Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

František Brandler

Příspěvek k numerickému řešení rovnice 3. stupně

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 1, D54--D63

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109144

ních vlastností (jako je logaritmus součinu, podílu, mocniny) pouze nerovnosti (n celé kladné)

$$\frac{1}{n} > \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2},$$

t. j.

$$n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

jež plynou ihned logaritmováním z nerovností

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

používaných k definici čísla e.

Nový důkaz SELBERGŮV a ERDÖSŮV znamená velký methodický pokrok a splnění starého desiderata. Podotýkám ovšem, že autoři dokazují touto methodou pouze vzorec (1) a nikoliv jemnější známé věty o rozdílu $\pi(x) - x : \log x$ nebo $\pi(x) - li(x)$.

*

Une démonstration nouvelle de la loi de la distribution des nombres premiers. Une bréve information sur la démonstration élémentaire donnée par MM. Erdös et Selberg.

PŘÍSPĚVEK K NUMERICKÉMU ŘEŠENÍ ROVNIC 3. STUPNĚ.

Ing. dr FRANTIŠEK BRANDLER, Praha.

Článek tento má za účel, ukázati v souvislosti se zajímavou studií p. dr B. KÖNIGA „Řešení rovnic algebraických vyšších stupňů" (uveřejněnou na str. 118—124, roč. *24* (1944/45) „Rozhledů matematicko-přírodovědeckých"), že k řešení těchto rovnic lze namnoze s výhodou užíti též methody nejmenších čtverců, kterážto methoda — pokud je mi známo — na tento obor způsobem v dalším uváděným dosud aplikována nebyla. Jde v podstatě o to, že křivku $y = f(x)$, která jest grafickým obrazem dotyčné funkce (rovnice), nahradíme v určitém intervalu ξ — v okolí kořene rovnice — jinou vhodnou křivkou $y = \varphi(x)$, jež ve smyslu uvedené methody k dané křivce co nejtěsněji přiléhá, t. j. tuto křivku v intervalu ξ „vyrovnává" tak, aby součet čtverců odchylek $\Delta y = \varphi(x) - f(x)$ byl minimem.

Omezíme se zde na řešení rovnic kubických. Za náhradní funkci $\varphi(x)$ volíme jednak parabolu 2. stupně („vyrovnávací parabolu"), jednak přímku („vyrovnávací přímku"), jakožto útvary s praktického hlediska nejúčelnější.

I. Vyrovnávací parabola.

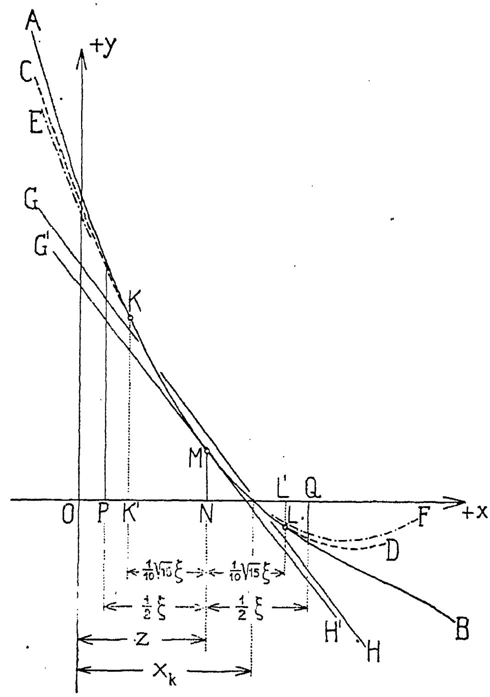
a) Funkce

$$y = f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{1}$$

(kde $a_{0,1,2,3}$ značí daná čísla a x veličinu nezávisle proměnnou), je graficky znázorněna kubickou parabolou. Na obr. 1 je tato parabola, vztažená na pravoúhlou soustavu souřadnic, vyznačena plně vytaženou čarou AB. Úsečka x_k jejího průsečíku s osou x je pak, jak známo, kořenem rovnice

