Karel Havlíček
Sur les surfaces enveloppes de spheres

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 1, 21--40

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109145`

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 74 (1949)

SUR LES SURFACES ENVELOPPES DE SPHÈRES.*)

KAREL HAVLÍČEK, Praha.

(Reçu le 5 Mars 1949.)

Dans cet article, il s'agit de la construction d'un certain scalaire au moyen duquel nous pouvons déterminer les surfaces enveloppes de sphères, c'est à dire *les surfaces qui enveloppent une famille de sphères dépendant d'un paramètre*. Cette construction est très analogue à la construction d'un autre scalaire qui détermine les surfaces réglées.[1]) Cela consiste à employer la transformation de LIE qui fait correspondre à des surfaces enveloppes de sphères les surfaces réglées engendrées par les droites qui correspondent à ces sphères, et aux lignes de courbure des ces surfaces les lignes asymptotiques des surfaces réglées.[2]) Voilà une analogie très instructive et intéressante; elle fait voir aussi les différences entre les surfaces enveloppes de sphères et les surfaces réglées. C'est pourquoi je suppose connues la géométrie réglée (voir par exemple HLAVATÝ [5]) et la géométrie de sphères de LIE (BLASCHKE [1], HLAVATÝ [4]).

I. Notions préliminaires.

Désignons par x^a $(a = 1, 2, 3)$ les coordonnées cartésiennes rectangulaires de l'espace euclidien à trois dimensions. Déterminons une surface, plongée dans cet espace, par les équations

$$x^a = x^a(\xi^\lambda), \quad (\lambda = I, II) \tag{1,1}$$

où x^a sont des fonctions réelles de deux variables indépendantes ξ^λ admettant des dérivées partielles continues jusqu'au troisième ordre. Désignons respectivement par $a_{\lambda\mu}$ et $b_{\lambda\mu}$ le premier et le deuxième tenseur fondamental[3]) de notre surface, alors la métrique de cette surface est donnée par la formule:

$$ds = \sqrt{a_{\lambda\mu}\, d\xi^\lambda\, d\xi^\mu}. \quad {}^{4})$$

*) La bibliographie est placée à la fin de l'article. Les chiffres entre crochets qui suivent les noms des auteurs se rapportent à cette bibliographie.

1) HLAVATÝ [3], p. 435—440.

2) Voir par exemple BLASCHKE [1], p. 233 etc.

3) HLAVATÝ [3], p. 125 etc. et p. 320 etc.

4) Je supprime le symbole de sommation d'après un indice grec *muet*.

Considérons aussi le troisième tenseur symétrique $Q_{\lambda\mu}$ de la surface, dont les composantes covariantes sont données par les expressions suivantes:[5])

$$Q_{\lambda\mu} = Q_{\mu\lambda} = \tfrac{1}{2}(k_{\lambda\mu} + k_{\mu\lambda}), \tag{1,2}$$

$$k_{\lambda\mu} = (A)^{-1}(a_{I\lambda}b_{II\mu} - a_{II\lambda}b_{I\mu}), \ (A)^2 = a_{I\,I}\, a_{II\,II} - (a_{I\,II})^2, \ A > 0. \tag{1,3}$$

Au moyen de ce tenseur nous pouvons écrire l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface (1,1) sous la forme suivante:

$$Q_{\lambda\mu}\, \mathrm{d}\xi^\lambda\, \mathrm{d}\xi^\mu = 0. \tag{1,4}$$

Il est bien connu en théorie des surfaces qu'en chaque point de la surface (1,1) existent toujours au moins deux lignes de courbure réelles et distinctes; il s'ensuit

$$(Q)^2 \equiv Q_{I\,I}\, Q_{II\,II} - (Q_{I\,II})^2 \leqq 0.$$

Mais, l'équation (1,4) devient une identité seulement pour $Q_{I\,I} = Q_{II\,II} = Q_{I\,II} = 0$, c'est à dire aux points ombilics. Dans les autres cas nous avons $(Q)^2 < 0$. Pour l'étude suivante il est nécessaire de faire cette convention:

Convention (1,1). *Nous n'allons considérer que des domaines de la surface* (1,1), *où* $(Q)^2 < 0$; *c'est à dire des domaines de la surfaces tels que par chaque point ne passent que deux lignes de courbure.*

Remarque: Ayant fait cette convention, nous n'allons pas étudier les deux cas spéciaux du plan et de la sphère. Car, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit un plan ou une sphère, est: $b_{\lambda\mu} = c a_{\lambda\mu}$ $(c = \text{const})$,[6]) donc $Q_{\lambda\mu} = 0$.

Supposons alors $Q \neq 0$. Nous pouvons construire un nouveau tenseur symétrique, dont les composantes contravariantes $P^{\lambda\mu}$ sont données par les relations

$$Q_{\lambda\nu}\, P^{\lambda\mu} = \delta^\mu_\nu, \ \delta^\mu_\nu = \begin{cases} 0 & \text{pour } \nu \neq \mu \\ 1 & \text{pour } \nu = \mu \end{cases}. \tag{1,5}$$

Il est facile de vérifier les formules

$$P^{\lambda\mu} = \frac{\partial \log (Q)^2}{\partial Q_{\mu\lambda}},$$

c'est à dire

$$P^{I\,I} = \frac{Q_{I\,I}}{(Q)^2}, \ P^{I\,II} = P^{II\,I} = -\frac{Q_{I\,II}}{(Q)^2}, \ P^{II\,II} = \frac{Q_{II\,II}}{(Q)^2}. \tag{1,6}$$

---

[5]) Hlavatý [3], p. 486, resp. 353—354.

[6]) Eisenhart [2], p. 217, exercices 1,2. — Hlavatý [3], p. 331, théorème 1,2).

2. Propriétés fondamentales.

Dans ce paragraphe, nous supposons que la surface (1,1) est rapportée à ses lignes de courbure, alors les courbes

$$\xi^{\mu} = \text{const}$$

sont maintenant les lignes de courbure de notre surface. Il en résulte

$$\begin{aligned} a_{I\,II} &= a_{II\,I} = b_{I\,II} = b_{II\,I} = 0, \\ Q_{I\,I} &= Q_{II\,II} = 0,\ Q_{I\,II} = Q_{II\,I} \neq 0, \\ p^{I\,I} &= p^{II\,II} = 0,\ p^{I\,II} = p^{II\,I} \neq 0. \end{aligned} \tag{2,1}$$

Si l'on désigne par X^a $(a = 1, 2, 3)$ les cosinus directeurs de la droite normale à la surface (1,1) passant par un point quelconque de cette surface, on a les formules d'Olinde Rodrigues bien connues[7])

$$\frac{\partial X^a}{\partial \xi^I} = -\frac{1}{R_1}\frac{\partial x^a}{\partial \xi^I}, \quad \frac{\partial X^a}{\partial \xi^{II}} = -\frac{1}{R_2}\frac{\partial x^a}{\partial \xi^{II}} \tag{2,2}$$

où R_1 est le rayon de courbure principal de la surface le long de la courbe $\xi^{II} = \text{const}$, et R_2 le rayon le long de la courbe $\xi^I = \text{const}$, c'est à dire[8])

$$\frac{1}{R_1} = \frac{b_{I\,I}}{a_{I\,I}}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{b_{II\,II}}{a_{II\,II}}. \tag{2,3}$$

Supposons maintenant que la surface (1,1) soit la surface enveloppe d'une famille de sphères dépendant d'un paramètre t, c'est à dire que les équations de ces sphères sont données par exemple de la manière suivante (pour distinguer les indices des exposants j'écris les puissances entre paranthèses $(\ldots)^n$):

$$(x^1 - a)^2 + (x^2 - b)^2 + (x^3 - c)^2 = (r)^2 \tag{2,4}$$

où a, b, c, r sont des fonctions réelles d'un paramètre t. (Si $r = \text{const} \neq 0$, l'enveloppe s'appelle *la surface canal.*) Désignons cette enveloppe avec concision par le terme „*surface enveloppe de sphères*".

