě kořen daný mezí (1,5). Proto odhad (1,5) jest nejlepší možný. Důsledkem této zcela jednoduché věty jest, že všechny nulové body mocninné řady, ležící uvnitř kruhu konvergenčního, jsou isolované. Neboť je-li ζ jeden z těchto bodů, pak transformuji řadu ke středu ζ a vytknu z ní nejnižší mocninu proměnné $(z - \zeta)$. V závorce zbude řada s nenulovým prostým členem a ta podle předešlého se nemůže anulovati v jistém okolí bodu $z = \zeta$. Dalším důsledkem tohoto faktu jest pak věta o neurčitých součinitelích. Není mi znám jednodušší důkaz citovaných vět.

Větu (I) lze různými způsoby zobecniti. Uvedu jen jeden příklad. Třída mocninných řad (1,1) budiž určena takto. Jsou dány nikoliv negativní konstanty $\gamma_1, \gamma_2^2, \gamma_3^3, \ldots, \gamma_k^k$ a positivní konstanta g. Řada (1,1) patří k té třídě, jestliže $|a_n| = \gamma_n^n$ pro $n = 1, 2, \ldots, k$ a jestliže $\sup|a_n|^{\frac{1}{n}} = g$ pro $n > k$. Označím ještě

$$\left(\frac{\gamma_n}{g}\right)^n = t_n \text{ pro } n = 1, 2, \ldots, k.$$

Pak platí věta (Ia): Nulový bod ζ kterékoliv řady té třídy splňuje nerovnost

$$|\zeta| \geqq \frac{x_m}{g},$$

kdež x_m jest nejmenší kladný kořen rovnice

$$(1 - x)(1 - t_1 x - t_2 x^2 - \ldots - t_k x^k) - x^{k+1} = 0.$$

Odhad jest opět ostrý, protože řada

$$1-\gamma_1 z-\gamma_2^2 z^2-\ldots-\gamma_k^k z^k-\sum_{k+1}^{\infty} g^n z^n$$

jest třídy právě definované a má nulový bod právě rovný hořejší mezi. Důkaz ponechávám čtenáři, protože jeho vedoucí myšlenka se nijak neliší od důkazu věty (I).

2. **Poloměr konvergence řady inversní.** Budiž

$$w=a_1 z+a_2 z^2+a_3 z^3+\ldots \tag{2,1}$$

potenční řada s poloměrem konv. $\varrho>0$. Budiž dále $a_1>0$, $\sup|a_n|^{\frac{1}{n}}=g$ pro $n\geqq 2$. Pak jest zřejmě $\varrho\geqq\frac{1}{g}$. Hledáme dolní mez pro poloměr konv. řady inversní:

$$z=\alpha_1 w+\alpha_2 w^2+\alpha_3 w^3+\ldots \tag{2,2}$$

když jest dáno $a_1>0$ a číslo $g>0$. Množina takových řad (2,1) tvoří třídu. O třídě té platí věta (II):

Poloměr konv. ϱ_1 inversní řady (2,2) nemůže býti menší než číslo

$$\left(\sqrt{1+\frac{a_1}{g}}-1\right)^2.$$

Tento odhad jest přesný, protože pro speciální řadu (2,1)

$$w=a_1 z-\sum_2^{\infty} g^n z^n \tag{2,3}$$

jest ϱ_1 rovno shora uvedené mezi.

Methoda důkazu se nijak neliší od běžné methody užívající Cauchyovy majoranty. Dosadím řadu (2,2) do (2,1) za z a srovnáním koeficientů dostanu pro koef. α rekurentní vzorce

$$\alpha_1=\frac{1}{a_1},\ \alpha_2=\frac{a_2\alpha_1^2}{-a_1},\ \alpha_3=\frac{2a_2\alpha_1\alpha_2+a_3\alpha_1^3}{-a_1},\ \text{atd.}$$

Podstatnou vlastností těchto vzorců jest, že v čitatelích jsou vesměs kladná znaménka a mimo to jsou čitatelé lineární funkce čísel $a_2, a_3, a_4, \ldots$. Použiju-li těchto vzorců na řadu (2,3), budou koeficienty její řady inversní vesměs kladná čísla a co do absolutní hodnoty vesměs větší nebo rovny absol. hodnotám koeficientů $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Následkem toho poloměr konv. ϱ_1 bude nejméně roven poloměru konv. inversní řady k řadě (2,3). Avšak rovnici (2,3) lze pro $|z|g<1$ psáti ve formě

$$w(1-gz)=a_1 z-ga_1 z^2-g^2 z^2.$$

Inversní funkcí řady (2,3) jest tedy ten kořen z kvadrat. rovnice, který se anuluje pro $w=0$, to jest

$$z=\frac{1}{2(a_1+g)}\left\{w+\frac{a_1}{g}-\sqrt{\left(w+\frac{a_1}{g}\right)^2-4w\left(1+\frac{a_1}{g}\right)}\right\}.$$