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \tag{1a}$$

Jeho přibližnou hodnotu $\overline{ON} = z$, z které při dalším výpočtu budeme vycházeti, zjistíme si nejlépe zobrazením křivky AB na milimetrovém papíru. Postačí ovšem zcela zběžný náčrtek, pouze v okolí průsečíku bylo by sestrojiti křivku přesněji. Při vhodném měřítku podaří se nám tímto způsobem snadno, určiti aproximativní hodnotu z kořene x_k na 3 místa přesně. (Na obr. 1 liší se z a x_k od sebe poněkud více, než by to odpovídalo pojmu aproximace; stalo se tak pro větší jasnost nákresu). Polohu a délku intervalu $\xi = \overline{PQ}$ volíme tak, aby střed intervalu se kryl s bodem N (vede to totiž k jednodušším vzorcům) a aby kořen ležel uvnitř intervalu.



Obr. 1.

Podle toho, co vpředu bylo uvedeno, musí *vyrovnávací parabola*

$$y = \varphi(x) = \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0 \tag{2}$$

vyhověti podmínce

$$\int_{z-\frac{1}{2}\xi}^{z+\frac{1}{2}\xi} [\varphi(x) - f(x)]^2 \, dx = \min. \tag{3}$$

z čehož plyne, že první částečná derivace tohoto výrazu podle neznámých koeficientů $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ musí se rovnati nule.

Z příslušných rovnic, odpovídajících této podmínce, t. j.

$$\int_{z-\frac{1}{2}\xi}^{z+\frac{1}{2}\xi} [\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 - (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)]\, \mathrm{d}x = 0, \tag{4}$$

$$\int_{z-\frac{1}{2}\xi}^{z+\frac{1}{2}\xi} [\alpha_2 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_0 x - (a_3 x^4 + a_2 x^3 + a_1 x^2 + a_0 x)]\, \mathrm{d}x = 0, \tag{5}$$

$$\int_{z-\frac{1}{2}\xi}^{z+\frac{1}{2}\xi} [\alpha_2 x^4 + \alpha_1 x^3 + \alpha_0 x^2 - (a_3 x^5 + a_2 x^4 + a_1 x^3 + a_0 x^2)]\, \mathrm{d}x = 0 \tag{6}$$

obdržíme po provedení integrace:

$$\alpha_0 = a_0 + a_3 z(z^2 - 0{,}15\xi^2), \tag{7}$$

$$\alpha_1 = a_1 - a_3(3z^2 - 0{,}15\xi^2), \tag{8}$$

$$\alpha_2 = a_2 + 3a_3 z. \tag{9}$$

Sblíženou hodnotu x_v kořene x_k, jakožto úsečku průsečíku vyrovnávací paraboly (2) s osou x, vypočteme pak ze známého vzorce

$$x_v = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}{2\alpha_2}, \tag{10}$$

při čemž z konkretního případu se vždy jednoznačně podává, které z obou znamének $\pm$ v čitateli přichází v úvahu.

Vyrovnávací parabola je na obr. 1 znázorněna čárkovanou křivkou CD. Má několik pozoruhodných vlastností, jichž lze užíti k početní kontrole. Z rovnice (4) je patrno, že plocha omezená kubickou parabolou, osou x a pořadnicemi v krajních bodech P a Q intervalu rovná se ploše omezené vyrovnávací parabolou, osou x a zmíněnými pořadnicemi. Z rovnic (5) a (6) pak plyne, že i statické momenty a momenty setrvačnosti obou těchto ploch k ose y mají stejnou velikost. Dále se můžeme snadno přesvědčiti vypočtením hodnoty x z podmínky $f(x) = \varphi(x)$, že vyrovnávací parabola protíná kubickou parabolu v uvažovaném intervalu ξ ve 3 bodech M, K, L, jichž úsečky jsou $\overline{ON} = z$, $\overline{OK'} = z - \frac{1}{10}\sqrt{15}\xi$ a $\overline{OL'} = z + \frac{1}{10}\sqrt{15}\xi$. Úsečky průsečíků jsou tedy pouze funkcí veličin z a ξ, a jsou nezávislé na koeficientech $a_{0,1,2,3}$. Mimo to vidíme, že průmět N průsečíku M je totožný se středem intervalu a že průměty K' a L' ostatních dvou průsečíků jsou k tomuto středu souměrné. Souvisí to s další vlastností vyrovnávací paraboly, že totiž její odchylky Δy od dané kubické paraboly ve dvou libovolných, ke středu intervalu symetrických pořadnicích jsou co do absolutní hodnoty stejné.