Le théorème suivant est bien connu.

Théorème (2,1). *Voilà la condition nécessaire et suffisante pour que la surface* (1,1) *soit une surface enveloppe de sphères: les lignes de courbure d'au moins un système sur cette surface ne sont que des circonférences.*

Il est facile de voir que cette condition est nécessaire. En effet, une surface enveloppe de sphères touche chacune de ces sphères (2,4) le long d'une circonférence,[9]) et les droites normales à cette surface sont aussi

7) Hlavatý [3], p. 392.

8) Eisenhart [2], p. 230. — Hlavatý [3], p. 391.

9) Nous pouvons démontrer cela en employant la théorie générale des surfaces enveloppes; voir par exemple Eisenhart [2], p. 53—62. — Hlavatý [3], p. 103—112.

les droites normales à la sphère en question. Passant par le centre de cette sphère, ces droites normales forment un cône de révolution, c'est à dire une surface développable. Il en résulte que la circonférence considérée est une ligne de courbure de notre surface.[10]) — Supposons réciproquement que par exemple les lignes de courbure $\xi^{II} = \text{const}$ soient des circonférences. Choisissons une de ces circonférences, et désignons par ω l'angle du rayon de cette circonférence et de la droite normale à la surface (1,1) en un point quelconque de la circonférence considérée. Dans ce cas, on sait qu'on a $\omega = \text{const}$ le long de cette circonférence, parce que celle-ci est une ligne de courbure plane.[11]) On en déduit que les droites normales à notre surface le long de cette courbe forment un cône de révolution. La sphère, ayant son centre au sommet de ce cône et passant par la circonférence considérée, touche notre surface le long de cette courbe. Donc, la surface donnée est une surface enveloppe de sphères.

Au moyen de ce théorème nous pouvons démontrer le théorème auxiliaire suivant:

Théorème (2,2). *Supposons* $\dfrac{1}{R_1 R_2} \neq 0$; *la condition nécessaire et suffisante pour que la surface* (1,1) *soit une surface enveloppe de sphères, sur laquelle les lignes de courbure* $\xi^{II} = \text{const}$ (*ou* $\xi^{I} = \text{const}$) *sont des circonférences, est que l'équation* $\dfrac{\partial R_1}{\partial \xi^I} = 0$ (*ou* $\dfrac{\partial R_2}{\partial \xi^{II}} = 0$) *soit satisfaite.*

Démonstration. Supposons d'abord que les lignes de courbure $\xi^{II} = \text{const}$ ne soient que des circonférences. Soit r le rayon d'une de ces circonférences; le théorème de MEUSNIER nous dit:[12])

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} \cos\omega.$$

Mais, on a $r = \text{const}$, $\omega = \text{const}$ le long de notre circonférence (voir la démonstration du théorème précédent); on en déduit aussi $R_1 = \text{const}$ le long de cette courbe et on trouve $\dfrac{\partial R_1}{\partial \xi^I} = 0$; donc, la condition est nécessaire. — Supposons réciproquement que l'équation $\dfrac{\partial R_1}{\partial \xi^I} = 0$ soit satisfaite. En écrivant

$$y^a = x^a + R_1 X^a \quad (a = 1, 2, 3), \tag{2,5}$$

nous obtenons à l'aide des équations (2,2) la condition suivante:

---

10) EISENHART [2], p. 229, théorème 41,1. — HLAVATÝ [3], p. 394—395, théorème (3,10).

11) HLAVATÝ [3], p. 404, théorème (4,6).

12) EISENHART [2], p. 224. — HLAVATÝ [3], p. 368.

$$\frac{\partial y^a}{\partial \xi^I} = 0.$$

Il en résulte que les points de coordonnées y^a forment une courbe, car $y^a = y^a(\xi^{II})$ ne sont que les fonctions d'une variable ξ^{II}. Désignons par ψ l'angle de la tangente à cette courbe $y^a = y^a(\xi^{II})$ et de la normale à la surface donnée issue du point correspondant au moyen des formules (2,5). En supposant que ξ^{II} soit l'arc de cette courbe, nous obtenons

$$\cos\psi = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial y^a}{\partial \xi^{II}} X^a$$

et en employant les équations bien connues

$$\sum_{a=1}^{3} \frac{\partial x^a}{\partial \xi^\lambda} X^a = 0, \quad \sum_{a=1}^{3} (X^a)^2 = 1, \quad \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial X^a}{\partial \xi^\lambda} X^a = 0$$

nous avons

$$\cos\psi = \frac{\partial R_1}{\partial \xi^{II}}.$$

La conséquence de cette formule et de $\dfrac{\partial R_1}{\partial \xi^I} = 0$ est

$$\frac{\partial \cos\psi}{\partial \xi^I} = 0,$$

c'est à dire que l'angle ψ n'est fonction que d'une variable ξ^{II}. C'est pourquoi on peut dire que toutes les normales à notre surface le long d'une ligne de courbure $\xi^{II} =$ const forment avec une droite un angle $\psi =$ const. Et parce que ces normales ont un point commun dans l'espace (voir les équations (2,5)), on en déduit qu'elles forment un cône de révolution. Il en résulte que la courbe $\xi^{II} =$ const est aussi une ligne de courbure de ce cône[13]), c'est à dire que cette courbe est une circonférence. Donc, notre surface est une surface enveloppe de sphères (voir le théorème (2,1)).

Dans l'application de ce théorème (2,2) il faut aussi considérer les surfaces développables réglées comme surfaces enveloppes de sphères, ce qui est possible, car une surface développable est une surface enveloppe de plans, et on peut dire qu'un plan est une sphère de rayon infini. Il est utile de faire cette convention:

Convention (2,1). *Ci-après, nous comprendrons aussi sous le nom d'enveloppes de sphères les surfaces développables.*

Remarque. Les lignes de courbure de la surface développable sont les droites et leurs trajectoires orthogonales. Ces droites correspondent aux circonférences qui sont les lignes de courbure de la surface enveloppe de sphères.

[13]) HLAVATÝ [3], p. 404, théorème (4,8).

Théorème (2,3). *La condition nécessaire et suffisante pour que la surface* (1,1) *soit une surface enveloppe de sphères, sur laquelle les lignes de courbure* $\xi^{II} = const$ *(ou* $\xi^{I} = const$*) sont des circonférences, est que l'équation*

$$\sum_{a=1}^{3}\left[\frac{\partial x^a}{\partial \xi^I}\frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^{I^2}} - \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^{I^2}}\frac{\partial X^a}{\partial \xi^I}\right] = 0, \qquad (2,6)$$

$$\left(\text{ou } \sum_{a=1}^{3}\left[\frac{\partial x^a}{\partial \xi^{II}}\frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^{II^2}} - \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^{II^2}}\frac{\partial X^a}{\partial \xi^{II}}\right] = 0\right) \qquad (2,6')$$

soit satisfaite.

