Matyáš Lerch

O soustavách bodů a jich významu v analysi

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 5, 211–218

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109134

rohy $SN_0n_0N_1n_1N_2n_2N_3n_3N_0$ a $SM_0m_0M_1m_1M_2m_2M_3m_3M_0$, z nichžto prvý je do kužele $SN_0N_1N_2N_3N_0$ vepsaný, a druhý okolo kužele $SM_0M_1M_2M_3M_0$ opsaný.

O soustavách bodů a jich významu v analysi.

Píše

M. Lerch v Praze.

1.

Již *Cauchy* vytknul větu, že pro každou řadu mocninovou tvaru

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_\nu x^\nu + \ldots,$$

která konverguje pro jistá x a pro jiná diverguje, existuje kladná veličina ϱ té vlastnosti, že řada (1) konverguje pro všecka x absolutně menší než ϱ, a diverguje pro všecka x absolutně větší než ϱ.

Někteří spisovatelé starší školy dokazují tuto větu následovně: Konverguje-li řada (1), a značí-li u_ν obecný její člen $a_\nu x^\nu$, bude $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \leqq 1$, tj. $x . \lim\limits_{\nu=\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \leqq 1$, takže třeba klásti $\varrho = \lim\limits_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$, aby věta byla dokázána co do prvé části.

Zdá se mi, že těmto autorům ani na mysl nepřipadla možnosť, že existují řady konvergentní, v nichž o existenci veličiny $\lim \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ nemůže býti řeči.

Řady, u nichž tato veličina existuje, náležejí sice k nejznámějším a k nejčastějším v elementarné analysi, celkem jsou ale velmi řídké. Neboť již jednoduchá řada desetinná

$$\frac{72}{99} = 0{\cdot}727272\ldots = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{10^\nu},$$

v níž

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = a_{2n+1} = \ldots = 7,$$
$$a_2 = a_4 = a_6 = \ldots = a_{2n} = \ldots = 2,$$

má obecný člen $u_\nu = \frac{a_\nu}{10^\nu}$, a tedy značí $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \cdot \frac{1}{10}$ buď hodnotu $\frac{7}{20}$ aneb $\frac{2}{70}$, jak je ν sudé neb liché, a tedy patrně o nějaké limitě tohoto výrazu nemůže býti řeči. Tato okolnosť nejlépe ukazuje, jak mnoho se někdy v mathematice myslí. Ještě více je to patrno z následujícího příbuzného příkladu: Řada

$$\frac{a+bx}{1-x^2} = a(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)+bx(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)$$
$$= a+bx+ax^2+bx^3+ax^4+bx^5+\ldots$$

konverguje pro $|x|<1$, a veličina $\lim \left|\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right|$ tu neexistuje. Pro takové jednoduché funkce je tedy hořejší důkaz nedostačitelným! Za svého pobytu na universitě berlínské podrobil jsem výraz $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ vztažený ke konvergentní řadě kladných členů

$$(2) \qquad u_0+u_1+u_2+\ldots+u_\nu+\ldots$$

přesné analysi, a nalezl jsem nejen obecnější větu, která tuto*) v případě, kdy výraz $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ nemá limity pro rostoucí ν, nahražuje, ale shledal jsem též, že zde o nějaké nutné podmínce, která by hodnotám tohoto poměru vykazovala nějakou horní mez, nemůže býti řeči. Nalezl jsem řadu tvaru (2), kde podíl $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ blížil se brzy hodnotě δ libovolně dané ale menší než 1, brzy dosahoval hodnot libovolně velikých. Jinými slovy: moje řada měla tu vlastnost, že pro libovolně daná dvě čísla $\varepsilon < g$, jakkoli nepatrné ε a pro sebe větší g existuje celistvé číslo n, tak že buď $\left|\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} - \delta\right| < \varepsilon$ aneb $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} > g$, jakmile $\nu > n$, a že obě tyto nerovnosti se splní pro jistá $\nu > n$.

*) T. j. větu, že řada (2) konverguje pro $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} < 1$.

Je-li $\delta = 0$, pak je příklad na snadě: řada (2), v níž $u_\nu = \frac{1+(-1)^\nu}{2^{\nu+1}} + \frac{1-(-1)^\nu}{\nu^2}$, takže u_ν má hodnotu $\frac{1}{2^\nu}$ neb $\frac{2}{\nu^2}$, jak je ν sudé neb liché, konverguje, sestávajíc z řad $\Sigma\frac{1}{2^{2n}}$ a $\Sigma\frac{2}{(2n+1)^2}$ patrně konvergentních.