Budiž zde jen stručně uvedeno, že podobný zajímavý vztah je též mezi parabolou 2. stupně a její vyrovnávací přímkou, která protíná tuto parabolu v mezích intervalu ve 2 bodech, jichž průměty na osu x jsou vzdáleny od středu intervalu o $\pm \frac{1}{6}\sqrt{3}\xi$; dále mezi parabolou 4. stupně a její vyrovnávací kubickou parabolou, kde průměty příslušných 4 průsečíků mají od středu intervalu vzdálenost $\pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{15 - 2\sqrt{30}}} \cdot \xi$ resp. $\pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{15 + 2\sqrt{30}}} \cdot \xi$, atd.

b) Blíží-li se interval ξ bez omezení nule, přechází vyrovnávací parabola CD v parabolu EF, která má s danou kubickou parabolou AB v bodě M trojbodový dotyk. Koeficienty této *oskulační paraboly* EF, jejíž průběh jest na obr. 1 naznačen čárkou a tečkou, plynou tudíž ze vzorců (7), (8) a (9) pro $\xi = 0$ těmito hodnotami:

$$\alpha_0' = a_0 + a_3 z^3, \tag{11}$$

$$\alpha_1' = a_1 - 3a_3 z^2, \tag{12}$$

$$\alpha_2' = a_2 + 3a_3 z = \alpha_2. \tag{13}$$

Ze vzorce (10), do něhož namísto $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ dosadíme $\alpha_0', \alpha_1', \alpha_2'$, dostaneme pak od x_v poněkud odchylnou, avšak rovněž dosti přesnou sblíženou hodnotu x_0 kořene x_k jakožto úsečku průsečíku této oskulační paraboly s osou x.

c) Posléze chci ještě upozorniti na další možnou modifikaci vyrovnávací paraboly, a to na úpravu, jež se zakládá na pojmu „váhy", známém z nauky o vyrovnávacím počtu. Je-li nám totiž poloha kořene ve zvoleném intervalu ξ předem přesněji známa (tedy když na př. víme, že kořen leží ve vnitřní třetině intervalu, nebo v jeho pravé třetině atd.), mohli bychom pro dosažení lepší aproximace klásti za podmínku, aby v určité dílčí oblasti intervalu, odpovídající nejbližšímu okolí kořene, vyrovnávací parabola *těsněji* přiléhala k dané kubické parabole než v ostatních částech intervalu. Značí-li obecně $\Phi(x)$ nějakou funkci, která by tomuto požadavku vyhovovala (v praxi bychom ji volili vhodně tak, aby vyskytující se integrace nebyly zbytečně komplikovány), má podmínka (3) nyní tvar:

$$\int_{z-\frac{1}{2}\xi}^{z+\frac{1}{2}\xi} [\varphi(x) - f(x)]^2 \cdot \Phi(x)\, dx = \min. \tag{14}$$

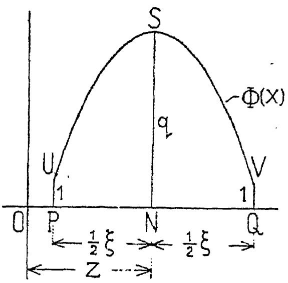
a koeficienty $\alpha_0'', \alpha_1'', \alpha_2''$ této *modifikované vyrovnávací paraboly* určíme pak podle obdoby (4), (5), (6) z rovnic:

$$\int_{z-\frac{1}{2}\xi}^{z+\frac{1}{2}\xi} [\alpha_2'' x^2 + \alpha_1'' x + \alpha_0'' - (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)] \cdot \Phi(x)\, dx = 0, \tag{15}$$

$$\int_{z-\frac{1}{2}\xi}^{z+\frac{1}{2}\xi} [\alpha_2'' x^3 + \alpha_1'' x^2 + \alpha_0'' x - (a_3 x^4 + a_2 x^3 + a_1 x^2 + a_0 x)] \cdot \Phi(x)\, dx = 0, \tag{16}$$

$$\int\limits_{z-\frac{1}{2}\xi}^{z+\frac{1}{2}\xi} [\alpha_2''x^4 + \alpha_1''x^3 + \alpha_0''x^2 - (a_3x^5 + a_2x^4 + a_1x^3 + a_0x^2)] \,.\, \Phi(x)\,\mathrm{d}x = 0. \qquad (17)$$

Volíme-li na př. pro funkci váhy $\Phi(x)$ zákon paraboly druhého stupně, a to parabolu souměrnou k ose NS vedené středem intervalu, s pořadnicí (vahou) $\overline{PU} = \overline{QV} = 1$ v krajních bodech intervalu a vahou $\overline{NS} = q > 1$ v jeho středu (viz obr. 1A), takže



Obr. 1A.

$$\Phi(x) = q + \frac{4(1-q)}{\xi^2}(z^2 - 2zx + x^2),$$

dostaneme z rovnic (15), (16), (17):

$$\alpha_0'' = a_0 + a_3z\left(z^2 - \tfrac{3}{28} \cdot \frac{4q^2 + 12q + 5}{4q^2 + 8q + 3} \cdot \xi^2\right),$$

$$\alpha_1'' = a_1 - a_3\left(3z^2 - \tfrac{3}{28} \cdot \frac{4q^2 + 12q + 5}{4q^2 + 8q + 3} \cdot \xi^2\right),$$

$$\alpha_2'' = a_2 + 3a_3z = \alpha_2.$$

Při tom má výraz $\frac{3}{28} \cdot \frac{4q^2 + 12q + 5}{4q^2 + 8q + 3} \cdot \xi^2$ ve vzorcích pro α_0'' a α_1'' určitý geometrický význam: je totiž čtvercem vzdálenosti bodu N od x-ového průmětu levého nebo pravého průsečíku této modifikované vyrovnávací paraboly s danou kubickou parabolou (průměty obou průsečíků jsou i zde k bodu N souměrné, rovněž tak jako průmět třetího — vnitřního — průsečíku jest opět identický s bodem N). Obdobně rovná se též ve vzorcích (7) a (8) pro α_0 a α_1 výraz $0{,}15\xi^2 = \overline{K'N}^2 = \overline{L'N}^2$.

Koeficienty α_0'' a α_1'' přecházejí v hodnoty α_0 a α_1 pro mezní hodnotu $q = 1$.

Jak již z tohoto příkladu můžeme posouditi, nepostrádá zjištění sblížené hodnoty kořene pomocí takovýchto modifikovaných parabol zajímavosti po stránce theoretické, zvlášť když poskytuje též rozmanité možnosti co do volby funkce $\Phi(x)$. Ovšem výsledné vzorce nejsou tak jednoduché jako sub Ia. Proto myslím, že praktickým účelům bude lépe vyhovovati vyrovnávací parabola podle vzorců (7), (8), (9); ostatně můžeme i zde přesnost výsledku velmi účinně zvýšiti prostým zúžením intervalu.