Odmocnina jest rozvinutelna v potenční řadu podle mocnin w, pokud

$$|w| < \left(\sqrt{1 + \frac{a_1}{g}} - 1\right)^2.$$

Tím jest věta (II) dokázána. Přednost tohoto postupu proti obvyklé methodě užívající CAUCHY-ovy majoranty spočívá v tom, že třída uvažovaných řad zahrnuje i funkce neohraničené a dává právě pro ně ostrý odhad. Větu (II) lze opět zobecniti rozmanitým způsobem.

3. **Nulové body mocninné řady dvou proměnných.** Mocninná řada

$$f(z_1, z_2) = a + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n,0}z_1^n + a_{n-1,1}z_1^{n-1}z_2 + \ldots + a_{0,n}z_2^n) \qquad (3,1)$$

nechť má $a > 0$. Dále označím

$$g_n = \sup \left(|a_{n,0}|^{\frac{1}{n}}, |a_{n-1,1}|^{\frac{1}{n}}, \ldots, |a_{0,n}|^{\frac{1}{n}}\right); \ \sup_{n \geqq 1} g_n = g > 0.$$

Pak řada ta konverguje určitě pro všechna $|z_1|, |z_2| < \frac{1}{g}$. Pro taková dvě čísla z_1 a z_2 jest tedy

$$|f(z_1, z_2)| \geqq a - |\sum_1^{\infty}| \geqq a - \sum_{n=1}^{\infty} g^n(r_1^n + r_1^{n-1}r_2 + \ldots + r_2^n),$$

kdež $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$. Jest tedy

$$|f(z_1, z_2)| \geqq (a + 1) - \frac{1}{(1 - gr_1)(1 - gr_2)}.$$

Pravá strana této nerovnosti se anuluje pro

$$r = r_1 = r_2 = \frac{1}{g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a}}\right).$$

Z toho plyne věta (III):

$$f(z_1, z_2) \neq 0, \text{ pokud } |z_1| < r, |z_2| < r.$$

V takto definovaném prostoru nemůže se tedy $f(z_1, z_2) = 0$. To ovšem nevylučuje možnost, že $f(z_1, z_2) = 0$, jestliže na př. $|z_1| < r$, avšak $|z_2| > r$. Větu jest možno zobecniti pro řady o libovolném počtu proměnných $f(z_1, z_2, \ldots, z_k)$. Tato elementární věta vyjadřuje pouze v poněkud přesnější formě známý fakt, že spojitá funkce proměnných $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$, která není rovna nule v bodě $(0, 0, \ldots, 0)$, nemůže se anulovati v jistém okolí toho bodu. Věta (III) jest přesná, protože speciální funkce té třídy

$$f(z_1, z_2) = a - \sum_1^{\infty} g^n(z_1^n + z_1^{n-1}z_2 + \ldots + z_2^n)$$

se anuluje pro $z_1 = z_2 = r$.

Zajímavou aplikaci věty (III) si ihned ukážeme.

4. **Poloměr prostého zobrazení mocninnou řadou.** Zobrazení dané řadou

$$w = az + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad a > 0 \tag{4,1}$$

jest *prosté* uvnitř jistého maximálního kruhu se středem v bodě $z = 0$. Poloměr ϱ tohoto kruhu se nazývá poloměr prostého zobrazení a nemůže ovšem býti větší než poloměr konvergence řady. Číslo ϱ jest definováno takto: Jestliže pro všechna $|z_1|$, $|z_2| \leqq r$ jest splněna podmínka

$$f(z_1) - f(z_2) \neq 0, \text{ pokud } z_1 \neq z_2,$$

pak zobrazení v kruhu $|z| \leqq r$ jest prosté. Horní mez těchto r jest poloměr prostého zobrazení $\varrho = \sup r$. Svrchu napsanou podmínku mohu nahraditi vztahem

$$\Delta(z_1, z_2) = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \neq 0, \text{ když } z_1 \neq z_2,$$

to jest

$$\Delta(z_1, z_2) = a + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(z_1^n + z_1^{n-1} z_2 + \ldots + z_2^n) \neq 0. \tag{4,2}$$

Abych na tuto funkci dvou proměnných mohl užíti věty (III), musím stanoviti

$$\sup |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = g > 0. \tag{4,3}$$