Hodnota $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ rovná se tu buď veličině $\frac{2^{\nu+1}}{(\nu+1)^2}$ neb $\frac{\nu^2}{2^{\nu+2}}$, z nichž prvá nekonečnu, druhá nulle se blíží, zvětšuje-li se ν neomezeně.

Že však také řady řečené vlastnosti pro $\delta > 0$ existují, vidno z následujícího příkladu:

Řada členů *) $u_\nu = \delta^{\nu-(\lg\nu)} g^{(\lg\nu)\cdot\frac{1+(\lg\nu)}{2}}$ konverguje, jestliže je δ libovolná hodnota kladná menší než 1, g větší než 1 ale tak, aby $\delta\sqrt{g} < 1$, a kde symbol $(\lg\nu)$ značí celky briggického logarithmu čísla ν, t. j. jeho charakteristiku čili o jednotku zmenšený počet decimalných jeho cifer.

Není-li ν tvaru $10^\mu - 1$, pak je $(\lg\overline{\nu+1}) = (\lg\nu)$, a proto

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = \delta < 1;$$

je-li však $\nu = 10^\mu - 1$, bude $(\lg\overline{\nu+1}) - (\lg\nu) = 1$, a proto

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = g^{\frac{1}{2}} \cdot g^{(\lg\nu)+\frac{1}{2}} = g^{(\lg\nu)+1},$$

kterážto veličina s rostoucím ν převyší každou hodnotu.

Dokažme nyní konvergenci této řady.

Poněvadž $(\lg\nu) \leq \lg\nu$, bude za učiněných hypothes

$$g^{(\lg\nu)\cdot\frac{(\lg\nu)+1}{2}} = \sqrt{g}^{(\lg\nu)+(\lg\nu)^2} < \left(\frac{1}{\delta}\right)^{(\lg\nu)+(\lg\nu)^2},$$

takže
$$u_\nu < \delta^{\nu-2(\lg\nu)-(\lg\nu)^2}$$

a tedy
$$\sqrt[\nu]{u_\nu} < \delta^{1-\frac{2(\lg\nu)+(\lg\nu)^2}{\nu}},$$

*) Viz mé pojednání ze zpráv o zasedání král. české společnosti nauk: „Příspěvky k theorii řad nekonečných". 13. březen 1885.

kterážto hodnota se pro nekonečně rostoucí ν blíží veličině $\delta < 1 \left(\text{ano } \lim\limits_{\nu=\infty} \frac{\lg^k \nu}{\nu} = 0\right)$, takže řada konverguje.

2.

Abych tyto a jiné věty stručněji mohl vyjádřiti, zavedl jsem nový pojem, který zahrnuje pojem limity jako zvláštní případ.

Máme-li nekonečnou řadu hodnot realných

(1) $$a_0, a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots$$

můžeme tyto veličiny představiti řadou bodů, které buďtež stejně označeny.

O bodech přímky pak můžeme následující předpokládati: Libovolný bod x přímky buď

1. leží uvnitř jistého intervallu, v němž se žádný z bodů a_ν nenalezá, neb

2. bod x splývá s jedním z bodů a_ν, jenž se v řadě naší jen v konečném počtu opakuje, a je možno obehnati jej na obou stranách intervallem, v němž neleží žádný z ostatních bodů a_ν, aneb

3. bod x přichází v řadě (1) nekonečněkrát jako prvek, aneb posléz

4. bod x náleží buď řadě (1), přicházeje v ní v počtu konečném anebo v ní nepřichází, ale v obou případech má tu vlastnosť, že každý sebe menší intervall obsahující uvnitř bod x obsahuje neomezený počet bodů řady (1).

Jiné případy nastati nemohou, any tyto disjunkce nutně všecky body přímky vyčerpají.

Při tom zvlášť podotýkám, že také k bodu $x = \infty$ třeba bráti zřetel; pro tento bod nenastane případ 2. ani 3.; případ 4. nastane, nemají-li veličiny a_ν horní meze, v opačném případě nastane 1.

Všecky body x vlastnosti 3. a 4. shrnujeme v soustavu, kterou zoveme *arithmetickou derivací* soustavy $(a_0, a_1, \ldots a_\nu \ldots) = (a_\nu)$, neb její *soustavou meznou* a značíme $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{D}}(a_\nu)$.

Má-li soustava a_ν jediný bod x vlastnosti 3. neb 4., pak existuje veličina $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = x$. Náš symbol $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{D}}(a_\nu)$ zahrnuje tedy v sobě jako zvláštní případ symbol $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu$.