La démonstration en est facile. Premièrement, il faut montrer que la condition est nécessaire. En effet, si la surface (1,1) est une surface enveloppe de sphères avec $\dfrac{1}{R_1R_2} \neq 0$, dont les lignes de courbure $\xi^{II} =$ $=$ const sont des circonférences, l'équation $\dfrac{\partial R_1}{\partial \xi^I} = 0$ est satisfaite (voir le théorème (2,2)). En prenant la première formule (2,2), c'est à dire

$$\frac{\partial x^a}{\partial \xi^I} = -R_1\frac{\partial X^a}{\partial \xi^I}, \quad (a = 1, 2, 3),$$

il s'ensuit (à l'aide de $\dfrac{\partial R_1}{\partial \xi^I} = 0$)

$$\frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^{I^2}} = -R_1\frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^{I^2}}, \quad (a = 1, 2, 3).$$

Si l'on élimine R_1 de ces formules, on obtient (2,6). Supposons encore que la surface considérée soit une surface développable (alors $\dfrac{1}{R_1R_2} = 0$) avec les droites $\xi^{II} =$ const. On en déduit $\dfrac{1}{R_1} = 0$, et à l'aide des formules (2,2) nous avons

$$\frac{\partial X^a}{\partial \xi^I} = 0, \quad \frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^{I^2}} = 0, \quad (a = 1, 2, 3).$$

Il en résulte que l'équation (2,6) est aussi satisfaite. — En second lieu il faut montrer que notre condition est suffisante. Supposons donc que l'équation (2,6) soit satisfaite. Soit d'abord $\dfrac{1}{R_1} \neq 0$. Ensuite, on peut déduire à l'aide des formules (2,2) les équations

$$\frac{\partial x^a}{\partial \xi^I} = - R_1 \frac{\partial X^a}{\partial \xi^I},$$
$$\frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^{I^2}} = - R_1 \frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^{I^2}} - \frac{\partial R_1}{\partial \xi^I} \frac{\partial X^a}{\partial \xi^I}. \qquad (a = 1, 2, 3)$$

Si l'on substitue ces expressions dans la formule (2,6), on obtient

$$\frac{\partial R_1}{\partial \xi^I} \sum_{a=1}^{3} \left(\frac{\partial X^a}{\partial \xi^I} \right)^2 = 0.$$

Comme $\sum_{a=1}^{3} \left(\frac{\partial X^a}{\partial \xi^I} \right)^2 \neq 0$[14]), il en résulte $\frac{\partial R_1}{\partial \xi^I} = 0$, alors les lignes de courbure $\xi^{II} =$ const sont des circonférences (voir le théorème (2,2)). Supposons encore $\frac{1}{R_1} = 0$; dans ce cas les lignes de courbure $\xi^{II} =$ const sont des droites et notre surface est développable.

En appliquant ce théorème (2,3) au cas spécial, on peut déterminer *les cyclides de* DUPIN. Ce sont toutes les surfaces, dont les lignes de courbure sont des circonférences dans les deux systèmes[15]) (ou des circonférences dans un système et des droites dans le deuxième système — voir les conventions (1,1) et (2,1)).

Théorème (2,4). *Pour qu'une surface soit une cyclide de* DUPIN, *il faut et il suffit que les deux équations* (2,6) *et* (2,6') *soient satisfaites en même temps.*

Remarque. Au moyen d'une représentation dans l'espace à 5 dimensions, on peut donner une autre démonstration de ces théorèmes, plus courte (voir le paragraphe 4).

3. Tenseur $u_{\lambda\mu\nu}$.

En employant les résultats du paragraphe précédent, nous allons maintenant considérer les surfaces enveloppes de sphères rapportées aux coordonnées curvilignes générales. En outre choisissons la notation et la terminologie de M. J. A. SCHOUTEN[16]). Désignons respectivement par ξ^λ et $\xi^{\lambda'}$ deux systèmes des coordonnées curvilignes sur notre surface, et

---

[14]) La surface (1,1) est rapportée à ses lignes de courbure, alors $a_{II} = \sum_{a=1}^{3} \left(\frac{\partial x^a}{\partial \xi^I} \right)^2 \neq 0$, et de plus nous supposons $\frac{1}{R_1} \neq 0$. Et on déduit immédiatement des formules (2,2) qu'on a $\sum_{a=1}^{3} \left(\frac{\partial X^a}{\partial \xi^I} \right)^2 \neq 0$.

[15]) HLAVATÝ [3], p. 558.

[16]) SCHOUTEN-STRUIK [6].

supposons que le déterminant Δ de la transformation

$$\xi^\lambda = \xi^\lambda(\xi^{\mu'}), \quad \begin{array}{l}\lambda = I,\ II \\ \mu' = I',\, II'\end{array} \tag{3,1}$$

de ces coordonnées soit différent de zéro, c'est à dire

$$\Delta = \begin{vmatrix} A^I_{I'} & A^I_{II'} \\ A^{II}_{I'} & A^{II}_{II'} \end{vmatrix} \neq 0, \quad A^\lambda_{\mu'} = \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \xi^{\mu'}}. \tag{3,2}$$

Désignons par ϑ le signe de ce déterminant

$$\vartheta = \operatorname{sign}\Delta = \pm 1,$$

et par $X^a(\xi^\lambda)$ les cosinus directeurs de la normale à notre surface qui sont rapportés aux coordonnées ξ^λ. Ces cosinus se transforment d'après

$$X^a(\xi^{\lambda'}) = \vartheta\, X^a(\xi^\lambda), \ (a = 1, 2, 3).$$

Le théorème suivant n'est qu'un théorème auxiliaire.

Théorème (3,1). *Par la transformation* (3,1), *les expressions*

$$\frac{\partial x^a}{\partial \xi^\lambda}, \quad \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\mu}, \quad \frac{\partial X^a}{\partial \xi^\lambda}, \quad \frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\mu}$$

se transforment d'après ($A^{\lambda\,\mu\ldots\nu}_{\alpha'\beta'\ldots\gamma'}$ *n'est que le produit* $A^{\lambda\,\mu\ldots\nu}_{\alpha'\beta'\ldots\gamma'} = A^\lambda_{\alpha'} A^\mu_{\beta'} \ldots$ $\ldots A^\nu_{\gamma'}$):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x^a}{\partial \xi^{\alpha'}} &= \frac{\partial x^a}{\partial \xi^\lambda} A^\lambda_{\alpha'}, \\
\frac{\partial X^a}{\partial \xi^{\alpha'}} &= \vartheta\, \frac{\partial X^a}{\partial \xi^\lambda} A^\lambda_{\alpha'}, \qquad (a = 1, 2, 3) \\
\frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^{\alpha'}\, \partial \xi^{\beta'}} &= \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\mu} A^{\lambda\cdot\mu}_{\alpha'\beta'} + \frac{\partial x^a}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial \xi^{\alpha'}\, \partial \xi^{\beta'}}, \\
\frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^{\alpha'}\, \partial \xi^{\mu'}} &= \vartheta \left[\frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^\lambda\, \partial \xi^\mu} A^{\lambda\,\mu}_{\alpha'\beta'} + \frac{\partial X^a}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial \xi^{\alpha'}\, \partial \xi^{\beta'}} \right].
\end{aligned} \tag{3,3}$$

La démonstration se fait par un calcul mécanique.