II. Vyrovnávací přímka.

a) Značí-li β_0 a β_1 neznámé koeficienty *vyrovnávací přímky GH* (viz obr. 1)

$$y = \varphi(x) = \beta_1x + \beta_0, \qquad (18)$$

jež musí vyhověti opět podmínce (3), pak obdržíme tyto koeficienty z rovnic

$$\int\limits_{z-\frac{1}{2}\xi}^{z+\frac{1}{2}\xi} [\beta_1 x + \beta_0 - (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)]\,\mathrm{d}x = 0, \tag{19}$$

$$\int\limits_{z-\frac{1}{2}\xi}^{z+\frac{1}{2}\xi} [\beta_1 x^2 + \beta_0 x - (a_3x^4 + a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x)]\,\mathrm{d}x = 0 \tag{20}$$

těmito hodnotami:

$$\beta_0 = a_0 - a_2(z^2 - \tfrac{1}{12}\xi^2) - a_3 z(2z^2 - \tfrac{1}{10}\xi^2), \tag{21}$$

$$\beta_1 = a_1 + 2a_2 z + 3a_3(z^2 + \tfrac{1}{20}\xi^2) \tag{22}$$

a sblížená hodnota x_v' kořene x_k, jakožto úsečka průsečíku této vyrovnávací přímky s osou x, plyne ze vzorce

$$x_v' = -\frac{\beta_0}{\beta_1}. \tag{23}$$

Obdobně jako u vyrovnávací paraboly můžeme si i zde přezkoušeti číselnou správnost výpočtu koeficientů β_0 a β_1 pomocí vlastností vyjádřených rovnicemi (19) a (20): t. j. rovnosti ploch omezených danou kubickou parabolou resp. vyrovnávací přímkou, osou x a krajními pořadnicemi, jakož i rovnosti statických momentů obou těchto ploch. Ostatně z rovnic (4) a (19), dále (5) a (20) se podává, že přímka GH je v mezích intervalu ξ vyrovnávací přímkou nejen pro kubickou parabolu AB nýbrž zároveň i pro vyrovnávací parabolu CD této kubické paraboly.

Pro $\lim \xi = 0$, čili pro

$$\beta_0' = a_0 - a_2 z^2 - 2a_3 z^3, \tag{24}$$

$$\beta_1' = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 \tag{25}$$

přechází vyrovnávací přímka GH v přímku $G'H'$, která je tečnou kubické paraboly v bodě M. Naše řešení je tedy pro tento *mezní* případ identické s methodou NEWTONOVOU.

b) Pro další úvahy předpokládám kubickou rovnici v *redukovaném tvaru*

$$a_3x^3 + a_1x + a_0 = 0 \tag{1b}$$

který, jak známo, v praxi velmi často se vyskytuje. V tomto případě, ježto $a_2 = 0$, je vyrovnávací přímka GH (viz obr. 2) dána koeficienty:

$$\beta_0 = a_0 - a_3 z(2z^2 - \tfrac{1}{10}\xi^2), \tag{26}$$

$$\beta_1 = a_1 + 3a_3(z^2 + \tfrac{1}{20}\xi^2). \tag{27}$$

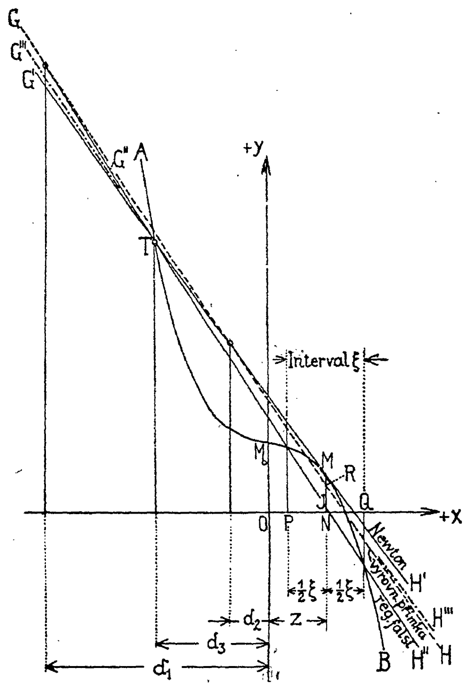
Zajímavý jest vztah této vyrovnávací přímky GH jednak k přímce $G''H''$, jež odpovídá známé methodě regula falsi a v soustavě námi použité má rovnici

$$y = [a_1 + 3a_3(z^2 + \tfrac{1}{12}\xi^2)]\,.\,x + a_0 - a_3 z(2z^2 - \tfrac{1}{2}\xi^2),$$

jednak k tečně $G'H'$ v bodě M (methoda Newtonova) vyjádřené rovnicí

$$y = (a_1 + 3a_3z^2) \cdot x + a_0 - 2a_3z^3.$$

Jak totiž z uvedených rovnic snadno zjistíme, je vzájemná poloha těchto tří přímek charakterisována těmito vztahy:



Obr. 2.