Příklady. Snadno shledáme, že zbytky násobků irracionálného čísla $\frac{1}{\pi}$ po odečtení celků, t. j. veličiny $Z\left(\nu \cdot \frac{1}{\pi}\right)$, ($\nu = 1$ 2, 3, ...) tvoří soustavu bodů rozložených všehustě po celém intervallu (0...1), tedy že též hodnoty $\sin \nu$ naplňují intervall $(-1 \ldots +1)$ ve všech částech, takže arithmetická derivace

$$\underset{\nu=\infty}{\mathrm{D}}(\sin \nu) = (-1 \ldots +1)$$

sestává ze spojitého intervallu $(-1 \ldots +1)$.

Dále nám poskytují hořejší dvě konvergentní řady pro a_ν, resp. $a'_\nu = \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ hodnoty

$$a_\nu = \frac{\frac{1+(-1)^{\nu+1}}{2^{\nu+2}} + \frac{1-(-1)^{\nu+1}}{(\nu+1)^2}}{\frac{1+(-1)^\nu}{2^{\nu+1}} + \frac{1-(-1)^\nu}{\nu^2}},$$

$$a'_\nu = \delta \cdot \left(\frac{\sqrt{g}}{\delta}\right)^{(\lg\overline{\nu+1})-(\lg \nu)} \cdot g^{\frac{1}{2}[(\lg\overline{\nu+1})^2-(\lg\nu)^2]};$$

tyto soustavy máme arithmetické derivace resp.

$$\underset{\nu=\infty}{\mathrm{D}}(a_\nu) = (0, \infty),\ \underset{\nu=\infty}{\mathrm{D}}(a'_\nu) = (\delta, \infty).$$

Tento pojem arithmetické derivace pobádá nás k zobecnění mnohých vět analyse.

Tak na př. věta — „Řada $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ konverguje, je-li $\lim \left|\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right| < 1$, předpokládaje existenci této hodnoty“ — dá se následovně zobecniti:*)

„Řada $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ konverguje, sestává-li arithmetická derivace soustavy $\left|\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right|$, tj. soustava $\underset{\nu=\infty}{\mathrm{D}}\left(\left|\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right|\right)$ z hodnot vesměs menších jednotky“.

Že tato podmínka není nutnou, ukazují hořejší dva příklady.

*) Viz totéž mé pojednání.

Ana tato poznámka nemá býti kopií citované mé práce, odkazuji čtenáře na tuto, v níž nalezne důkaz řečeného právě kriteria, jakož i zobecněné kriterium Raabeovo a j.

3.

Tak jako máme limity druhu dvojího, abych tak řekl diskretní a spojité, tak máme také soustavy mezné dvou druhů.

Limity druhu prvého jsou ony, u nichž se přechod mezný děje tím, že jisté celistvé číslo roste neomezeně, kdežto limity způsobu druhého k spojitému meznímu přechodu se vztahují, jako na př. $\lim\limits_{x=0} \frac{\sin x}{x}$, a p.

Arithmetické derivace, studované v předchozím čísle, vztahují se k celistvému číslu ν, a poněvadž soustava a_ν, jsouc dána *řadou* bodů, sluje prvé *mohútnosti*)*, tedy můžeme tyto mezné soustavy nazývati arithm. derivacemi soustav prvomohútných. Nyní podám některé soustavy mezné s přechodem spojitým.

a) Mějme v intervallu $(\alpha \ldots \beta)$ definovanou realnou funkci realné proměnné x spojitou a jednoznačnou. Buď a určitá poloha bodu x uvnitř $(\alpha \ldots \beta)$, a studujme poměr $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pro x poblíž bodu a. Všecka realná čísla od $-\infty$ do $+\infty$ rozpadají se v následující kategorie (při čemž k vůli přehledu užívám mluvy geometrické):

α) Body z té vlastnosti, že je možno sestrojiti intervall, objímající bod z tak malý, aby mu odpovídala jistá dosti malá veličina δ v ten způsob, že všecky hodnoty poměru $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pro všecka $|x-a| < \delta$ leží mimo onen intervall, objímající bod z; a pak

β) v body z té vlastnosti, že takový intervall sestrojiti nelze, takže uvažovanému bodu z přicházejí hodnoty poměru rozdílového $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ pro nekonečně malé hodnoty rozdílu Δx libovolně blízko.

Všechny body vlastnosti *β)* shrnujeme v soustavu, kterou

*) Dle *Jiřího Cantora* (Mächtigkeit).

zoveme *soustavou mezných hodnot rozdílu* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ *při spojitém přechodu* $x = a$, čili *soustavou meznou* onoho výrazu, a značíme $\underset{x=a}{\mathrm{L}}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)$.