Cela nous permet de construire un tenseur $v_{\nu\lambda\mu}$ de la manière suivante:

Théorème (3,2). *Les expressions*

$$v_{\nu\lambda\mu} = \sum_{a=1}^{3} \left(\frac{\partial x^a}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^\lambda\, \partial \xi^\mu} - \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^\lambda\, \partial \xi^\mu} \frac{\partial X^a}{\partial \xi^\nu} \right) \tag{3,4}$$

sont les composantes covariantes symétriques d'un tenseur, c'est à dire que par la transformation (3,1) *ces expressions se transforment d'après la formule*

$$v_{\alpha'\beta'\gamma'} = \vartheta v_{\nu\lambda\mu}\, A^{\nu\,\lambda\,\mu}_{\alpha'\beta'\gamma'}. \tag{3,5}$$

En effet, nous obtenons à l'aide des formules (3,3)

$$v_{\alpha'\beta'\gamma'} = \vartheta v_{\nu\lambda\mu} A^{\nu\ \lambda\ \mu}_{\alpha'\beta'\gamma'} + \vartheta \sum_{a=1}^{3} \left(\frac{\partial x^a}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial X^a}{\partial \xi^\lambda} - \frac{\partial x^a}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial X^a}{\partial \xi^\nu} \right) A^{\nu}_{\alpha'} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial \xi^{\beta'} \partial \xi^{\gamma'}}.$$

Mais, en employant la définition du deuxième tenseur symétrique $b_{\lambda\nu}$ de la surface considérée

$$b_{\lambda\nu} = - \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial x^a}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial X^a}{\partial \xi^\nu} = - \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial x^a}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial X^a}{\partial \xi^\lambda},$$

nous avons

$$\sum_{a=1}^{3} \left(\frac{\partial x^a}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial X^a}{\partial \xi^\lambda} - \frac{\partial x^a}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial X^a}{\partial \xi^\nu} \right) = 0 \tag{3,6}$$

et la formule (3,5) est alors démontrée. Il faut encore montrer que le tenseur $v_{\nu\lambda\mu}$ est symétrique. En effet, en substituant les expressions

$$\frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\mu} = \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^\mu \partial \xi^\lambda}, \quad \frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\mu} = \frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^\mu \partial \xi^\lambda}$$

dans l'équation (3,4), nous trouvons

$$v_{\nu\lambda\mu} = v_{\nu\mu\lambda}. \tag{3,7}$$

En prenant la dérivée partielle de l'équation (3,6) par rapport à ξ^μ, il vient immédiatement

$$v_{\nu\lambda\mu} = v_{\lambda\nu\mu}. \tag{3,8}$$

On peut déduire à l'aide des formules (3,7) et (3,8) les équations

$$v_{\nu\lambda\mu} = v_{\nu\mu\lambda} = v_{\lambda\mu\nu} = v_{\lambda\nu\mu} = v_{\mu\lambda\nu} = v_{\mu\nu\lambda}$$

et le théorème (3,2) est démontré. Donc il n'existe que 4 composantes importantes du tenseur $v_{\nu\mu\lambda}$,[17]) à savoir

$$v_{I\,I\,I},\ v_{II\,II\,II},\ v_{I\,I\,II},\ v_{I\,II\,II}.$$

A l'aide de tenseurs (1,2) et (1,6) on peut maintenant construire les expressions suivantes:

$$Q_\nu = v_{\nu\lambda\mu} P^{\lambda\mu}, \tag{3,9}$$

$$u_{\nu\lambda\mu} = v_{\nu\lambda\mu} - \tfrac{1}{4} [Q_\nu Q_{\lambda\mu} + Q_\lambda Q_{\mu\nu} + Q_\mu Q_{\nu\lambda}] \tag{3,10}$$

qui se transforment d'après

$$Q_{\alpha'} = \vartheta Q_\nu A^{\nu}_{\alpha'}, \tag{3,11}$$

$$u_{\alpha'\beta'\gamma'} = \vartheta u_{\nu\lambda\mu} A^{\nu\ \lambda\ \mu}_{\alpha'\beta'\gamma'} \tag{3,12}$$

alors Q_ν sont les composantes covariantes d'un vecteur, et $u_{\nu\lambda\mu}$ les composantes covariantes d'un tenseur.

---

[17]) SCHOUTEN-STRUIK [6], p. 14.

Théorème (3,3). *Le tenseur $u_{\nu\lambda\mu}$ est symétrique et il satisfait à l'équation suivante:*

$$u_{\nu\lambda\mu}P^{\lambda\mu} = 0. \tag{3,13}$$

Démonstration. Les tenseurs $Q_{\lambda\mu}$ et $v_{\nu\lambda\mu}$ sont symétriques, donc le tenseur $u_{\nu\lambda\mu}$ est aussi symétrique. En substituant les valeurs $u_{\nu\lambda\mu}$ dans l'expression $u_{\nu\lambda\mu}P^{\lambda\mu}$, nous trouvons

$$u_{\nu\lambda\mu}P^{\lambda\mu} = v_{\nu\lambda\mu}P^{\lambda\mu} - \tfrac{1}{4}[Q_\nu Q_{\lambda\mu}P^{\lambda\mu} + Q_\lambda Q_{\mu\nu}P^{\lambda\mu} + Q_\mu Q_{\nu\lambda}P^{\lambda\mu}]$$

et il en résulte à l'aide des formules (1,5) et (3,9)

$$\begin{aligned} u_{\nu\lambda\mu}P^{\lambda\mu} &= Q_\nu - \tfrac{1}{4}[Q_\nu\delta^\lambda_\lambda + Q_\lambda\delta^\lambda_\nu + Q_\mu\delta^\mu_\nu] = \\ &= Q_\nu - \tfrac{1}{4}[2Q_\nu + Q_\nu + Q_\nu] = 0. \end{aligned}$$

Pour appliquer les résultats du 2[e] paragraphe, il faut connaître les composantes du tenseur $u_{\nu\lambda\mu}$ par rapport aux coordonnées curvilignes spéciales.

Théorème (3,4). *Supposons que la surface* (1,1) *soit rapportée à ses lignes de courbure; nous avons*

$$u_{I\,I\,I} = v_{I\,I\,I}, \quad u_{II\,II\,II} = v_{II\,II\,II} \tag{3,14}$$

et $u_{\nu\lambda\mu} = 0$ pour les autres composantes.

C'est une conséquence des relations (2,1) et (3,10), ou (3,13); par exemple, pour $\lambda = I, \mu = II$, l'équation (3,11) devient

$$u_{\nu I\,II}P^{I\,II} + u_{\nu II\,I}P^{II\,I} = 0;$$

et parce que les tenseurs $u_{\nu\lambda\mu}$ et $P^{\lambda\mu}$ sont symétriques, nous avons

$$u_{\nu I\,II} = 0.$$

En nous référant au théorème (2,3) et surtout à la convention (2,1) nous pouvons démontrer ce théorème principal:

Théorème (3,5). *La condition nécessaire et suffisante pour que la surface* (1,1) *soit une surface enveloppe de sphères, est que l'équation*

$$u_{\nu\lambda\mu}u_{\alpha\beta\gamma}P^{\nu\alpha}P^{\lambda\beta}P^{\mu\gamma} = 0 \tag{3,15}$$

soit satisfaite.