Vyrovnávací přímka GH protíná přímku $G''H''$ na svislici vedené k ose x ve vzdálenosti $d_1 = -4z$ od osy y, a přímku $G'H'$ protíná na svislici vedené k ose x ve vzdálenosti $d_2 = -\frac{2}{3}z$ od osy y. Přímky $G'H'$ a $G''H''$ protínají se na svislici vedené k ose x ve vzdálenosti $d_3 = -2z$ od osy y, při čemž jejich průsečík T je zároveň též bodem dané kubické paraboly $y = a_3x^3 + a_1x + a_0$. Uprostřed intervalu probíhá vyrovnávací přímka GH mezi oběma přímkami $G''H''$ a $G'H'$ tak, že $\overline{RJ} = 2\overline{RM}$, při čemž bod R značí průsečík svislice, vedené k ose x v bodě N, s vyrovnávací přímkou, kdežto body J a M jsou průsečíky této svislice s přímkou $G''H''$ resp. $G'H'$.

Pro lepší aproximaci kořene bývá Newtonova methoda obvykle kombinována s methodou regula falsi. Shora zjištěnou, jaksi „střední" polohou nám vyrovnávací přímka nutnost podobné kombinace zpravidla uspoří.

Kubická parabola $y = a_3x^3 + a_1x + a_0$ má v průsečíku M_0 s osou y bod obratu. Je-li kořen tak blízko nule, že volíme $z = 0$, prochází pak vyrovnávací přímka (stejně jako i přímky $G'H'$ a $G''H''$) tímto bodem M_0 a její rovnice podává se ze vzorců (26), (27) ve tvaru:

$$y = (a_1 + \tfrac{3}{20}a_3\xi^2) \cdot x + a_0. \tag{28}$$

Mimochodem budiž připomenuto, že pro tento mezní případ mění se vyrovnávací parabola v přímku totožnou s přímkou (28), jak plyne ze vzorců (7), (8), (9), dosadíme-li do nich $a_2 = 0$, $z = 0$.

Nakonec chci ještě uvésti, že pro praktickou potřebu lze nahraditi vyrovnávací přímku GH jinou přímkou $G'''H'''$, $y = \gamma_1x + \gamma_0$, která prochází rovněž bodem R a dále bodem T (tedy průsečíkem přímek $G'H'$ a $G''H''$). Tato přímka $G'''H'''$, která v oblasti intervalu ξ jen nepatrně se liší od vyrovnávací přímky, jest určena rovnicí

$$y = [a_1 + a_3(3z^2 + \tfrac{1}{12}\xi^2)] \, . \, x + a_0 - a_3 z(2z^2 - \tfrac{1}{6}\xi^2) \qquad (29)$$

a protíná danou kubickou parabolu uvnitř intervalu ve 2 bodech, jichž průměty na osu x jsou vzdáleny od středu intervalu o $\pm \frac{1}{6}\sqrt{3}\xi$, takže tyto průsečíky leží v týchž svislicích jako průsečíky vyrovnávací paraboly s vyrovnávací přímkou.

Okolnost, že polohu průsečíku přímky $G'''H'''$ s kubickou parabolou známe, umožní nám vhodnou volbu intervalu ξ: značí-li Δz absolutní hodnotu rozdílu $(z' - z)$, kde z má známý již význam a z' je další sblíženou hodnotou kořene x_k (na př. z jest aproximací na 2 místa přesnou, kdežto z' jest aproximací 3místnou, nebo vícemístnou, při čemž poslední místo bylo zjištěno třebas přibližně), usměrníme pak délku intervalu účelně tak, aby $\frac{1}{6}\sqrt{3}\xi = \Delta z$, z čehož $\xi = 2\sqrt{3} \, . \, \Delta z$. Při této délce intervalu bude protínati přímka $G'''H'''$ kubickou parabolu v blízkém okolí průsečíku této paraboly s osou x, tedy kořene, čímž se zvýší přesnost výsledku našeho výpočtu kořene.