Přímky vycházející z bodu $x = a$, $y = f(a)$, mající za směrnice všecky hodnoty soustavy $\underset{x=a}{\mathrm{L}}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)$ tvoří *soustavu tečen* křivky $y = f(x)$ v bodě $x = a$, $y = f(a)$. Sestává-li tato soustava z jediné přímky, máme tu obyčejný případ, kde křivka má jedinou tangentu v uvažovaném bodě. Nicméně může ale tato soustava tečen sestávati z nekonečného počtu přímek, a může býti seřaditelnou neb nikoli.

V případě jediné tangenty, odpovídající hodnotě $z = z_0$, máme

$$z_0 = \underset{x=a}{\mathrm{L}}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right) = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=a} = f'(a);$$

máme tu tedy rozšířen pojem differencialního poměru.

b) Máme-li funkci $f(x)$ definovánu pro všecka místa určitého intervallu, můžeme utvořiti meznou soustavu $\underset{x=a}{\mathrm{L}}[f(x)]$, která charakterisuje průběh funkce v okolí bodu a.

c) Podobně lze definovati mezné soustavy v rovině, zejmena při theorii funkcí komplexní proměnné: tak bude na př. u funkce $e^{\frac{1}{x}}$ soustava mezná $\underset{x=0}{\mathrm{L}}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$ sestávati ze všech bodů roviny.

d) Mysleme si nějaké těleso hmotné, a v něm určitý bod a. Pak rozdělme kladná čísla od 0 do ∞ v následující dvě kategorie:

α) V čísla x té vlastnosti, že se dají obehnati intervallem dosti malým, jemuž odpovídá dosti malá veličina δ, tak aby poměr váhy k objemu všech výkrojků onoho tělesa, obsahujících uvnitř bod a, kterěžto výkrojky leží uvnitř koule o středu a a poloměru δ, ležel mimo onen intervall, objímající číslo x, a pak

β) v čísla, která takým intervallem obehnána býti nemohou, takže jim hodnota $\frac{q}{v}$, kde q značí váhu, v objem výkrojku uvnitř oné koule poloměru δ, přichází libovolně blízko.

Tato čísla vlastnosti β) tvoří jistou soustavu $\underset{\delta=0}{\mathrm{L}}\left(\frac{q}{v}\right)$, kterou chci nazývati *soustavou densitalní* uvažované hmoty v bodě a. Obsahuje-li tato soustava jediné číslo, jest to ono, jež sluje *hustotou* oné hmoty v místě a. Zajisté mohou v přírodě existovati tělesa, která nemají v žádném svém bodě určité hustoty, za to ale určitou soustavu densitalní. Zkušenost zdá se ukazovati, že body soustavy densitalní nacházejí se v jistých dosti úzkých mezích.

Konstrukce tečen křivek cissoidálných.

Napsal

V. Jeřábek,

professor v Brně.

V následujících řádcích vyvineme konstrukci tečen křivek stupně třetího, které velmi úzce souvisí s Queteletovou fokálou všeobecného kužele stupně druhého, strofoidou a cissoidou Diokleovou.

K účelu tomu budiž dán trojúhelník ABC (obr. 1.), jehož strana BC jest pevna, a jehož vrchol A pohybuje se v kružnici ABD jdoucí bodem B. Dokážeme, že geom. místem průsečíku M výšek AM, BM, CM trojúhelníka ABC jest křivka stupně třetího.

Prodloužená strana AC protíná kružnici ABD ve vrcholu A_1 druhého trojúhelníka A_1BC, jehož výšky A_1M_1, BM_1, CM_1 protínají se v druhém bodě M_1 místa geometrického. Otáčí-li se přímka AA_1 kolem bodu C, vytvoří výšky CM, CM_1 involuční svazek paprskový; jelikož BA, BA_1 též takový svazek vytvoří. Svazek výšek (BM) jest prométný s involučním svazkem paprsků (CM, CM_1), a proto jest výtvarem obou svazků křivka K stupně třetího.

Otočí-li se AA_1 do kolmice ${}^1A{}^1A_1$ vztyčené v bodě C na BC, sjednotí se body M, M_1 s bodem C, který za příčinou tou jest dvojným bodem křivky K, a mezní polohy sečen CM, CM_1 jsou tečnami bodu dvojného. Že však výšky CM, CM_1 stále stojí kolmo na hybných stranách BA, BA_1, musejí i tečny