Démonstration. Avant tout, il est immédiatement à remarquer que pendant la transformation (3,1) l'équation (3,15) reste invariable, car $u_{\nu\lambda\mu}$ sont les composantes covariantes de tenseur de 3[e] ordre, et $P^{\nu\lambda}$ sont les composantes contravariantes du tenseur de 2[e] ordre. Il en résulte que nous pouvons étudier l'interprétation géométrique de cette équation en employant les coordonnées curvilignes spéciales. Considérons donc la surface rapportée à ses lignes de courbure. Dans ce cas, nous pouvons appliquer le théorème (3,4), et l'équation (3,15) devient

$$v_{I\,I\,I}v_{II\,II\,II}(P^{I\,II})^3 = 0.$$

Parce que $P^{I\,II} \neq 0$ (voir les formules (2,1)), nous avons

$$v_{I\,I\,I} = 0 \text{ ou } v_{II\,II\,II} = 0,$$

qui ne sont que les équations (2,6) ou (2,6′). Il en résulte que notre théorème est démontré (voir le théorème (2,3)).

Nous avons donc le résultat suivant:

L'expression $u_{\nu\lambda\mu}u_{\alpha\beta\gamma}P^{\nu\alpha}P^{\lambda\beta}P^{\mu\gamma}$ est un scalaire, au moyen duquel nous pouvons déterminer les surfaces enveloppes de sphères (à l'aide de l'équation (3,15)).

Les cyclides de Dupin sont déterminées de la manière suivante:

Théorème (3,6). *La condition nécessaire et suffisante pour que la surface* (1,1) *soit une cyclide de* Dupin, *est*:

$$u_{\nu\lambda\mu} = 0 \tag{3,16}$$

pour toutes les permutations ν, λ, μ.

Démonstration. Supposons d'abord que la surface considérée soit rapportée à ses lignes de courbure. Dans ce cas, nous pouvons nous servir du théorème (2,4), donc la condition nécessaire et suffisante, pour que la surface soit une cyclide de Dupin, est

$$v_{I\,I\,I} = v_{II\,II\,II} = 0,$$

c'est à dire (voir le théorème (3,4))

$$u_{\nu\lambda\mu} = 0.$$

En employant les formules (3,12), nous voyons que cette condition est satisfaite par rapport aux coordonnées curvilignes générales.

4. Correspondance des surfaces enveloppes de sphères et des surfaces réglées.

Les résultats du paragraphe précédent sont très analogues à la détermination des surfaces réglées. Il semble utile d'introduire ici sans démonstration[18]) la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit une surface réglée. Désignons par $h^{\lambda\mu}$ les composantes contravariantes qui sont données par les relations

$$b_{\lambda\mu}h^{\lambda\nu} = \delta^{\nu}_{\mu},$$

$b_{\lambda\mu}$ étant le deuxième tenseur de la surface considérée. De plus, D_λ étant le symbole de la dérivée covariante de la connexion métrique, le tenseur

$$b_{\nu\lambda\mu} = D_\nu b_{\lambda\mu}$$

est symétrique, et nous avons[19])

[18]) La démonstration est à voir dans le livre de M. Hlavatý [3], p. 435—440.

[19]) Hlavatý [3], p. 327.

$$b_{\nu\lambda\mu}h^{\lambda\mu} = K_\nu = \frac{\partial \log K}{\partial \xi^\nu} \tag{4,1}$$

où $K = \dfrac{1}{R_1 R_2}$ est la courbure totale de GAUSS de la surface considérée

Construisons les expressions

$$a_{\nu\lambda\mu} = b_{\nu\lambda\mu} - \tfrac{1}{4}[K_\nu b_{\lambda\mu} + K_\lambda b_{\nu\mu} + K_\mu b_{\nu\lambda}]. \tag{4,2}$$

Ces expressions sont les composantes covariantes d'un tenseur symétrique qui satisfont à la relation

$$a_{\nu\lambda\mu}h^{\lambda\mu} = 0. \tag{4,3}$$

Puis, *l'équation*

$$a_{\nu\lambda\mu}a_{\alpha\beta\gamma}h^{\nu\alpha}h^{\lambda\beta}h^{\mu\gamma} = 0 \tag{4,4}$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que la surface soit une surface réglée.[20]) *De plus, pour qu'une surface soit une surface réglée du deuxième degré* (qui correspond ici à la cyclide de DUPIN), *il faut et il suffit, que toutes les composantes $a_{\nu\lambda\mu}$ soient égales à zéro, c'est à dire*[21])

$$a_{\nu\lambda\mu} = 0. \tag{4,5}$$

Voici les équations (4,1), (4,2), (4,3), (4,4) et (4,5) de même forme que les équations (3,9), (3,10), (3,13), (3,15) et (3,16), et le tenseur $b_{\nu\lambda\mu}$ joue ici le rôle du tenseur $v_{\nu\lambda\mu}$ pour les surfaces enveloppes de sphères. Ce paragraphe est consacré à l'étude de cette analogie.

Il n'est pas difficile de trouver l'idée commune des équations (3,15) et (4,4). La réponse est donnée par la transformation de LIE qui fait correspondre à des surfaces enveloppes de sphères des surfaces réglées.[22])

C'est la transformation des coordonnées homogènes dans un espace à 5 dimensions que nous appellerons pour abréger le K-espace (l'espace de KLEIN).[23]) Si nous désignons par $\mathbf{p}$ un point quelconque dans cet espace, alors ce K-point $\mathbf{p}$ a 6 coordonnées homogènes $p^1, p^2, \ldots, p^6$.

Considérons maintenant une droite, ou une sphère dans l'espace euclidien à trois dimensions. En employant les coordonnées de PLÜCKER de cette droite, ou les coordonnées *hexasphériques* de cette sphère, nous pouvons la représenter par un K-point $\mathbf{p}$, ou $\mathbf{q}$ de la manière suivante: *pour que le K-point $\mathbf{p}$ représente une droite, il faut et il suffit que l'équation*

$$p^1p^4 + p^2p^5 + p^3p^6 = 0 \tag{4,6}$$

soit satisfaite, car il n'y a que dans ce cas que $p^1, p^2, \ldots, p^6$ sont les coordonnées de PLÜCKER d'une droite (nous choisissons la notation de M. HLAVATÝ);[24]) et ainsi de suite: *pour que le K-point $\mathbf{q}$ représente une sphère, il*

[20]) HLAVATÝ [3], p. 438, théorème (2,1).
[21]) HLAVATÝ [3], p. 439, théorème (2,2).
[22]) BLASCHKE [2], p. 233 etc.
[23]) HLAVATÝ [4], [5].
[24]) HLAVATÝ [5].

faut et il suffit que l'équation

$$(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2 + q^4q^5 - (q^6)^2 = 0 \tag{4,7}$$

soit satisfaite, car il n'y a que dans ce cas que $q^1, q^2, \ldots, q^6$ sont les coordonnées hexasphériques d'une sphère.[25]) Si l'on désigne par m^a $(a = 1, 2, 3)$ les coordonnées cartésiennes du centre d'une sphère, et par r le rayon de cette sphère, les coordonnées hexasphériques de cette sphère sont données par les formules

$$\begin{aligned} q^1 &= \varrho m^1, \; q^4 = \varrho[(r)^2 - \sum_{a=1}^{3} (m^a)^2] \\ q^2 &= \varrho m^2, \; q^5 = \varrho, \qquad\qquad \varrho \neq 0. \\ q^3 &= \varrho m^3, \; q^6 = \varrho r. \end{aligned} \tag{4,8}$$

Dans le cas $r = 0$, la sphère devient un point. La convention (2,1) étant donnée, les plans sont ici considérés comme des sphères de rayon infini. Soit

$$\sum_{a=1}^{3} x^a m^a = w, \quad \sum_{a=1}^{3} (m^a)^2 = 1 \tag{4,9}$$

l'équation d'un plan, alors ses coordonnées hexasphériques sont données par les formules

$$\begin{aligned} q^1 &= \varrho m^1, \; q^4 = -2\varrho w, \\ q^2 &= \varrho m^2, \; q^5 = 0, \qquad \varrho \neq 0. \\ q^3 &= \varrho m^3, \; q^6 = \varrho. \end{aligned} \tag{4,10}$$

Mais, l'équation (4,7) n'est pas satisfaite seulement pour les valeurs (4,8) et (4,10), parce que les nombres

$$q^1 = q^2 = q^3 = q^5 = q^6 = 0, \; q^4 = \varrho \neq 0 \tag{4,11}$$

sont aussi liés par la formule (4,7). Ces nombres sont les coordonnées hexasphériques du K-point *impropre* de l'espace de Möbius[26].)