Jestliže čísla a a g pokládám za dané konstanty, jest tím definována zcela určitá třída řad (4,1). Tak dospíváme k větě (IV):

V právě definované třídě řad má nejmenší poloměr prostého zobrazení řada

$$w = az - \sum_{2}^{\infty} g^{n-1} z^n.$$

Jest tedy pro každou řadu té třídy

$$\varrho \geqq \frac{1}{g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+a}}\right).$$

Důsledkem vztahu (4,2) jest, že také $f'(z_1) = \lim\limits_{z_2 \to z_1} \Delta(z_1, z_2) \neq 0$, pokud $|z_1|$ jest menší než hranice pro ϱ ve větě (IV) uvedená.

Tak na př. pro řady, v nichž $1 = a = |a_2| = |a_3| = \ldots$, jest $\varrho \geqq$ $\geqq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pro speciální funkce třídy $\sup |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = 1$ může ovšem ϱ

býti značně větší nežli mez ve větě uvedená. Tak na př. funkce $w = z + z^n$ má $\varrho = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}$, což s rostoucím n se blíží k 1.

Zcela přirozeně vzniká otázka, která z řad věty (IV) má *největší* poloměr ϱ. Řešení tohoto problému není tak snadné, jak by se na první pohled zdálo.

Methoda, které jsem užil, má mnoho jiných aplikací. Tak na př. dá se použíti při důkazu existence implicitní funkce nebo při důkazu existence řešení diferenciálních rovnic. Důležitou vlastností všech takových vět jest, že dávají přesné odhady pro poloměry konvergence, to jest odhady, které již nelze zlepšiti.

*

The signification of the number $\sup|a_n|^{\frac{1}{n}}$ in the theory of power series.

(Abstract from the preceding paper.)

In a power series with the coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots$ the meaning of $\lim\sup|a_n|^{\frac{1}{n}} = L$ is well known. All the series with the same L have the same radius of convergence. But also the upper bound $g = \sup|a_n|^{\frac{1}{n}}$ is a constant full of meaning. The class of series with the same upper bound g has a great number of common properties. To illustrate this assertion following theorems are proved.

Theorem (Ia). If in a power series (1,1) $f(z) = \sum\limits_0^\infty a_n z^n$ the nonnegativ numbers

$$|a_n| = \gamma_n^n,\ n = 1, 2, \ldots, k;\ g = \sup|a_n|^{\frac{1}{n}},\ n > k$$

are given, then every root ζ of (1,1) has a modulus

$$|\zeta| \geqq \frac{x}{g},$$

where x is the smallest positiv root of the equation

$$(1 - x)\left(1 - \frac{\gamma_1}{g}x - \frac{\gamma_2^2}{g^2}x^2 - \ldots - \frac{\gamma_k^k}{g^k}x^k\right) - x^{k+1} = 0.$$

Theorem (II). The power series

$$w = \sum_1^\infty a_n z^n$$

in which the numbers $a_1 > 0$, $\sup|a_n|^{\frac{1}{n}} = g$, $n > 1$ are given has an invers series

$$z = \sum_1^\infty \alpha_n w^n. \tag{2,2}$$

The radius of convergence ϱ of (2,2) is not less than

$$\left(\sqrt{1 + \frac{a_1}{g}} - 1\right)^2.$$

Theorem (III). In the series of two complex variables

$$f(z_1, z_2) = a + \sum_1^\infty \left(a_{n,0}z_1^n + a_{n-1,1}z_1^{n-1}z_2 + \ldots + a_{0,n}z_2^n\right), \tag{3,1}$$

where $a > 0$, we denote

$$g_n = \sup(|a_{n,0}|^{\frac{1}{n}}, |a_{n-1,1}|^{\frac{1}{n}}, \ldots, |a_{0,n}|^{\frac{1}{n}}); \; g = \sup g_n.$$

Is a class of series (3,1) defined by the numbers $a > 0$, $g > 0$, then $f(z_1, z_2) \neq 0$ in the space $|z_1| < r$, $|z_2| < r$,

$$r = \frac{1}{g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a}}\right).$$

Theorem (IV). If we define a class of series

$$w = az + \sum_2^\infty a_n z^n \tag{4,1}$$

by two numbers $a > 0$, $g = \sup|a_{n+1}|^{\frac{1}{n}}$, $n \geqq 1$ then the radius ϱ_1 of conformal mapping is not less than

$$\frac{1}{g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a}}\right).$$

The limits for the numbers $|\zeta|$, ϱ, r and ϱ_1 in the theorems are the best possible.