Jelikož přímka $G'''H'''$ prochází bodem R, máme i zde rovnost ploch omezených jednak touto přímkou, jednak danou kubickou parabolou, osou x a pořadnicemi na počátku a konci intervalu.

III. Číselné příklady.

Jako příklad volím kubickou rovnici

$$x^3 - 3x + 1 = 0,$$

kterou se zabývá též p. Dr König ve svém svrchu zmíněném pojednání, v němž pro menší z obou kladných reálných kořenů uvádí hodnotu

$$x_k = 0{,}347\,296\,355\,333\,860\,697\,703\,433\ldots$$

(Tento kořen má ostatně — podle Adlera — geometrický význam: rovná se totiž straně pravidelného 18úhelníku vepsaného kružnici o poloměru $r = 1$, a je tudíž dán rozvojem funkce $2 \sin\frac{\pi}{18}$ v příslušnou nekonečnou řadu.)

1. *Výpočet podle vyrovnávací paraboly:*

Nejprve zjišťujeme, že v dané rovnici je: $a_0 = +1$, $a_1 = -3$, $a_2 = 0$, $a_3 = +1$.

a) Pro první aproximaci volíme $z = 0{,}35$; dále $\xi = 0{,}01$. Pak je podle vzorců (7), (8), (9):

$$x_0 = 1 + 0{,}35(0{,}35^2 - 0{,}15 \, . \, 0{,}01^2) = 1{,}04286975,$$
$$x_1 = -3 - 3 \, . \, 0{,}35^2 + 0{,}15 \, . \, 0{,}01^2 = -3{,}367485,$$
$$x_2 = 3 \, . \, 0{,}35 = 1{,}05.$$

Kontrolu číselné správnosti koeficientů provedeme podle rovnosti ploch:

$$\int_{0,345}^{0,355} (x^3 - 3x + 1)\,dx = -0{,}0000711625,$$

$$\int_{0,345}^{0,355} (1{,}05x^2 - 3{,}367485x + 1{,}04286975)\,dx = -0{,}0000711625.$$

Sblíženou hodnotu kořene vypočteme pak ze vzorce (10)

$$x_v = \frac{3{,}367485\ (\pm)\ \sqrt{3{,}367485^2 - 4{,}2\,.\,1{,}04286975}}{2{,}1} =$$
$$= 0{,}347\,296\,347\ldots$$

Obdrželi jsme tedy již při této první, poměrně hrubé aproximaci kořen na 7 míst správně (s opravou z dalších 2 míst $4{,}7 \doteq 5$ na 8 míst správně).

b) Chceme-li vypočísti kořen ještě přesněji, volíme na př. $z = 0{,}347$ a $\xi = 0{,}001$. Dostaneme pak týmž způsobem ze vzorců (7) až (10):

$$\alpha_0 = 1{,}04178187095;\ \alpha_1 = -3{,}36122685;\ \alpha_2 = 1{,}041.$$
$$x_v = 0{,}34729635534\ldots,$$

t. j. hodnotu kořene obdržíme v tomto případě na 10 míst přesně.

2. *Výpočet podle oskulační paraboly:*

Volíme opět $z = 0{,}35$. Ze vzorců (11), (12), (13) plyne:

$$\alpha_0' = 1{,}042875;\ \alpha_1' = -3{,}3675;\ \alpha_2' = 1{,}05.$$

Dosazením těchto koeficientů do vzorce (10) obdržíme pak sblíženou hodnotu kořene $x_0 \doteq 0{,}347\,296\,36\ldots$, t. j. hodnotu přesnou na 7 míst.