Les sphères, ou les points (4,8), les plans (4,10) et le K-point (4,11) sont ci-après désignés globalement sous le nom des L-sphères (les sphères de Lie).

Dans cette notation, la célèbre transformation de Lie qui fait correspondre à la droite $\mathbf{p}$ la L-sphère $\mathbf{q}$, est donnée par les formules

$$\begin{aligned} p^1 &= q^2 + q^6, & p^4 &= q^2 - q^6, \\ p^2 &= -q^1 + \sqrt{-1}\, q^3, & p^5 &= -q^1 - \sqrt{-1}\, q^3, \\ p^3 &= q^4, & p^6 &= q^5. \end{aligned} \tag{4,12}$$

Naturellement, au cours de cette transformation, l'équation (4,6) se transforme en l'équation (4,7).

---

[25]) Hlavatý [4], p. 2—3.
[26]) Hlavatý [4], p. 2.

Soient $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ deux K-points de coordonnées $a^1, a^2, \ldots, a^6$ et $b^1, b^2, \ldots, b^6$, et désignons encore pour abréger

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \equiv a^1b^4 + a^2b^5 + a^3b^6 + a^4b^1 + a^5b^2 + a^6b^3, \tag{4,13}$$
$$\boldsymbol{a} \;.\; \boldsymbol{b} \equiv a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 + \tfrac{1}{2}(a^4b^5 + a^5b^4) - a^6b^6. \tag{4,14}$$

Nous pouvons donc écrire les équations (4,6), ou (4,7) sous la forme

$$\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p} \equiv 2(p^1p^4 + p^2p^5 + p^3p^6) = 0, \tag{4,6'}$$
$$\boldsymbol{q} \;\cdot\; \boldsymbol{q} \equiv (q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2 + q^4q^5 - (q^6)^2 = 0. \tag{4,7'}$$

Considérons de nouveau la surface (1,1). Pour exprimer cette surface à l'aide des coordonnées de PLÜCKER, ou à l'aide des coordonnées hexasphériques, nous allons considérer un point quelconque de cette surface et le plan tangent en ce point.

Étudions d'abord la géométrie des L-sphères. Un point quelconque de la surface (1,1) est représenté comme la L-sphère ${}^1\mathbf{z}$ (avec un rayon de longueur 0), et le plan tangent est représenté comme la deuxième L-sphère ${}^2\mathbf{z}$. Ce couple des L-sphères, c'est à dire des K-points ${}^\Omega\mathbf{z}$ ($\Omega = 1, 2$) dépend de deux variables ξ^λ ($\lambda = I, II$), et nous pouvons l'exprimer par les symboles

$${}^\Omega\mathbf{z} = {}^\Omega\mathbf{z}(\xi^\lambda). \tag{4,15}$$

Si l'on désigne les dérivées partielles de ces coordonnées hexasphériques par $\dfrac{\partial {}^\Omega\mathbf{z}}{\partial \xi^\mu}$, on a toujours pour notre surface les conditions suivantes:[27])

$${}^\Omega\mathbf{z} \,.\, {}^\Sigma\mathbf{z} = \frac{\partial {}^\Omega\mathbf{z}}{\partial \xi^I} \,.\, {}^\Sigma\mathbf{z} = \frac{\partial {}^\Omega\mathbf{z}}{\partial \xi^{II}} \,.\, {}^\Sigma\mathbf{z} = 0 \qquad (\Omega, \Sigma = 1, 2). \tag{4,16}$$

En employant cette notation, nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Théorème (4,1). *Supposons que la surface soit rapportée à ses lignes de courbure. La condition nécessaire et suffisante pour que cette surface soit une surface enveloppe de sphères, sur laquelle les lignes de courbure* $\xi^{II} =$ $=$ *const ne sont que des circonférences, est que dans le faisceau des L-sphères* ${}^1\mathbf{z}$, ${}^2\mathbf{z}$ *existe une sphère* $\boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{q} = \alpha\, {}^1\mathbf{z} + \beta\, {}^2\mathbf{z} \tag{4,17}$$

telle qu'on ait

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \xi^I} = \varrho \boldsymbol{q}. \tag{4,18}$$

La démonstration est évidente.[28]) Considérons le faisceau des L-sphères (4,17). Pour que notre surface soit une surface enveloppe de sphères avec les lignes de courbure $\xi^{II} =$ const circulaires, il faut et il suffit qu'il existe une sphère $\boldsymbol{q}$ dans le faisceau (4,17), qui touche la surface donnée

---

[27]) BLASCHKE [1], p. 252 etc., § 57.

[28]) BLASCHKE [1], p. 388 etc.

le long d'une circonférence (voir le théorème (2,1)); alors cette sphère $\mathbf{q}$ ne dépend que d'une seule variable ξ^{II}, et dans ce cas on a (4,18).[29])

Remarque. Les coordonnées hexasphériques étant homogènes, nous pouvons aussi poser $\varrho = 0$ dans l'équation (4,18). C'est facile à voir, parce que au cours de la transformation $\mathbf{q} = \varphi\,{}^{`}\mathbf{q}$, $\varphi \neq 0$ (c'est à dire $q^1 = \varphi\,{}^{`}q^1, \ldots, q^6 = \varphi\,{}^{`}q^6$) on a

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \xi^I} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^I}\,{}^{`}\mathbf{q} + \varphi\,\frac{\partial\,{}^{`}\mathbf{q}}{\partial \xi}$$

et l'équation (4,18) n'est que

$$\frac{\partial\,{}^{`}\mathbf{q}}{\partial \xi^I} = \left(\varrho - \frac{\partial \log\varphi}{\partial \xi^I}\right){}^{`}\mathbf{q}.$$

Alors, si on a $\varrho \neq 0$, il faut choisir φ de sorte qu'on ait

$$\varrho - \frac{\partial \log\varphi}{\partial \xi^I} = 0$$

et on obtient (4,18) sous la forme $\dfrac{\partial\,{}^{`}\mathbf{q}}{\partial \xi^I} = 0$. Il en résulte que ${}^{`}\mathbf{q} = {}^{`}\mathbf{q}(\xi^{II})$ ne sont que des fonctions d'une variable ξ^{II} et on obtient la représentation bien connue: la surface considérée est représentée comme une courbe dans le K-espace.[30])

Nous pouvons maintenant démontrer de nouveau le théorème (2,3). Si l'on désigne par x^a les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque de la surface considérée,[31]) et par X^a les cosinus directeurs de la normale passant par ce point, on a les coordonnées hexasphériques suivantes pour les L-sphères ${}^1\mathbf{z}$, ${}^2\mathbf{z}$:

$${}^1\mathbf{z}(\sigma x^1, \sigma x^2, \sigma x^3, -\sigma[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2], \sigma, 0), \quad \sigma \neq 0,$$

$${}^2\mathbf{z}(\tau X^1, \tau X^2, \tau X^3, -2\tau[x^1X^1 + x^2X^2 + x^3X^3], 0, \tau), \quad \tau \neq 0.$$

Les équations (4,16) sont ici satisfaites.

Et si nous appliquons l'équation (4,18) pour les coordonnées q^5 et q^6, nous avons

$$\sigma\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\xi^I} - \varrho\alpha\right) + \alpha\,\frac{\partial\sigma}{\partial\xi^I} = 0,$$

$$\tau\left(\frac{\partial\beta}{\partial\xi^I} - \varrho\beta\right) + \beta\,\frac{\partial\tau}{\partial\xi^I} = 0.$$

Les coordonnées hexasphériques étant homogènes, nous pouvons ici poser $\sigma = \tau = 1$, $\varrho = 0$, et ces dernières équations sont de la forme

[29]) Blaschke [1], p. 389.

[30]) Hlavatý [4], p. 8 etc., § 2.

[31]) Voir les paragraphes précédants.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi^I} = \frac{\partial \beta}{\partial \xi^I} = 0.$$

Par conséquent, les équations (4,18) pour les coordonnées $q^1, q^2, \ldots, q^4$ deviennent

$$\alpha \frac{\partial x^a}{\partial \xi^I} + \beta \frac{\partial X^a}{\partial \xi^I} = 0, \qquad (a = 1, 2, 3). \tag{4,19}$$

En prenant la dérivée de cette formule par rapport à ξ^I, il vient

$$\alpha \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^{I^2}} + \beta \frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^{I^2}} = 0, \qquad (a = 1, 2, 3). \tag{4,20}$$

En éliminant les paramètres α, β des équations (4,19) et (4,20), nous obtenons immédiatement la formule (2,6) et le théorème (2,3) est démontré.

Pour déduire la condition des surfaces réglées, il faut exprimer la surface (1,1) à l'aide des coordonées de Plücker. En employant la transformation de Lie (4,12), nous pouvons déduire les formules qui sont analogues aux formules (4,16). Considérons de nouveau un point quelconque de la surface (1,1). Toutes les tangentes à cette surface passant par ce point forment un faisceau de droites. Soient deux de ces droites représentées par les K-points ${}^1\mathbf{y}, {}^2\mathbf{y}$. Ce couple des droites, ou des K-points ${}^1\mathbf{y}, {}^2\mathbf{y}$ dépend de deux variables ξ^λ, $(\lambda = I, II)$; nous pouvons l'exprimer par les symboles

$${}^\Omega\mathbf{y} = {}^\Omega\mathbf{y}(\xi^\lambda), \ (\Omega = 1, 2). \tag{4,21}$$

Nous voyons que ces deux droites sont analogues aux L-sphères ${}^\Omega\mathbf{z}$ (voir les formules (4,15)). Au cours de cette analogie, les formules (4,16) deviennent (voir la notation (4,13)):

$${}^\Omega\mathbf{y} \times {}^\Sigma\mathbf{y} = \frac{\partial\, {}^\Omega\mathbf{y}}{\partial \xi^I} \times {}^\Sigma\mathbf{y} = \frac{\partial\, {}^\Omega\mathbf{y}}{\partial \xi^{II}} \times {}^\Sigma\mathbf{y} = 0, \ (\Omega, \Sigma = 1, 2) \tag{4,22}$$

et aux lignes de courbure correspondent les lignes asymptotiques de la surface considérée.[32])

Remarque. En employant la transformation de Lie (4,12), on peut déduire immédiatement les formules (4,22) des formules (4,16). Mais la transformation (4,12) est complexe, et nous étudions les surfaces réelles. Alors nous ne pouvons employer cette transformation que dans les cas spéciaux où cette transformation devient réelle (par exemple pour $q^3 = 0$). Dans les autres cas, il est nécessaire de vérifier ces formules par les méthodes de la géométrie réglée (Blaschke [1], §§ 54, 57).

Alors, le théorème suivant est analogue au théorème (4,1); j'en supprime la démonstration.

[32]) Blaschke [1], p. 254 etc., § 58.

Théorème (4,2). *Supposons que la surface soit rapportée à ses lignes asymptotiques. La condition nécessaire et suffisante pour que cette surface soit une surface réglée, sur laquelle les lignes asymptotiques $\xi^{II} = const$ ne sont que des droites, est que dans le faisceau des droites $^1\mathbf{y}, {}^2\mathbf{y}$ existe une droite $\mathbf{p}$*

$$\mathbf{p} = \alpha\, {}^1\mathbf{y} + \beta\, {}^2\mathbf{y}$$

telle qu'on ait:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \xi^I} = \varrho \mathbf{p}. \tag{4,23}$$

Supposons que les droites $^1\mathbf{y}, {}^2\mathbf{y}$ soient les tangentes aux lignes asymptotiques de la surface considérée et convenons de désigner leurs coordonnées de PLÜCKER de la manière suivante

$$\begin{aligned}
&{}^1\mathbf{y}\left(\sigma \frac{\partial x^1}{\partial \xi^I},\ \sigma \frac{\partial x^2}{\partial \xi^I},\ \sigma \frac{\partial x^3}{\partial \xi^I},\ \sigma\left[x^3 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^I} - x^2 \frac{\partial x^3}{\partial \xi^I}\right],\right.\\
&\qquad \left.\sigma\left[x^1 \frac{\partial x^3}{\partial \xi^I} - x^3 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^I}\right],\ \sigma\left[x^2 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^I} - x^1 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^I}\right]\right),\ \sigma \neq 0,\\
&{}^2\mathbf{y}\left(\tau \frac{\partial x^1}{\partial \xi^{II}},\ \tau \frac{\partial x^2}{\partial \xi^{II}},\ \tau \frac{\partial x^3}{\partial \xi^{II}},\ \tau\left[x^3 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^{II}} - x^2 \frac{\partial x^3}{\partial \xi^{II}}\right],\right.\\
&\qquad \left.\tau\left[x^1 \frac{\partial x^3}{\partial \xi^{II}} - x^3 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^{II}}\right],\ \tau\left[x^2 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^{II}} - x^1 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^{II}}\right]\right),\ \tau \neq 0.
\end{aligned} \tag{4,24}$$

Les équations (4,22) sont ici satisfaites.

Dans ce cas il résulte de la condition (4,23) que:

$$\frac{\partial\, {}^1\mathbf{y}}{\partial \xi^I} = \varrho\, {}^1\mathbf{y}$$

(car on a $\alpha = 1$, $\beta = 0$), et en substituant les valeurs (4,24) dans cette équation, nous trouvons

$$\frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^{I^2}} = \varrho \frac{\partial x^a}{\partial \xi^I}.$$

Si l'on désigne par $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ les symboles de CHRISTOFFEL bien connus,[33]) on a

$$\left\{ \begin{matrix} II \\ I\ I \end{matrix} \right\} = 0,$$

$$b_{\omega\mu\lambda} = D_\omega b_{\mu\lambda} = \frac{\partial}{\partial \xi^\omega} b_{\mu\lambda} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\omega \end{matrix} \right\} b_{\alpha\lambda} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \lambda\omega \end{matrix} \right\} b_{\mu\alpha}.$$

[33]) HLAVATÝ [3], p. 183, 324.

Il en résulte

$$b_{I\,II} = 0.$$

Ce n'est que la condition nécessaire et suffisante pour que la surface (rapportée à ses lignes asymptotiques) soit la surface réglée engendrée par les droites $\xi^{II} =$ const. Nous venons alors de montrer que le tenseur $b_{\nu\lambda\mu}$ joue ici le rôle du tenseur $v_{\nu\lambda\mu}$ des surfaces enveloppes de sphères.