3. *Výpočet podle vyrovnávací přímky:*

Zvolme opět $z = 0{,}35$ a $\xi = 0{,}01$. Pak je ze vzorců (26), (27):

$$\beta_0 = 0{,}9142535;\ \beta_1 = -2{,}632485.$$

Tudíž podle vzorce (23) sblížená hodnota kořene:

$x_v' = \dfrac{0{,}9142535}{2{,}632485} = 0{,}3472967\ldots$, která nám dává kořen na 6 míst přesně.

Pro porovnání uvádím, že za týchž předpokladů, t. j. $z = 0{,}35$ a $\xi = 0{,}01$ dospějeme methodou regula falsi k aproximativní hodnotě kořene 0,347303... (tedy k hodnotě přesné pouze na 3 místa) a methodou Newtonovou k hodnotě 0,347293... (přesné na 5 míst). Ani aritmetický průměr 0,347298 obou těchto hodnot nedosahuje v našem konkretním případě šestimístné přesnosti, získané vyrovnávací přímkou. Při tom jest práce, vynaložená na početní úkony, u všech tří method přibližně stejná.

4. *Výpočet podle obměny vyrovnávací přímky (přímka $G'''H'''$):*

Volíme $z = 0{,}35$ a $z' = 0{,}3473$, takže $\Delta z = 0{,}0027$. Usměrněná délka intervalu jest tudíž $\xi = 2\sqrt{3} \,.\, \Delta z = 2 \,.\, 1{,}73205 \,.\, 0{,}0027 = 0{,}00935307$.

Koeficienty γ_0 a γ_1 plynou pak ze vzorce (29) těmito hodnotami:

$$\gamma_0 \doteq 0{,}914255103; \; \gamma_1 \doteq -2{,}63249271,$$

z nichž vypočteme sblíženou hodnotu kořene

$$\frac{0{,}914255103}{2{,}63249271} = 0{,}347296347 \ldots$$

Obdrželi jsme tedy hodnotu kořene na 7 míst přesně, s opravou z dalších 2 míst na 8 míst přesně.

*

Contribution à la résolution numérique de l'équation du troisième degré. En employant la méthode des moindres carrés, l'auteur résout les équations algébriques du troisième degré.

KE KINEMATICE KOTÁLNIC.

ZDENĚK PÍRKO, Praha.

V tomto článku se zabývám analytickým řešením této kinematické otázky: *Dán rovinný profil Π_1; určit rovinný profil Π_2 tak, aby kotálení profilu Π_1 po profilu Π_2 (nebo obráceně) bylo možno uskutečnit buďto pouhou translací po dané přímce nebo pouhou rotací po dané kružnici.* Ukazuji, že při stanovení vhodných všeobecných rovnic, jež vyjadřují polohové i pohybové podmínky kotálení, lze řešení všech těchto otázek převést na kvadratury.

1. Zopakujme definici: Jestliže se kotálí daná čára C_h (*čára hybná*) po obvodu jiné dané čáry C_p (*čáry pevné*), aniž by klouzala, nazýváme trajektorii K, popsanou v rovině pevné čáry C_p bodem P, pevně spojeným s hybnou čarou C_h, *kotálnicí.*

Předpokládejme, že kotálení čáry C_h po čáře C_p nastává jen podél takových oblouků, na nichž neleží žádný singulární bod těchto čar. Pak rozeznávejme tyto dva případy: Během kotálení leží čáry C_p, C_h na různých stranách tečny k nim sestrojené ve společném bodě dotyku M, nebo leží po téže její straně. Budeme v prvním případě mluvit o kotálení po vnějším obvodu čáry C_p (stručně o *kotálení vnějším*), v druhém případě o *kotálení vnitřním.*

Za těchto předpokladů můžeme nyní pro čáry C_p, C_h zavésti tuto orientaci: Za kladný smysl normály považujme onen, jenž míří od incidenčního bodu k příslušnému středu křivosti; kladný smysl tečny budiž pak určen požadavkem, aby kladná tečna splynula s kladnou normálou po otočení o pravý úhel v kladném smyslu. Konečně za polární úhel