Vecteurs Q_ν et K_ν.

En comparant les surfaces enveloppes de sphères et les surfaces réglées, nous trouvons une différence intéressante. Considérons les vecteurs Q_ν et K_ν qui sont donnés par les formules (3,9) et (4,1). On sait qu'on a

$$K_\nu = \frac{\partial \log K}{\partial \xi^\nu},$$

$K = \dfrac{1}{R_1 R_2}$ étant la courbure totale, donc un scalaire. Il en résulte que K_ν est le gradient du scalaire $\log K$,[34]) et réciproquement nous pouvons construire le scalaire de ce vecteur K_ν; ce scalaire est important dans la théorie des surfaces.

Mais le vecteur analogue, c'est à dire le vecteur Q_ν, n'est pas necessairement un gradient, comme le montre l'exemple suivant. Considérons la surface de révolution

$$x^1 = \xi^{II} \cos\xi^I,$$
$$x^2 = \xi^{II} \sin\xi^I,$$
$$x^3 = f(\xi^{II}),$$

où $f(\xi^{II})$ est une fonction analytique du paramètre ξ^{II}. Cette surface est rapportée à ses lignes de courbure, puisqu'on a $a_{I\,II} = b_{I\,II} = 0$. De plus, les lignes de courbure $\xi^{II} =$ const ne sont que des circonférences, donc cette surface est une surface enveloppe de sphères (voir le théorème (2,1)). En prenant les formules des paragraphes précédents, il vient

$$Q_I = \frac{4}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi^{II}}\right)^2}}, \quad Q_{II} = 0,$$

$$\frac{\partial Q_I}{\partial \xi^{II}} = \frac{4\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi^{II}}\,\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^{II^2}}}{\left(1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi^{II}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial Q_{II}}{\partial \xi^I} = 0$$

et nous avons en général

---

[34]) HLAVATÝ [3], p. 435.

$$\frac{\partial Q_I}{\partial \xi^{II}} + \frac{\partial Q_{II}}{\partial \xi^I}.$$

Il s'ensuit que le vecteur Q_ν n'est pas un gradient.[35]) Alors, nous ne pouvons pas construire un scalaire de ce vecteur, pas même pour les surfaces enveloppes de sphères en général.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

[1] W. BLASCHKE: Vorlesungen über Differentialgeometrie III, bearbeitet von G. THOMSEN (Jul. Springer, Berlin 1929).

[2] L. P. EISENHART: An Introduction to Differential Geometry (Princeton University Press, 1940).

[3] V. HLAVATÝ: Differentialgeometrie der Kurven und Flächen und Tensorrechnung (P. Noordhoff N. V., Groningen-Batavia 1939).

[4] V. HLAVATÝ: Zur Lie'schen Kugelgeometrie: I. Kanalflächen (Věstník Královské české společnosti nauk, II^e classe, Praha 1941).

[5] V. HLAVATÝ: Differentielle Liniengeometrie (P. Noordhoff N. V., Groningen-Batavia 1945).

[6] J. A. SCHOUTEN-D. J. STRUIK: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie (P. Noordhoff N. V., Groningen-Batavia, I. Band 1935).

O kanálových plochách.

(Obsah předešlého článku.)

Obsahem článku je konstrukce skaláru, který charakterisuje kanálové plochy.

Jsou-li x^a $(a = 1, 2, 3)$ pravoúhlé souřadnice v prostoru, můžeme parametrické rovnice plochy psát ve tvaru

$$x^a = x^a(\xi^\lambda), \ (\lambda = I, II), \tag{I}$$

kde ξ^I, ξ^{II} jsou nezávislé parametry. Označme $a_{\lambda\mu}$, resp. $b_{\lambda\mu}$ složky prvního, resp. druhého základního tensoru plochy (I) a položme

$$k_{\lambda\mu} = A^{-1}(a_{I\lambda}b_{II\mu} - a_{II\lambda}b_{I\mu}), \ A^2 = a_{I\,I}a_{II\,II} - \overset{2}{a}_{I\,II}, \ A > 0,$$
$$Q_{\lambda\mu} = Q_{\mu\lambda} = \tfrac{1}{2}(k_{\lambda\mu} + k_{\mu\lambda}),$$
$$Q^2 = Q_{I\,I}Q_{II\,II} - Q_{I\,II}^{\ 2}.$$

V celé práci je předpokládáno $Q^2 \neq 0$; to znamená, že vyloučíme ze svých úvah kruhové body plochy (tím jsou z úvah vyloučeny dvě speciální plochy, totiž rovina a koule). Určeme dále složky $P^{\lambda\mu}$ z rovnic

$$Q_{\lambda\nu}P^{\lambda\mu} = \delta^\mu_\nu, \ \delta^\mu_\nu = \begin{cases} 0 \text{ pro } \nu \neq \mu \\ 1 \text{ pro } \nu = \mu \end{cases}$$

a označme směrové kosiny normály plochy (I) znaky X^a $(a = 1, 2, 3)$. Sestrojme postupně tyto veličiny:

[35]) HLAVATÝ [3], p. 120, théorème (2,6a, b).

$$v_{\nu\lambda\mu} = \sum_{a=1}^{3} \left(\frac{\partial x^a}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\mu} - \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\mu} \frac{\partial X^a}{\partial \xi^\nu} \right),$$

$$Q_\nu = v_{\nu\lambda\mu} P^{\lambda\mu},$$

$$u_{\nu\lambda\mu} = v_{\nu\lambda\mu} - \tfrac{1}{4}[Q_\nu Q_{\lambda\mu} + Q_\lambda Q_{\mu\nu} + Q_\mu Q_{\nu\lambda}].$$

Hlavním výsledkem je věta:

Nutná a dostačující podmínka pro to, aby plocha (I) *byla kanálová, jest:*

$$u_{\nu\lambda\mu} u_{\alpha\beta\gamma} P^{\nu\alpha} P^{\lambda\beta} P^{\mu\gamma} = 0. \tag{II}$$

Speciálně platí:

Nutná a dostačující podmínka pro to, aby plocha (I) *byla t. zv.* DUPINOVOU *cyklidou, jest:* $u_{\nu\lambda\mu} = 0$ *pro všechny permutace indexů* ν, λ, μ.

Při tom mezi kanálové plochy počítá autor také plochy rozvinutelné (což je přirozené, neboť rozvinutelná plocha je obálkou rovin a rovinu můžeme pokládat za mezný případ koule s nekonečně velkým poloměrem).

V prvních třech paragrafech dokazuje autor tvrzení zde uvedené přímým výpočtem, při čemž užívá nejprve hlavních parametrů na ploše (I) a pak přechází teprve k parametrům obecným.

Ve čtvrtém a pátém paragrafu upozorňuje na analogii s přímkovými plochami nerozvinutelnými, které jsou charakterisovány jiným skalárem (viz rovnici (4,4) hořeního článku), jehož sestrojení je formálně stejné jako u skaláru (II). Tato analogie je ovšem zprostředkována známou LIEOVOU transformací v KLEINOVĚ pětirozměrném prostoru, která PLÜCKEROVY souřadnice přímky převádí v hexasférické souřadnice koule. V tomto pětirozměrném prostoru ukazuje autor společnou konstrukci obou skalárů současně, čímž je zároveň podáno nové odvození skaláru, charakterisujícího přímkové plochy.